LA COMPRENSIÓN MATEMÁTICA DESDE LA TEORÍA "APOS": EL CASO DE LA INTEGRAL DEFINIDA DE RIEMANN

Eliécer Aldana Bermúdez
eliecerab@uniquindio.edu.co
Universidad del Quindío, Colombia

Tema: I.4 - Pensamiento Matemático Avanzado.
Modalidad: Comunicación Breve
Nivel: Terciario - Universitario
Palabras claves: Integral, comprensión, esquema, nivel.

Resumen.
Esta investigación trata de la comprensión del concepto de integral definida en estudiantes universitarios. A partir del estudio de libros de texto se identifican los elementos matemáticos que configuran el concepto, y se establece una descomposición genética del concepto desde la teoría "APOS". Para ello se utiliza un cuestionario, una entrevista y un mapa conceptual que permitieron triangular la información, el análisis se hizo a partir de las relaciones lógicas que se establecen entre los elementos matemáticos dados en diferentes sistemas de representación. Los resultados permiten concluir el tipo de relaciones lógicas utilizadas por los sujetos y los elementos que utilizan en cada nivel y cómo lo hacen, lo que permitió asignarles un nivel de desarrollo del esquema del concepto desde los instrumentos teóricos del conocimiento.

1. Identificación de problema

El aprendizaje del concepto de la integral definida, presenta dificultades para los estudiantes que se manifiestan por la utilización mecánica, algorítmica y memorística de su definición; no logran establecer una conexión entre el pensamiento numérico, algebraico, geométrico y analítico; tienen problemas para interpretar las gráficas de áreas bajo curvas cuando la gráfica de la función pasa de ser positiva a ser negativa o presenta discontinuidades; en otros casos piensan la integral sólo asociada al concepto de área pero aislada de otros contextos; y tienen dificultades para aplicar las propiedades de la Integral Definida. En este sentido, se hace un estudio de libros de texto y se concluye que los elementos matemáticos que configuran el concepto matemático son: El área como aproximación, (ACA); el área como límite de una suma, (ALS) la Integral Definida, (LID); las propiedades de la integral definida, (PID), y los teoremas fundamentales y del valor medio, (TFV), Aldana (2011, p: 36).
Los resultados obtenidos acerca de este concepto, reflejan una ausencia de comprensión por parte de los alumnos. Asímismo, Orton (1983) comprueba que los alumnos son capaces de realizar cálculos algebraicos en los que intervienen las integrales pero no son capaces de comprender el papel del límite en la definición de este concepto y no dotan de significado a los símbolos que se utilizan en los cálculos. Mundy (1984) presenta el análisis de un cuestionario en el que los alumnos debían evaluar integrales como $\int_{-3}^{3} |x+2|\,dx.$, pero obtuvo un número reducido de respuestas correctas. Por su parte Calvo (1997) observa que los alumnos identifican la Integral Definida con el cálculo de áreas por lo que si la integral es negativa tienden a cambiar el signo. Rasslan y Tall (2002), exploran la imagen del concepto (Vinner, 1991) de Integral Definida que tienen los estudiantes de bachillerato mediante un cuestionario, y concluye que pocos alumnos responden correctamente las preguntas y sugieren introducir este concepto desde las

experiencias previas de los alumnos. Para otros investigadores como Czarnocha et al. (2001) es esencial la coordinación entre el esquema visual de la suma de Riemann y el esquema de los límites de la secuencia numérica para el desarrollo de una comprensión del concepto de Integral Definida. Para conocer si los estudiantes llegan a una comprensión del concepto de Integral Definida y no una percepción empírica de la integración, Paschos et al. (2006) hicieron un estudio de caso sobre la abstracción reflexiva en la construcción del concepto, con una estudiante universitaria. Además, Turégano (1994) propone como alternativa enseñarla utilizando la génesis histórica del concepto, comenzado con el concepto de integral de forma independiente de la diferenciación y como primera introducción al límite. Desde un análisis epistemológico del concepto de integral y, de las aportaciones de Cavalieri, Wallis y Roberval, Czarnocha, et al. (2000) diseñan una instrucción para universitarios y concluye que muestran una visión diferente que la desarrollada por la instrucción habitual. Depool (2004) utiliza las tecnologías para desarrollar la comprensión del concepto en universitarios y define un modelo de competencia cognitivo de la Integral. Asimismo, Camacho et al. (2008), utilizan software en un curso de ingeniería para ayudar a los alumnos a comprender los conceptos de partición, refinamiento, aproximación y límite.

