ANÁLISE LOCAL E CONSTRUÇÃO DO GRÁFICO DE CURVAS PARAMETRIZADAS: UM ESTUDO DE CASO

Francisco Regis Vieira Alves
fregis@ifce.edu.br
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará

Tema: Pensamento Matemático Avançado
Modalidad: CB
Nivel educativo: Terciário – Universitário
Palabras clave: Curvas parametrizadas, Análise local, Estudo de Caso, Ensino.

Resumen
Nos cursos de Cálculo a Várias Variáveis no Brasil, o conteúdo de curvas parametrizadas constitui uma parte standard. Estudos especializados indicam as dificuldades enfrentadas pelos estudantes no entendimento desta noção e das propostas de abordagem metodológicas sugeridas. Assim, desenvolvemos um estudo de caso, em caráter exploratório e, de natureza empírica, com vistas ao entendimento do seguinte fenômeno: o processo de investigação, por parte dos alunos, no contexto de tarefas que exigem a construção de curvas parametrizadas no plano, com uma ação mediada pelos softwares Geogebra e CAS Maple. Assim, no ano de 2012, contamos com a participação de 5 alunos, na disciplina Cálculo III. Realizamos entrevistas semiestruturadas, imagens e protocolos escritos pelos estudantes. No rol dos dados oriundos da pesquisa de campo, sublinhamos: os alunos apoiaram sua ação com recurso aos gráficos gerados pelos dois softwares; a atividade dos aprendizes não se restringiu apenas à aplicação de técnicas algoritmizadas; a visualização desempenhou papel fundamental na identificação de propriedades gráfico-geométricas.

1. Introdução

No rol das curvas parametrizadas, registramos curvas que mereceram atenção e se tornaram objeto de investigação por parte de muitos matemáticos no passado, diante da possibilidade de resolução de certos problemas (Edwards, 1969, p. 263). De modo *en passant*, podemos citar na classe das curvas cicloidais, a astroide a qual foi descoberta por Roemer, em 1674. Duas gerações se interessaram pela mesma em 1725 (Yates, 1947, p. 1) parametrizada por $\alpha(t)=(a\cdot\cos^3(t), a\cdot sen^3(t))$, com $a>0$.

A cardióide descrita por $\alpha(t)=(a\cdot(2\cos(t)-\cos(2t)), a\cdot(2sen(t)-sen(2t)))$ também estudada por Roemer, conforme Yates (1947, p. 5). A cissóide foi objeto de investigação por Diocles, entre 250-100 antes de Cristo. Suas equações cartesianas são do tipo $y^2=x^2(2b-x)/\left(x-2(a+b)\right)$, enquanto que sua parametrização é dada por $\alpha(t)=\left(2\left[b+(a+b)t^2\right]/\left(1+t^2\right), 2\left[bt+(a+b)t^3\right]/\left(1+t^2\right)\right)$ (YATES, 1947, p. 27).

A conchoide de Nicomedes, aproximadamente 225 antes de Cristo, foi utilizada num problema envolvendo a determinação da razão proporcional entre dois segmentos. Uma de suas variantes é conhecida como Limaçon de Pascal que, na verdade, é uma Conchóide de um círculo (Yates, 1947, p. 30). Em equações cartesianas, a conchóide de Nicomedes é descrita pela seguinte expressão $\left(x^2+y^2\right)\left(y-a\right)^2=k^2 \cdot y^2$.

Por fim, recordamos o caso da Ciclóide, concebida por Mersenne e Galileu Galilei em 1599, estudada também por Roberval, Decartes, Pascal e Wallis (Yates, 1947; Edwars, 1969). Suas equações cartesianas são da forma $x=a\left(t-sen(t)\right)$ e $y(t)=a\left(1-\cos(t)\right)=2a\cdot sen^2\left(t/2\right)$. E também a deltóide, cuja descrição paramétrica é dada por $\alpha(t)=\left(b(2\cos(t)+\cos(2t)),b(2sen(t)-sen(2t))\right)$, como indica o mesmo autor.

