

## MODELO DE ENSEÑANZA MODULAR PERSONALIZADA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Jesús Vilchez Guizado  
jjevilchez10@gmail.com  
Universidad Nacional Hermilio Valdizán de Huánuco, Perú

**Núcleo temático:** Pensamiento algebraico.

**Modalidad:** Comunicación breve (CB).

**Nivel Educativo:** Secundaria (16 - 18 años).

**Palabras clave:** Enseñanza personalizada, módulo didáctico, aprendizaje significativo, función trigonométrica.

### Resumen

*Esta comunicación trata sobre la implementación de un patrón de enseñanza modular personalizado de las funciones trigonométricas y responde a un intento de innovar el proceso de enseñanza-aprendizaje para el quinto grado de secundaria. Se empieza por identificar las causas del deficiente aprendizaje en los estudiantes, a través de un análisis de los sujetos, procesos y medios que intervienen en el proceso educativo. Además se plantea un modelo de enseñanza modular de las funciones trigonométricas a partir de arcos y puntos sobre la circunferencia unitaria en el plano cartesiano con tratamiento personalizado; formulando, con el fin de dar solución al problema identificado, la hipótesis de que su implementación permite un aprendizaje significativo del tema por los estudiantes. El trabajo de campo se inicia con una prueba de requisitos, seguido de pruebas de proceso y se concluye con una prueba de salida, cuyos resultados empíricos permiten concluir que el modelo didáctico desarrollado repercute en el éxito académico los estudiantes, a la vez que motiva y desarrolla actitudes positivas para el aprendizaje individual y grupal.*

### 1. Introducción

Las matemáticas aparecen en todas las formas de expresión humana, permiten codificar información y obtener una representación de la realidad suficientemente potente como para permitir una actuación posterior sobre el mismo. Al describir un fenómeno en términos de un modelo matemático, se pueden inferir conclusiones lógicas sobre el modelo, que predicen el comportamiento futuro del fenómeno y, de ahí, conjeturar los cambios que se pueden producir o las regularidades que se van a mantener (Rico, 1995).

Dada la importancia de las funciones en la comprensión de los fenómenos de la realidad y dentro del desarrollo de la matemática, como fruto de nuestra experiencia docente en el área de matemática en la secundaria y los primeros ciclos de la educación superior, planteamos

la estrategia didáctica orientada a la definición formal con argumento intuitivo de las funciones trigonométricas; teniendo en cuenta de que los estudiantes tienen una inclinación hacia la representación gráfica de las funciones, interactuando en forma permanente con los recursos tecnológicos. La intención de este trabajo no fue solo presentar una estrategia de enseñanza con módulos didácticos, sino también analizar el efecto de la enseñanza personalizada del tema siguiendo una secuencia diferente a lo habitual que propicie el autoestudio y el trabajo personalizado en clase a través de actividades diseñados para un aprendizaje eficiente de las funciones trigonométricas en sus formas de presentación algebraica, analítica y gráfica.

## **2. Planteamiento del problema**

Según Gómez (1996), el profesor de matemáticas es el diseñador y ejecutor de experiencias que pone a los estudiantes en interacción consigo mismos, con los otros estudiantes y con el conocimiento que posee para que puedan construir conocimientos matemáticos que queremos que todos obtengan; por consiguiente el profesor debe ser un profesional; y para ser un profesional, tener el conocimiento producto de esa disciplina, de esa profesión y debe ser capaz de describir y caracterizar el estado de comprensión de los estudiantes.

En la realidad educativa donde se realiza el estudio, existen falencias en los actores del proceso educativo.

Los estudiantes muestran serias deficiencias en la comprensión de lenguaje simbólico de la Matemática, para diferenciar una función de una relación, identificar el dominio y rango de una función, identificar relaciones de simetría entre puntos del plano cartesiano, trazar la gráfica de una función real, identificar las funciones pares e impares, periódicas y monótonas, etc.

Por otro lado, la mayoría de los docentes inician el estudio de las funciones trigonométricas, en forma algorítmica, como razón entre los lados de un triángulo rectángulo, con escaso análisis de sus propiedades; no hacen uso de conocimientos previos para abordar el tema, tampoco propician estrategias de aprendizaje activo, ni aprendizajes colaborativos; utilizan en forma esporádica los recursos de las TIC.