2. Marco teórico

El marco teórico en el que se ha desarrollado esta investigación es la teoría “APOE”, desarrollada por Dubinsky (1991), para ser aplicada al Pensamiento Matemático Avanzado. Desde esta perspectiva teórica del conocimiento matemático, Dubinsky (1991) y Asiala et al. (1996) consideran que los sujetos realizan construcciones mentales denominadas: acciones, procesos, objetos y esquemas y se logran mediante diferentes mecanismos como: interiorización, coordinación, inversión, encapsulación, desencapsulación, **y** tematización. El refuerzo de la teoría APOE con los tres niveles de desarrollo del esquema propuestos por Piaget y García (1982), ha llevado a mejorar la comprensión del concepto de esquema. DeVries (2001), caracteriza los niveles de desarrollo de un esquema como: **i**ntra, cuando sólo se identifican aspectos individuales aislados **í**nter, se caracteriza por la construcción de relaciones y **t**rans se adquiere cuando se tiene construida una estructura completa, las relaciones descubiertas en el ínter son comprendidas dando coherencia al esquema. El primer paso para llegar a comprender un concepto matemático tiene que ver con la descomposición genética, descrita en la teoría APOE de Asiala et al., (1996).

3. Metodología

Esta investigación se realizó en Colombia con estudiantes de tercer año de Licenciatura de Matemáticas que estudian por primera vez el concepto de la Integral Definida. Para diseñar los instrumentos se llevó a cabo una revisión de diferentes libros de texto que incluyen el concepto para determinar los elementos matemáticos que configuran la integral y establecer una descomposición genética previa de concepto. Luego, se diseñó un precuestionario que fue analizado por expertos en Didáctica del Análisis y aplicado de forma experimental. A partir del informe de los expertos y de los resultados de los alumnos se hizo el cuestionario definitivo que fue contestado por once alumnos. Posteriormente se diseñó y aplicó un guión de entrevista semiestructurada (Ginsburg et al., 1983) con el objetivo de describir y explicar el nivel de desarrollo del esquema de Integral Definida de cada alumno. Finalmente, los alumnos realizaron un mapa conceptual, sobre el concepto de Integral Definida.

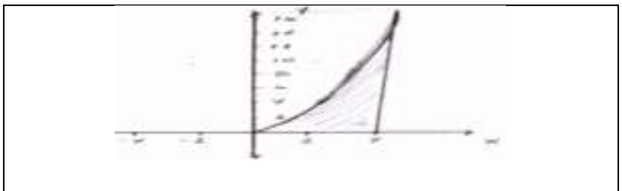
4. Análisis y resultados

El análisis se realizó utilizando conjuntamente los tres instrumentos: cuestionario, entrevista y mapa conceptual.

*Nivel intra 1***.** En este subnivel los alumnos no son capaces de establecer ninguna relación lógica entre los elementos matemáticos, recuerdan los elementos de memoria y muestran dificultad para utilizarlos en la resolución de las tareas, utilizan elementos matemáticos sólo en las formas de representación **G** y **A** mostrando concepciones erróneas y resuelven algunas tareas de forma incorrecta. Por ejemplo A5, en la tarea 3.