Essa pequena digressão histórica é fortuita no sentido de envidar um ponto de vista, segundo o qual, a dimensão histórica desempenha papel fundamental para o nosso entendimento da Matemática contemporânea e pode impulsionar o raciocínio heurístico em sala de aula. Hodiernamente, encontramos trabalhos que apontam indicadores profícuos no âmago da atividade de investigação, apoiadas em *softwares* de computação algébrica (Filler, 2011; Pereira, 2007) desenvolvida por estudantes na academia.

2. Sobre a abordagem do conteúdo de curvas parametrizadas no Brasil

Doravante, discutiremos ainda várias noções relacionadas e necessárias para a construção de certas curvas parametrizadas e sua análise local. Tais noções podem ser encontradas nos livros de Cálculo consultados (Guidorizzi, 2010; Stewart, 2001). Deste modo, vamos considerar uma curva $\alpha(t)=(x(t),y(t))$ definida $\alpha: I\subset IR\to IR$. Daí, podemos considerar na equação $y=f(x)\therefore y(t)=f(x(t))$. Pela Regra da Cadeia, escrevemos ainda que $y'(t)=f'(x(t))\cdot x'(t)\therefore f'(x(t))=f'(x)=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$. Por motivos operacionais, introduziremos a seguinte notação $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}$ (*). Com base em (*), descreveremos, matematicamente, a existência de retas tangentes horizontais $(dy/dt=0$ e $dx/dt\neq 0)$ e tangentes verticais $(dy/dt\neq 0$ e $dx/dt=0)$ ao traço da curva no IR^2. No que segue, consideramos também $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=\dfrac{d/dt\left(dy/dx\right)}{dx/dt}$ (**).

Nessa ultima relação em (**), descreveremos o comportamento (pelo estudo do sinal) da concavidade do traço da curva. Acrescemos as definições de assíntotas ao traço determinado por uma curva parametrizada. Nesse sentido, quando tivermos a condição $\begin{cases} \lim_{t \to a} x(t) = \pm\infty \\ \lim_{t \to a} y(t) = b \in IR \end{cases}$ para uma reta assíntota horizontal (A.H.), de equação $y = b$. E, quando ocorrer $\begin{cases} \lim_{t \to a} x(t) = c \in IR \\ \lim_{t \to a} y(t) = \pm\infty \end{cases}$ para uma reta assíntota vertical (A.V.), de equação $x = c$. Podemos ainda determinar uma reta assíntota obliqua ao traço da curva, de posse da seguinte verificação $\begin{cases} \lim_{t \to a} \dfrac{y(t)}{x(t)} = b \in IR^* \text{ e } \lim_{t \to a} [y(t) - b \cdot x(t)] = c \in IR \therefore y = bx + c \end{cases}$ (A.O.).

3. Metodologia e procedimentos

O estudo desenvolvido no segundo semestre de 2012, no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará – IFCE se apoiou em um *design* de investigação (Ponte, 1994, p. 4) de cunho qualitativo. Nesta modalidade, "a fonte direta de dados foi o ambiente natural e o investigador o instrumento principal." (Bogdan & Biklen, 1994, p. 47). De caráter descritivo e exploratório, nossa investigação considerou dados oriundos de entrevistas semi-estruturadas realizadas ao decorrer de uma atividade, fotos, gravações de áudio (com o *software Cantasia*) e os protocolos das atividades produzidos por cinco sujeitos (alunos 1, 2, 3, 4 e 5).

Cabe acrescentar que este grupo de (cinco) alunos cursava, há época, o 4º semestre do curso de Licenciatura em Matemática (em 2012) e, na disciplina Cálculo III, já detinham todo o conhecimento formal que os qualificava para a resolução da atividade que doravante apresentaremos. Tendo em vista, pois, do nosso interesse de compreender um determinado fenômeno, num contexto determinado e um assunto particular, o tipo de estudo escolhido foi o estudo de caso (Bogdan & Biklen, 1994, p. 89).