De lo descrito, es imprescindible implementar estrategias metodológicas que dinamicen el proceso de enseñanza-aprendizaje y mejorar el éxito escolar. Para este propósito, se formula

la pregunta: *¿Qué efectos produce la enseñanza modular personalizada de las funciones trigonométricas a partir de puntos y arcos orientados sobre la circunferencia unitaria en el plano cartesiano en los estudiantes de educación secundaria?*

### **3. Objetivos**

#### **3.1 Objetivo general**

Comprobar que con la implementación del modelo de enseñanza modular personalizada de las funciones trigonométricas a partir de puntos y arcos orientados sobre la circunferencia unitaria mejora en forma significativa el aprendizaje de los estudiantes de educación secundaria.

#### **3.2 Objetivo específicos**

- Diseñar y elaborar módulos didácticos para la enseñanza personalizada de las funciones trigonométricas, adecuados al aprendizaje individual y grupal de los alumnos del quinto grado de secundaria.
- Realizar la enseñanza modular personalizada de las funciones trigonométricas a partir de puntos y arcos en una circunferencia unitaria en el plano cartesiano y analizar el aprendizaje conceptual, procedimental y actitudinal logrado en estudiantes del quinto grado de secundaria.

### **4. Marco teórico**

La enseñanza personalizada es fundamental en la matemática, por su diversidad de matices dentro de unas mismas raíces esenciales que permite adaptar la enseñanza a la manera de ser de cada estudiante para que se sienta más a gusto durante el aprendizaje, así como en sus futuras ocupaciones laborales (Santaló, 1994, p.42). Bajo esta premisa, la investigación se sustenta en conceptos referidos al proceso enseñanza de la matemática, enseñanza de las funciones trigonométricas, tendencias en la enseñanza de la trigonometría, entre otros. Los cuales se detallan a continuación:

#### **4.1 La enseñanza de la Matemática en la Educación Secundaria**

La enseñanza de la Matemática crea los estímulos que activan y aceleran el aprendizaje; el problema fundamental de la enseñanza es acoplar la mente del alumno a la materia objeto de aprendizaje. Esto implica una enseñanza personalizada de forma que, dada una materia a

enseñar, lo ideal es encontrar para cada alumno el transformador adecuado al nivel de su entendimiento y formación, que hiciese el acoplo más adecuado (Santaló, 1994). Para Dejudonné (1986) la finalidad de la enseñanza de la matemática en las sociedades modernas, es que los alumnos aprendan a ordenar y encadenar sus pensamientos, aprendiendo la matemática con claridad y rigurosidad.

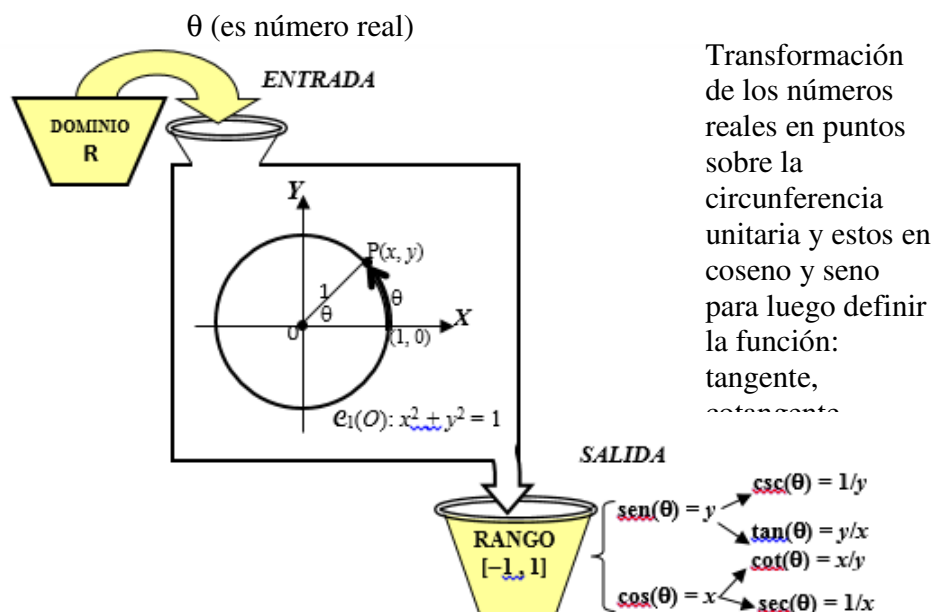
Para este propósito es necesario la existencia de una correspondencia horizontal entre el acto de aprender y el acto de enseñar, pues lo que interesa es la adquisición de conocimiento y cambio de actitudes, explotando los conocimientos previos del alumno, haciendo que experimenten por sí mismos para dotarlos de significado y aceptar que el aprendiz vaya construyendo su propio conocimiento al integrar la nueva información en redes conceptuales ya existentes.