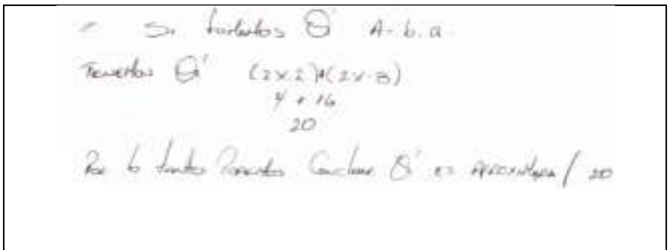
Sea R la región entre la gráfica de la función $f(x)=x^2$ y el Intervalo [0,4.
Utiliza particiones para aproximar el valor del área de la región R.
Justifica tu respuesta.

Este alumno representa de forma **G** la función:



A5, representación G de la tarea 3 del cuestionario

Aunque hay un intento de utilizar el elemento matemático **ACA** de forma **G** porque dibuja la función, no logra hacer ningún tipo de aproximación utilizando éste elemento matemático. Recurre a un cálculo algebraico **A** utilizando el elemento matemático **ACA**, para obtener unos valores aproximados.



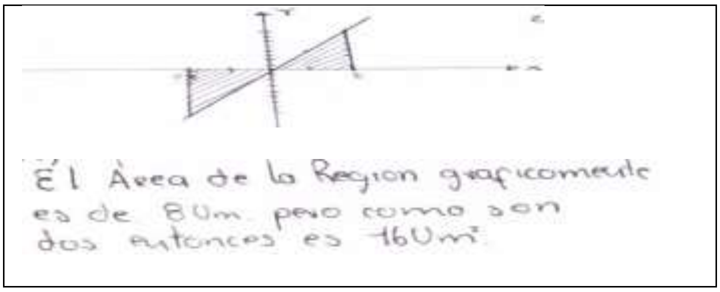
A5, resolución A de la tarea 3 del cuestionario

Para ello, subdivide el intervalo en dos subintervalos de longitud de la base 2 unidades cada uno y, para cada uno de ellos, calcula el área aplicando la fórmula del área de un rectángulo, uno de ellos de altura 2 y otro de altura 8. No hay coordinación entre los cálculos algebraicos y la representación gráfica puesto que las alturas no se corresponden con ninguna figura geométrica que haya representado en la gráfica y tampoco se corresponden con los puntos por los que pasa la curva. Durante la entrevista, cuando se le pregunta por los cálculos que realizó en el cuestionario, no es capaz de establecer un razonamiento lógico que los justifique.

*Nivel intra***.** En este nivel, los alumnos suelen utilizar algún intento de conjunción lógica entre elementos matemáticos, recordar elementos matemáticos inconexos de forma aislada y utilizarlos en la resolución de las tareas y no tener sintetizados los modos de representación especialmente el **AN**. Por ejemplo A4, en la tarea 2:

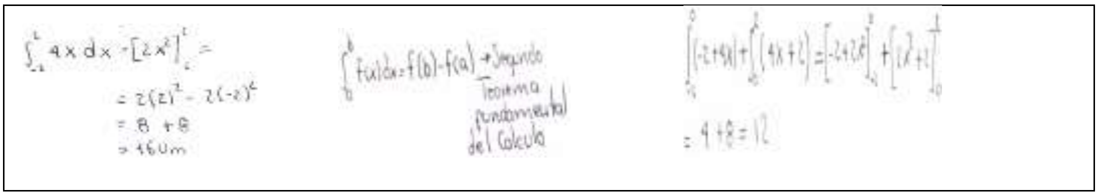
Sea **R**, la región encerrada por el gráfico de la función $f(x) = 4x$ y el eje x, en el intervalo $[-2, 2]$.
a. Dibujar la gráfica. b. Calcular gráficamente el área de la región R.
c. Calcular la $\int_{-2}^{2} 4x\ dx$. d. ¿Son iguales los dos resultados anteriores? Justificar cada paso.