Assim, diante de alguns entraves relatados e sintetizados a partir de uma análise preliminar em livros de Cálculo (já mencionados), estruturamos e concebemos algumas atividades (envolvendo discussão em grupo) que permitem um percurso investigativo negligenciado por esses autores (com ênfase na visualização), além de buscar a superação dos mesmos. Antes da apresentação dos dados, indicamos as seguintes tarefas: Tarefa (I): Considerando o traço relativo à curva conhecida por *tactriz* descrita por $\alpha(t) = (\cos^3(t), sen^3(t))$. Decidir e identificar a posição e a quantidade de vetores paralelos aos eixos coordenados e quanto à existência de pontos de cúspide. Com o uso de alguns comandos básicos do *Geogebra* podemos manipular e estudar a curva.

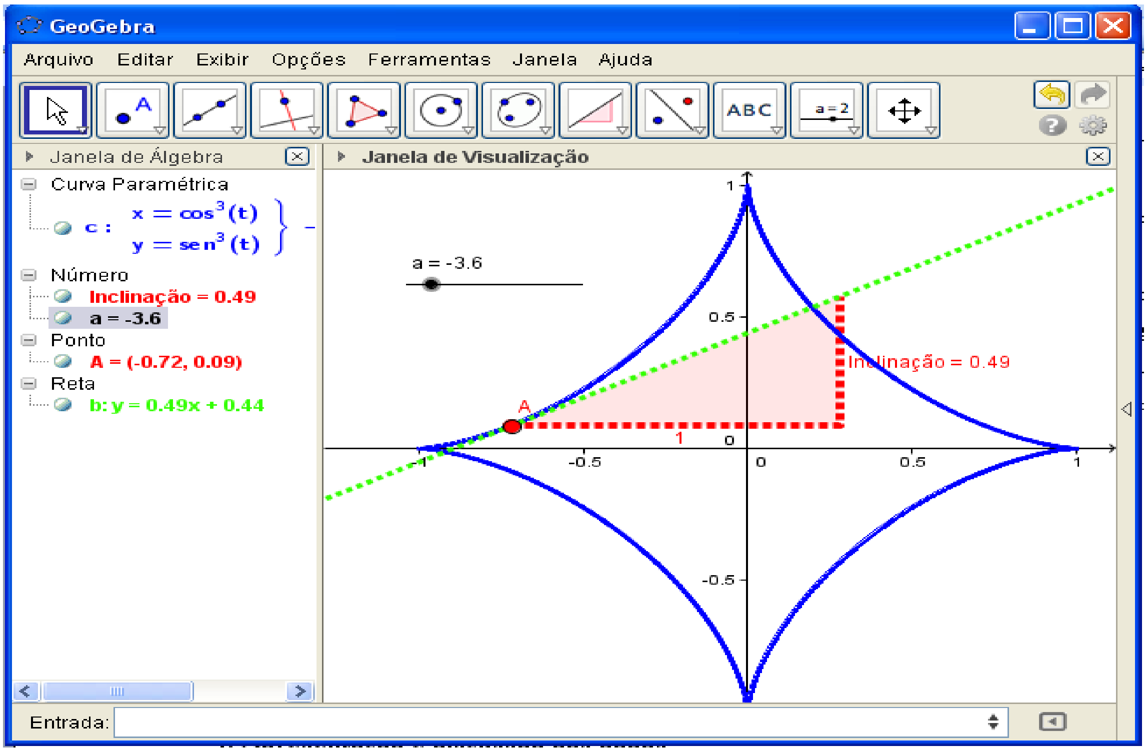


Figura 1. Com o *software Geogebra* possibilitamos a exploração e manipulação da atividade (I)

Tarefa (II): Apresentamos o traço, na tela do computador, determinados pela seguinte parametrização $\beta(t)=\left(t/(1+t^4),t^3/(1+t^4)\right)$. Nesta atividade, os alunos devem identificar as mudanças qualitativas no traço da curva, na medida em que realizamos movimentos de rotação da trajetória, em relação à origem. No próximo segmento, apresentamos os dados e sua discussão.