#### **4.2 Tendencias y aplicaciones de la enseñanza y aprendizaje de la trigonometría en la educación secundaria**

Según la National Council of Teachers of Mathematics (1992), el currículum de matemáticas básicas debe incluir el estudio de la Trigonometría para que todos los estudiantes sean capaces de aplicarlo en la resolución de problemas donde aparecen triángulos y explorar los fenómenos periódicos del mundo real usando las funciones seno y coseno en general; luego conocer la conexión que existe entre el comportamiento de las funciones trigonométricas y los fenómenos periódicos compuestos por dos movimientos, el pendular y el rectilíneo, que permita a los alumnos visualizar un movimiento periódico, aplicar técnicas generales de representación gráfica de funciones trigonométricas y el uso de sus propiedades en el estudio de las coordenadas polares, vectores, números complejos y series. Por ello, los estudiantes al finalizar la educación secundaria, deben estar en condiciones de hacer un estudio analítico de sus propiedades y gráficas, y estudiar las identidades que impliquen expresiones y funciones trigonométricas inversas, junto a su aplicación en la resolución de algunas ecuaciones trigonométricas.

Tanto para el estudio algebraico y analítico, como el análisis gráfico de las funciones trigonométricas a partir del punto extremo de un arco sobre una circunferencia unitaria. La

función coseno y seno (con dominio en los números reales) es posible de bosquejar a través de una máquina productora de la función seno y coseno, ver figura.



Transformación de los números reales en puntos sobre la circunferencia unitaria y estos en coseno y seno para luego definir la función: tangente, cotangente

**Figura.** Máquina productora de las funciones seno y coseno de  $\mathbf{R}$  en  $[-1, 1]$  Formalizando lo ilustrado, en la máquina de la figura, las funciones trigonométricas son susceptibles de ser definidas a partir de:  $E(\theta) = (x, y) \in \mathcal{C}_1(O)$ , con  $x^2 + y^2 = 1$ .

Las expresiones:  $x = \cos(\theta)$  e  $y = \text{sen}(\theta)$  para  $E(\theta) = (x, y)$  en  $\mathcal{C}_1(O)$ , para cada valor de  $\theta$  en  $\mathbf{R}$ , las coordenadas  $x$  e  $y$  se obtienen de manera única; es decir, definen las reglas de correspondencia de dos funciones.

1. **Función coseno:** Es la función que a cada  $\theta$  en  $\mathbf{R}$ , le hace corresponder la abscisa  $x$  de  $E(\theta) = (x, y)$  y se denota:  $\text{cos}:\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} / \theta \longrightarrow \text{cos}(\theta)$ , donde  $\text{cos}(\theta) = x$ ,
2. **Función seno:** Es la función que a cada  $\theta$  en  $\mathbf{R}$ , le hace corresponder la ordenada  $y$  de  $E(\theta) = (x, y)$  y se denota:  $\text{sen}:\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} / \theta \longrightarrow \text{sen}(\theta)$ , donde  $\text{sen}(\theta) = y$ .

Para el estudio de las funciones trigonométricas basta con definir las funciones coseno y seno, como abscisa y ordenada del extremo de un arco orientado en la circunferencia unitaria. Las otras funciones se definen en términos de estas dos, las mismas que potencian los cálculos algebraicos y representaciones gráficas dinámicas que permiten a los estudiantes percibir con facilidad sus variaciones como crecimiento, decrecimiento y valores que toman según el

cuadrante en que se ubique el punto extremo del arco. También es una oportunidad para reevaluar sus conocimientos de geometría y álgebra, a través de las representaciones, simbólica, gráfica y tabular de estas funciones.