Esta alumna representa gráficamente la función para calcular gráficamente el área.



A4, representación G de la tarea 2 del cuestionario

Ha utilizado el elemento matemático **ACA** de forma **G**, porque traza la gráfica de la función, forma dos triángulos rectángulos simétricos, uno sobre el eje x y el otro bajo el eje x, calcula el área de un triángulo y como los triángulos son iguales la duplica y obtiene el área total. Cuando se le plantea calcular la integral, esto es lo que hace:



A4, resolución A de la tarea 2 del cuestionario

Justifica el procedimiento afirmando que aplica el elemento matemático **TFV** y luego hace otro cálculo de la integral de forma errónea aplicando el elemento **LID,** concretamente la integración de funciones positivas y negativas, porque lo que hace esta alumna es sumar incorrectamente a cada integrando los extremos del intervalo $[-2, 2]$ de integración. En el protocolo explica cómo resolvió la tarea:

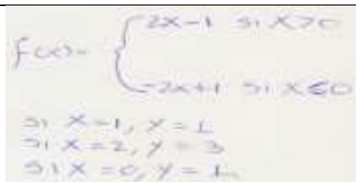
> *A4:…..le di valores a la* x*, para poder hallar la recta y dibujarla… El área del triángulo es base por altura sobre 2, luego tengo de base 2 y de altura 8, entonces dos por ocho 16 y dividido entre 2, ocho. Como tengo otra figura igual, es sólo multiplicar por 2 y obtengo las 16 unidades cuadradas.*
> *I: ¿El área bajo el eje OX es igual que la que está por encima del eje OX?*
> *A4: No, es igual pero con signo contrario. Las áreas son siempre positivas.*

Demuestra que es capaz de el área de forma **G** a partir del área de dos triángulos de los que conoce sus dimensiones pero, cuando se le pregunta si el área que está por encima del eje OX es igual al área que está por debajo del eje OX son iguales, se contradice porque dice que son iguales pero de signo contrario y afirma que las áreas deben ser positivas.

Nivel ínter 1. En este subnivel de desarrollo del esquema del concepto es característico que el sujeto sea capaz de usar la conjunción lógica (y lógica) de forma correcta entre elementos matemáticos dados en el mismo sistema de representación; recordar algunos elementos matemáticos gráficos, algebraicos y/ o analíticos, y tener esbozo de síntesis de los sistemas de representación gráfico y algebraico. Por ejemplo A7, en la tarea 4.

Calcular el área limitada por la gráfica de la función $f(x)=\lvert 2x-1\rvert$, en el intervalo $[0, 2]$ y el eje x Justificar la respuesta.

En el cuestionario, para poder representar la función, este alumno analiza los valores que toma según que sea positiva o negativa la función $2x-1$, aunque en el se confunde entre las abscisas y las ordenadas y considera los casos en que x sea positivo o negativo.

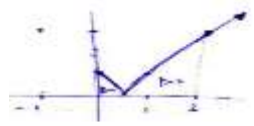


A7, representación A de la tarea 4 durante el cuestionario

En la entrevista recuerda del valor absoluto de x, y aplica al valor absoluto de $2x-1$.

> *A7: El valor absoluto de esa función, habría que redefinirla, como la función va a valer* $2x-1$*, si* x *es mayor que 0 y va a valer* $-(2x+1)$*, si* x *es menor o igual a 0.***(A7E4).**

Para representar gráficamente la función, da valores a x para obtener valores de y.



A7, representación G de la tarea 4 del cuestionario

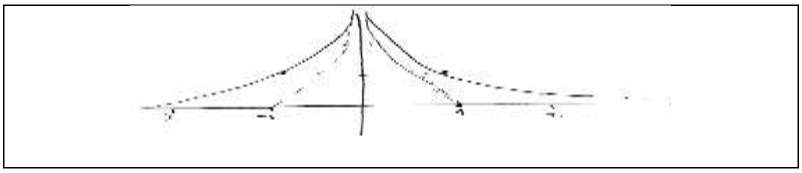
Una vez representada gráficamente la función calcula el área limitada por la gráfica relacionando varios elementos matemáticos de forma **A**, logra calcular el área y establece una conjunción entre los elementos **ACA, LID, PID y TFV**, de forma **A**.