4. Apresentação e discussão dos dados

Nessa seção apresentamos e analisamos os dados produzidos pelos cinco participantes, ao decorrer da resolução de três atividades propostas em sala de aula. Na figura 2, patenteamos as atividades de exploração, desenvolvidas pelo aluno 1, no sentido de identificar e analisar o comportamento de vetores tangentes ao traço de *tactriz*.

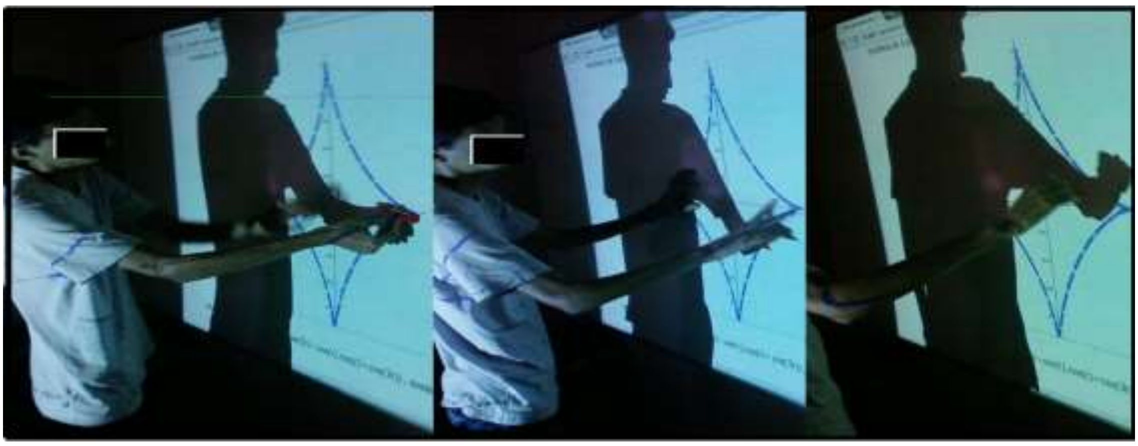


Figura 2. O aluno 1 buscou identificar os pontos e as posições em que podem ocorrer retas tangentes à trajetória relativa à parametrização chamada de tactriz

Na figura 2, o aluno relacionou o quociente indicado em $(*)\ \dfrac{dy}{dx} = -3sen^2(t)\cdot\cos(t) \big/ 3\cos^2(t)\cdot sen(t)$. O *software* possibilitou a inspeção do comportamento gráfico-geométrico desse quociente. Tal tarefa se evidencia fastidiosa e não trivial, caso restrinjamos às atividades do aprendiz ao lápis/papel. Não obstante, determinadas inferências podem ser antecipadas, apoiadas na visualização. Com efeito, na fig. 2, o aluno 3, antes de desenvolver uma estratégia de cunho analítico-algébrico, produziu conjecturas no que concerne à posição esperada dos vetores tangentes.