## **5. Descripción de la metodología investigativa**

El tipo de investigación realizado se ubica en el enfoque mixto (cualitativa-cuantitativa), sustentado en la realización de actividades tanto para el profesor como para el alumno, donde cada uno cumple roles de acuerdo a un plan previamente establecido, con la finalidad de lograr aprendizajes más eficientes de los estudiantes. El proceso de investigación tuvo tres etapas bien marcadas y concatenadas: planificación y diseño de contenidos, proceso de implementación y desarrollo de actividades y, la de fijación y evaluación. El trabajo de campo de la experiencia se llevó a cabo durante el segundo semestre del año escolar en concordancia con el currículo escolar y estuvo a cargo del docente investigador. La aplicación de la propuesta se rige exclusivamente por las sesiones que se formulan a través de módulos con tratamiento personalizado; y es realizado por el docente a lo largo de todo el periodo de la intervención, orientando su trabajo diario de clase, la utilización de los recursos tecnológicos, principalmente para identificar algebraica y gráficamente propiedades de las funciones trigonométricas. Durante el diseño, recolección de información, análisis de datos, ejecución, y posterior evaluación de la propuesta.

## **6. Resultados y análisis**

### **6.1 Valoración de la propuesta desde la perspectiva de la investigación**

Entre las bondades de la propuesta didáctica para la enseñanza de las funciones trigonométricas con los estudiantes del nivel secundario, se pueden mencionar:

Desde el *punto de vista técnico-pedagógico*, teniendo como modelo nuestra propuesta, el profesor analiza la problemática de la enseñanza, diseña y elabora con antelación las estrategias didácticas para desarrollar el estudio del tema, entrega el material antes de abordar el tema, luego expone en forma breve y resumida el contenido temático; pone en práctica las etapas de motivación, conceptualización, ejemplificación, evaluación y extensión. En esta última se propicia el estudio personalizado y cooperativo del módulo didáctico para la resolución de problemas.

Desde *la temática*, el estudio de las funciones trigonométricas, permite conjugar los conocimientos de álgebra y geometría estudiados en grados inferiores, explotando al máximo el plano cartesiano. Donde, los alumnos hacen un estudio analítico de las funciones trigonométricas, identificando las diversas propiedades y los signos según los cuadrantes. Explotan la riqueza de sus propiedades que son necesarias para modelar y simular el comportamiento de los distintos fenómenos periódicos, que es el detonante actual del desarrollo de la ciencia y la tecnología.

Desde el *punto de vista tecnológico*, en el proceso experimental se hace uso pertinente de recursos, medios y materiales educativos, asimismo, se utilizan software matemáticos como Derive y Geogebra, para la representación algebraica y la construcción del gráfico de las funciones trigonométricas, las mismas que facilitan visualizar y asimilar sus diversas propiedades, motivando el aprendizaje interactivo personalizado.

## **6.2. Valoración de la estrategia desde la perspectiva del docente**

La aplicación de la estrategia didáctica fue satisfactorio para el docente investigador. Dentro de las valoraciones más importantes por parte del profesor destacan:

- Se percibe en la mayoría de los estudiantes el deseo y el interés de aprender el tema de funciones trigonométricas.
- Los estudiantes mostraron muy buena actitud para realizar actividades en forma individual y grupal. Los trabajos desarrollados por los estudiantes, en su mayoría reflejan buen nivel de aprendizaje del tema.
- La implementación de la propuesta didáctica desarrollada demanda tiempo en la planificación, diseño, elaboración, implementación y evaluación.
- Las expectativas de aprobación en las evaluaciones administradas por parte de los estudiantes fueron muy altas, porque la metodología de trabajo personalizado y colaborativo practicado fue recibida con agrado. Reduciéndose en forma significativa el número de reprobados en el estudio del tema.

## **6.3. Valoración de la estrategia desde la perspectiva de los estudiantes**

Para la evaluación se utilizaron varios instrumentos, una prueba de naturaleza cognitiva orientada a medir el nivel de comprensión del concepto de función trigonométrica y sus

aplicaciones; otro relacionado a una valoración de la percepción de las actividades en clase por parte de los estudiantes, también una lista de cotejo para evaluar actitudes. Desde los instrumentos aplicados y el análisis estadístico los resultados en los tres niveles de aprendizaje considerados, fue:

**En el nivel conceptual;** el análisis de los datos recogidos del cuestionario de la prueba de inicio, de proceso y de salida, indican que los estudiantes han asimilado en forma significativa los conceptos referidos a las funciones trigonométricas, tienen conocimiento casi pleno de sus propiedades, identifican la función a partir de su gráfica; haciendo que los ítems de la prueba correspondiente a este rubro hayan sido respondida de manera correcta en más del 85%. Los resultados obtenidos indican que se tuvo un aprendizaje significativo en el estudio teórico, algebraico y gráfico de las funciones trigonométricas.