Nivel ínter. En este nivel hay los sujetos establecen entre los elementos gráficos, algebraicos y analíticos y lo hacen con más frecuencia. Los sujetos usan diferentes relaciones lógicas entre elementos matemáticos de forma correcta salvo alguna excepción (generalmente en el mismo sistema de representación), recuerdan los elementos matemáticos necesarios en la resolución de una tarea en varios sistemas de representación y tienen esbozo de síntesis de los sistemas de representación gráfico, algebraico y/o analítico. Por ejemplo A2, en la tarea 7c.

Decidir si la afirmación es verdadera o falsa. En caso de ser falsa, explicar por qué o mostrar un

contraejemplo. $\int_{-1}^{1} x^{-2}\,dx = \left[-x^{-1}\right]_{-1}^{1} = (-1) - 1 = -2$

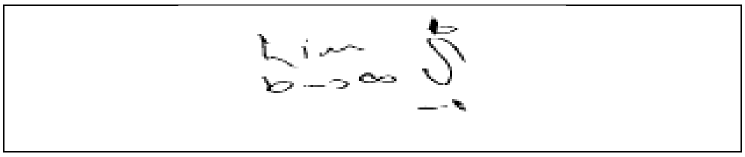
Durante la entrevista este alumno hace una representación **G** de la función:



A2, representación G de la tarea 7c durante la entrevista

Esto le permite visualizar cuándo es discontinua la función:

I: ¿Cuál es el razonamiento que hace acerca de la proposición 7c?
A2: Es discontinua. En cero. No se puede aplicar. Se resolvería como una integral impropia, porque la integral es impropia. Porque presenta una discontinuidad infinita, si es impropia. Uno de sus límites es infinito o el integrando presenta una discontinuidad de tipo infinito.



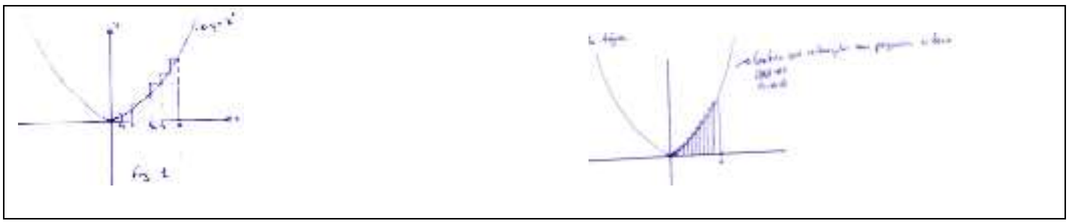
A2, representación A de la tarea 7c durante la entrevista

Comprende los elementos matemáticos necesarios, responde y justifica correctamente el valor de falsedad de la afirmación, establece una relación de **conjunción lógica** entre los elementos matemáticos **LID** y **TFV** cuando considera que la función es discontinua y no cumple las condiciones necesarias para poder aplicar la regla de Barrow. Intenta plantear una integral impropia de forma **AN** para mostrar cómo se podría calcular la integral.