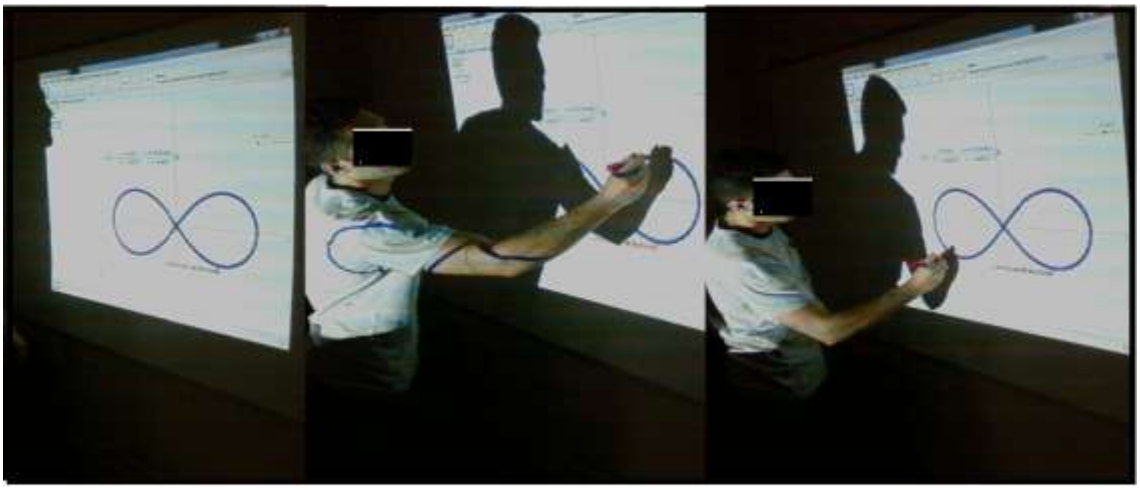


Figura 3. O aluno 2 buscou e discutiu, em sala de aula, a posição dos vetores tangentes à trajetória

Na figura 4, o aluno 3, realizou uma inspeção, guiada por intermédio de definições formais, com o intuitivo de localizar, do ponto de vista gráfico-geométrico, a localização de pontos de cúspide, pontos com multiplicidade, existência de retas assíntotas a cada traço. O aluno 3 buscou a qualidade de suavidade em cada traço.

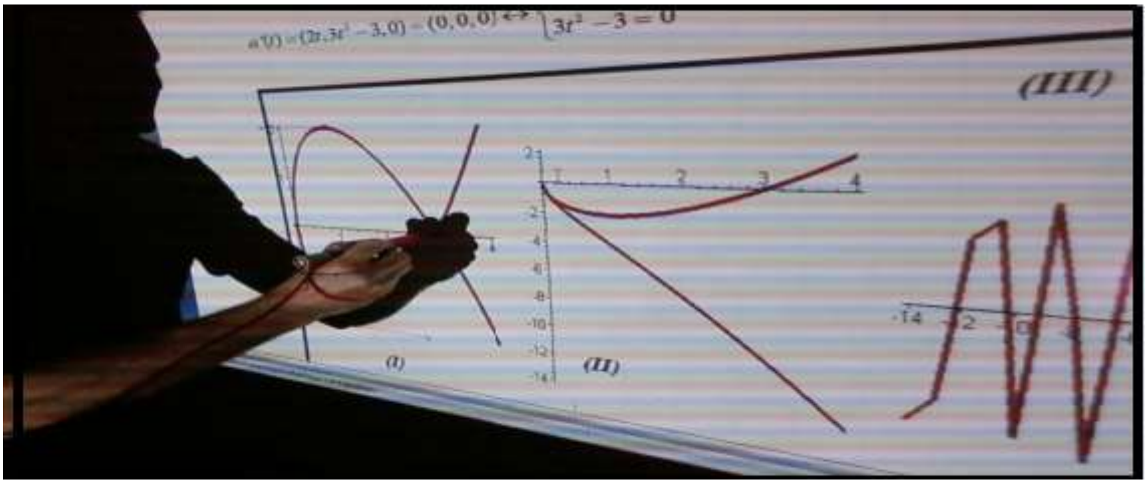


Figura 4. O aluno 3 analisou a existência de pontos de multiplicidade e o caráter de suavidade

Na figura 5, registramos a discussão em grupo ocorrida antes das atividades individuais, de resolução das tarefas propostas. Observamos a análise e a produção de conjecturas oriundas e apoiadas na visualização e percepção de propriedades gráfico-geométricas.