**En el nivel procedimental;** los estudiantes consolidan sus destrezas de análisis y síntesis en el desarrollo de problemas, asimilan las propiedades de las funciones trigonométricas, las relaciones entre ellas y los representan con solvencia en forma gráfica. En los ítems del cuestionario aplicado a este rubro, lo desarrollaron con eficiencia en más del 90%, el mismo que indica que la estrategia didáctica es pertinente para el desarrollo de habilidades procedimentales en los estudiantes.

**A nivel actitudinal;** en las clases donde se trabajó con esta propuesta didáctica, los estudiantes se mostraron motivados y con deseos de aprender. Los hallazgos indican que la estrategia utilizada ayuda a desarrollar en los estudiantes los hábitos de comunicación y la realización de actividades colaborativas en el proceso; en la encuesta aplicada, el 90%, considera estar muy de acuerdo con la estrategia didáctica empleada en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las funciones trigonométricas. También el nivel de satisfacción individual y grupal es considerable.

## **7. Conclusiones**

Los resultados ofrecidos por la investigación nos indican que la enseñanza modular-personalizada evidenció una comprensión eficiente de los conceptos de trigonometría durante la intervención, es decir, el estudio de las funciones trigonométricas a partir de puntos en la circunferencia unitaria del plano cartesiano y considerando conocimientos previos de geometría y álgebra elementales, es una alternativa a la enseñanza usual de la trigonometría



como razones entre los lados de un triángulo rectángulo, donde algunos conceptos, propiedades, representaciones gráficas, resultan insuficientes y poco consistentes.

La estrategia didáctica empleada permite la interacción directa profesor y alumno, facilitando el desarrollo de capacidades de intuición, de abstracción y de razonamiento, relacionando con situaciones reales y con aplicaciones en la solución de problemas, propiciando el aprendizaje activo. Además posibilita la traducción del lenguaje literal al algebraico y al gráfico haciendo uso de software matemático, poniéndose en práctica los procedimientos viables para el aprendizaje. Los logros obtenidos en el aprendizaje de las funciones trigonométricas, fueron de satisfactorios para el estudiante y el docente.

### Referencias bibliográficas

- Barnett, R. (1995). *Precálculo. Álgebra geometría analítica y trigonometría*. México D.F.: Editorial Limusa S.A.
- Conselho Nacional de Profesores de Matemática (1970). *La Revolución de las Matemáticas Escolares*. Washington: OEA.
- De Guzman, M. & GIL, D. (1993). *Enseñanza de las ciencias y la Matemática. Tendencias e innovaciones*. Madrid: Editorial popular, S.A.
- Gómez, P. (1996). *La Problemática de las Matemáticas Escolares*. Bogotá: Iberoamericana.
- National Council of Teacher of Mathematics (1992). *Estándares curriculares y evaluación educativa para la educación matemática (NCTM)*, USA: Federación de profesores de matemática.
- Nichols, E. (1974). *Trigonometría Moderna*. México: Editorial Continental.
- Olivares, M. (1979). *Didáctica de la Matemática Moderna*. Editorial Oasis S.A.
- Piaget, J.; Choquet, G. & Dieudonne, J. (1986). *La enseñanza de las matemáticas modernas*. Madrid: Alianza Editorial.
- Rico, L. (1995). *Consideraciones sobre el currículo escolar de matemáticas*. Revista EMA 1995, Vol. 1, N° 1, 4-24. Recuperado de [http://funes.uniandes.edu.co/984/1/1\\_Rico\\_Consideraciones\\_RevEMA.pdf](http://funes.uniandes.edu.co/984/1/1_Rico_Consideraciones_RevEMA.pdf). Consultado 15/06/2014.
- Santaló, L. & Llinares, S. (1994). *La enseñanza de las matemáticas en la educación Intermedia. Tratado de educación personalizada*. Madrid: Rialp, S.A.