Nivel trans. En el nivel de desarrollo trans del esquema de Integral Definida el sujeto suele usar diferentes relaciones lógicas (conjunción lógica, condicional y la contraria de la condicional) entre los elementos matemáticos de forma correcta; suele recordar los elementos matemáticos necesarios en la resolución de la tarea usando los significados implícitos para tomar decisiones, y muestra tener síntesis en los sistemas de representación gráfico, algebraico y analítico. Por ejemplo A11, en la tarea 3:

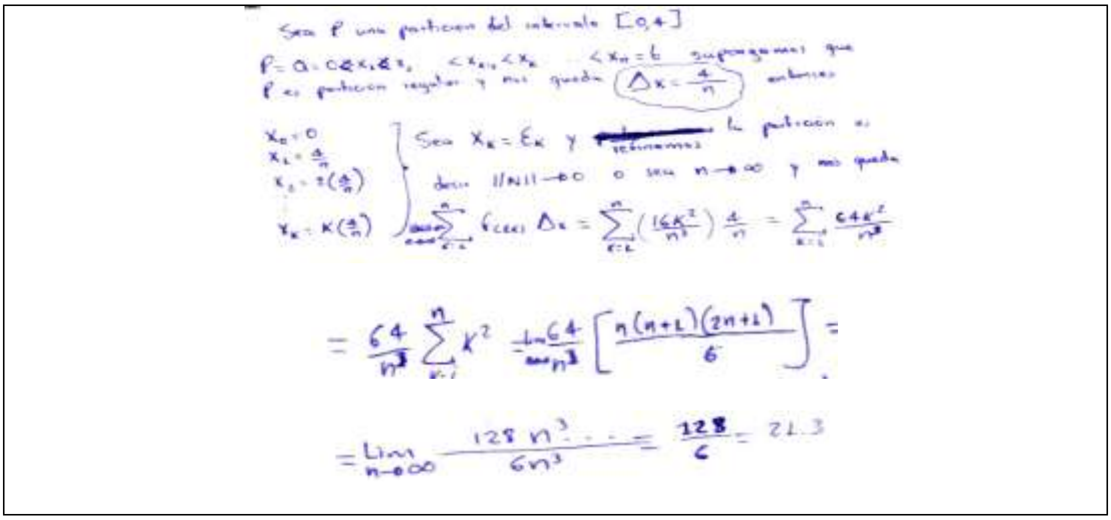
Sea R la región entre la gráfica de la función $f(x)=x^2$ y el Intervalo [0,4] -Utiliza particiones para aproximar el valor del área de la región R. -Justifica tu respuesta.

Este alumno trata de rellenar el área por medio de rectángulos de forma **G**:



A11, representación G de la tarea 3 del cuestionario

Divide el intervalo mediante una partición regular, por lo que está utilizando el elemento **ACA** de forma **G**. En la figura de la izquierda traza 5 rectángulos superiores y en la figura de la derecha traza rectángulos superiores para aproximar el área, afirmando que "*la gráfica representa rectángulos más pequeños y la norma de la partición tiende a cero, entonces n tiende a infinito"* por lo que se podría deducir que tiene la intuición de indivisibles en relación con el área de la figura de la derecha. Luego resuelve la tarea de la siguiente forma:



A11, resolución A y AN de la tarea 3 del cuestionario

El alumno establece una relación entre la representación **G** y los sistemas de representación A y **AN** de los elementos **ACA** y **ALS** porque, a partir de las graficas calcula las sumas de Riemann y les aplica el límite para obtener el valor del área.

> I: ¿Sabría comentarme cómo ha resuelto la tarea?
> A11: … entiendo por partición como coger un intervalo y dividirlo en un conjunto de $n-1$ puntos, donde esos puntos van a ser mayores que el extremo izquierdo, pero menores que el extremo derecho del intervalo, entonces lo que hice fue suponer que los puntos van a ser x_1, x_2 y que todos estos valores eran mayores que "a" , que era en este caso cero, que era el extremo izquierdo del intervalo y que todos esos puntos eran menores que "b", eso es lo que entendía como particionarr, que es que la longitud de cada intervalo sea la misma. Después de eso lo que hice fue aplicar la definición de integral definida y la suma de Riemann.

Utiliza las sumas de Riemann y aplica el límite para establecer conexión con la **LID**. Establece relación entre los elementos **ACA** y **LID** porque menciona el concepto de área como una aproximación y el concepto de área como una Integral Definida.