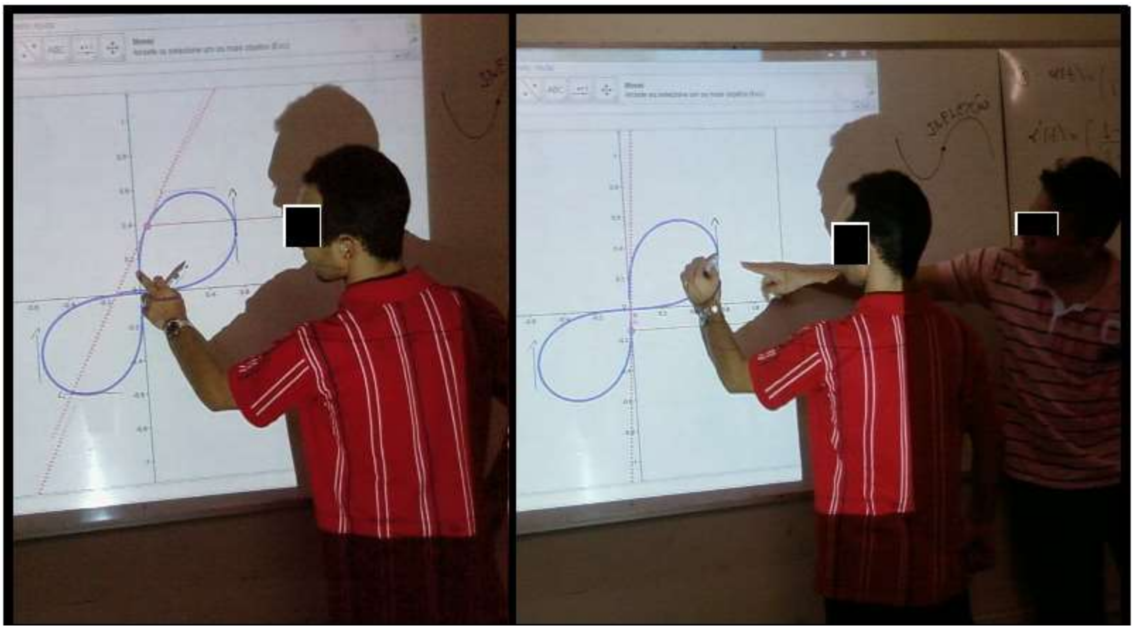
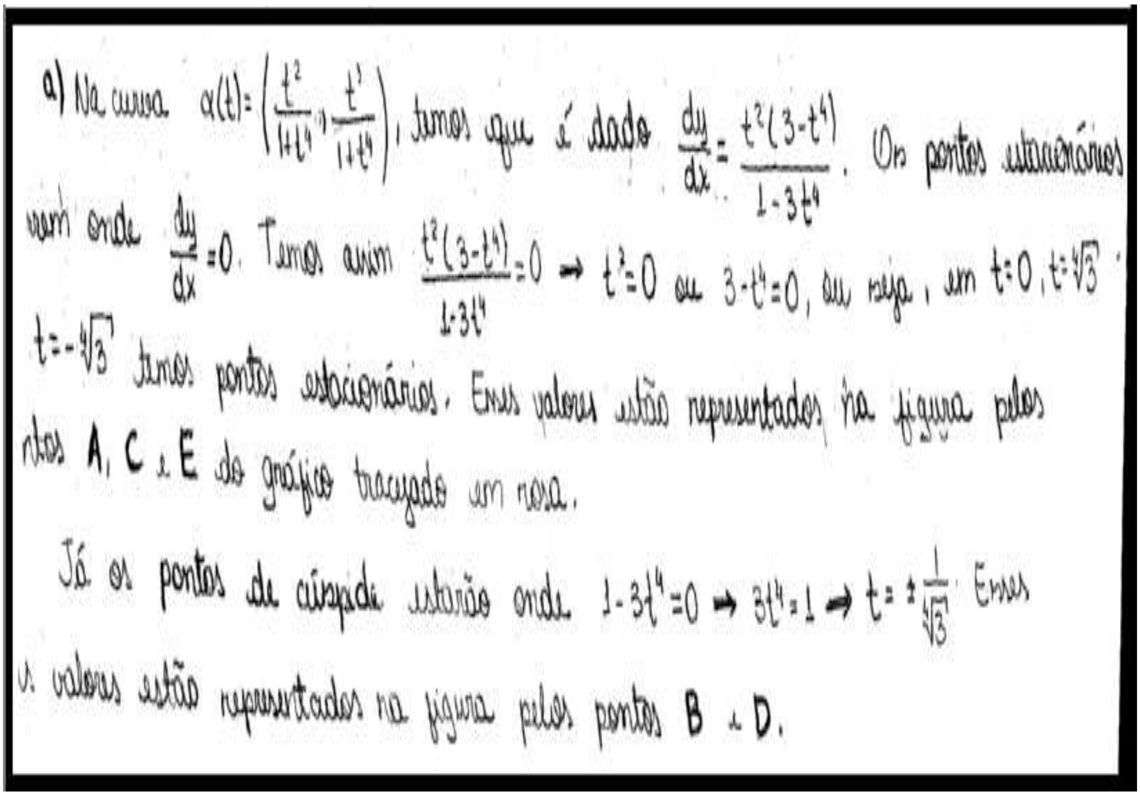


Figura 5. Os alunos 4 e 5 buscaram e discutiram a posição dos vetores tangentes à trajetória

Abaixo, apresentamos parte da produção escrita do aluno 4.



a) Na curva $\alpha(t)=\left(\frac{t^2}{1+t^4},\frac{t^3}{1+t^4}\right)$, temos que é dado $\frac{dy}{dx}=\frac{t^2(3-t^4)}{1-3t^4}$. Os pontos estacionários vem onde $\frac{dy}{dx}=0$. Temos assim $\frac{t^2(3-t^4)}{1-3t^4}=0 \Rightarrow t^2=0$ ou $3-t^4=0$, ou seja, em $t=0$, $t=\sqrt[4]{3}$ $t=-\sqrt[4]{3}$ temos pontos estacionários. Esses valores estão representados na figura pelos ntos A, C e E do gráfico traçado em rosa.

Já os pontos de cúspide estarão onde $1-3t^4=0 \Rightarrow 3t^4=1 \Rightarrow t=\pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$. Esses valores estão representados na figura pelos pontos B e D.

Figura 6. Após desenvolver uma análise gráfico-geométrica da situação na tarefa (I), o aluno 4 desenvolveu as estratégias analíticas

Na figura 6, o aluno 4, estabeleceu, ao final da etapa resolutiva de natureza analítica, as correlações conceituais entre o conhecimento mobilizado apoiado pelos gráficos e a inspeção da construção disponibilizada no computador. Por fim, sublinhamos a disposição da estratégia de resposta do aluno 5. Do lado direito (fig. 7), registramos o esboço de uma figura (desenho) como orientação de suas argumentações.