5. Conclusiones

En el desarrollo del esquema en el nivel INTRA 1**,** el estudiante no es capaz de establecer relaciones lógicas entre los elementos matemáticos que aplica en la resolución de las tareas y cuando se produce un indicio de relación lógica lo hace de forma incorrecta. En el nivel INTRA se evidencia un intento de conjunción lógica, aunque de manera inconclusa. De forma progresiva en los niveles INTER 1, INTER y TRANS se incrementan las relaciones lógicas, se establece la conjunción, la condicional y la relación del contrario de la condicional. En los sistemas de representación, algunos tienen dificultades para coordinar los sistemas de representación y establecer síntesis.

6. Referencias bibliográficas

Aldana, E. (2011). Comprensión del concepto de integral definida en el marco de la teoría "APOE". Tesis doctoral Universidad de Salamanca España.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Development in Ungraduate Mathematics education. *Research in Collegiate Mathematics Education, 2,* 1 – 32**.**

Calvo, C. (1997). *Bases para una Propuesta Didáctica sobre Integrales.*Tesis de Maestría. Universitat Autónoma de Barcelona

Camacho, M., Depool, R. y Sabrina, G. (2008). Integral Definida en diversos contextos. Un estudio de casos. *Educación Matemática, 20, 3,* 32-57.

Czarnocha, B., Dubinsky, E., Loch, S., Prabhu, Vrunda. y Vidakovic, D. (2000). Conceptions of Area: In Students and in History. *College Mathematics Journal, 32, 2,* 99-109.

Depool, R. A. (2004). *La Enseñanza y Aprendizaje del Cálculo Integral en un Entorno Computacional. Actitudes de los Estudiantes Hacia el uso de un Programa de Cálculo Simbólico (PCS).* Tesis Doctoral. Universidad de La Laguna.

DeVries, D. J. (2001). RUMEC / APOS Theory *Glossary. Georgia Collage & State University.Milledgeville.http://www.cs.gsu.edu/~rumec/Papers/glossary html*. [Disponible el 18 de agosto de 2008]

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking, En D. Tall. (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Ginsburg, H. P., Kossan, N. E., Schwartz, R. y Swanson, D. (1983). *Protocol Methods in Research on Mathematical Thinking***.** In H. P. Ginsburg (Ed.): The Development of Mathematical Thinking. New York: Academic Press.

Mundy, J. (1984). Analysis of Errors of First Year Calculus Students. En Bell, A., Low, B., y Kilpatrick, J., (Eds.). *Theory Research and Practice in Mathematics Education.* Proceedings, ICME 5. Adelaide, Working group reports and collected papers, Shell Center. Nottingham. 170-172.

Orton, A. (1983). Students` Understanding of Integration. *Educational Studies in Mathematics.* D. Rediel Publishing Company. Dordrecht: Holland/Boston: U.S.A. *14, (1),* 1 – 18.

Paschos, Th. & Faumak, V. (2006). The reflective abstraction in the construction of the concept of the definite integral. A case study. En J. Novotna; H. Moraova; M. Kretke; N. Stehlikova (eds.) *Proceedings of the 30th Conference of Internacional Group for the Psychology of Mathematics Education,* (Vol. 4, pp. 337-344). Prague: Czech Republic.

Piaget, J.; García, R. (1982). *Psicogénesis e Historia de la Ciencia*. México, España, Argentina, Colombia. (Madrid): Siglo XXI.

Rasslan, S. y TalL, D. (2002). Definitions and Images for the Definite Integral Concept. *Proceedings of the 26th PME. 4,* 89-96.

Turégano, P. (1994). *Los Conceptos en Torno a la Medida y el Aprendizaje del Cálculo Infinitesimal.* Tesis Doctoral. Universitat De València.

Vinner, S. (1991). The Rol of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. En D. Tall. (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking, 66-81.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.