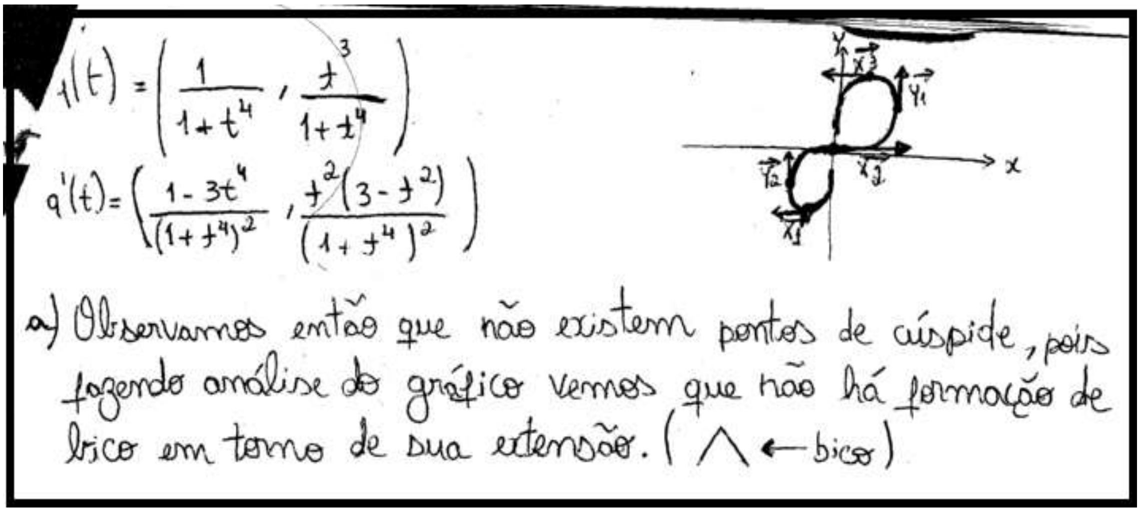


Figura 7. O aluno 5 indica que parte de suas conjecturas evoluíram por intermédio da inspeção do comportamento gráfico-geométrico

Concluindo nossa análise, mostramos que, dependendo da mediação e a estruturação das atividades, distinguidas dos padrões *standard* que averiguamos nos livros de Cálculo, temos a possibilidade de explorar um entendimento conceitual e heurístico dos alunos, com origem na percepção de propriedades gráfico-geométricas. Notamos alguns estudos (Alves, 2012b) que apontam o caráter produtivo de exploração da visualização, que pode atuar como um elemento impulsionador para a aprendizagem do Cálculo a Várias Variáveis. Outrossim, a estruturação de situações envolvendo a noção de curvas e o esboço de seu traço, não pode prescindir de um olhar histórico, que explica o surgimento e os problemas que ensejam a aplicação de várias curvas parametrizadas que mencionamos nesse escrito.

5. Considerações finais

Registramos no ensino do Cálculo a Várias Variáveis - CVV diversos elementos, que preservam um ritual que torna a algebrização e algoritmização hegemônica, no que concerne à proposição de atividades. Vale ressaltar que tal viés possui um marco inicial do Cálculo em Uma Variável Real - CUV e se perpetua no contexto dos conteúdos que discutimos nesse escrito. O objeto matemático que mereceu nossa atenção, chamado de curva parametrizada, apresenta aspectos que permitem, na condução de sua mediação didática, efetivar um forte *link* conceitual no contexto do CVV (Zdorov, 1980).

Em nosso estudo de caso, comprovamos, por meio de imagens registradas dos sujeitos, quer seja pela análise dos protocolos escritos na resolução das atividades propostas, envolvendo a análise local e construção de curvas, quer seja pela a elaboração de conjecturas, com origem na percepção e visualização do comportamento gráfico-geométrico dos traços das curvas abordadas; que os argumentos analíticos, envolvendo a aplicação precipitada dos modelos algébricos não ocorreram de modo antecipado, durante as atividades (I) e (II) propostas. Com essa mediação, asseguramos melhor situações didáticas que detém o potencial de estimular o *insight* (Alves, 2012a) dos aprendizes. Por fim, os dados coligidos a partir deste experimento (e as atividades estruturadas), na busca da compreensão de um fenômeno particular e específico, poderão ser reaplicados em um contexto mais geral.

6. Referencias bibliográficas

Alves, F. (2012a). Insight: descrição e possibilidades de seu uso no ensino do Cálculo. In: *Vydia Educação*. v. 32, nº2, p. 149-161. Disponível em:http://sites.unifra.br/Portals/35/2012/10.pdf. Acessado em: 29 dez. 2012.

Alves, F. (2012b). Engenharia Didática para a construção de gráficos no Cálculo: experiência num curso de Licenciatura em Matemática. In: *Anais do V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, Petrópolis, p. 1-21. Disponível em: http://sipemsbem. lematec.net/CD/?page=publications&subpage=gts&language=br. Acessado em: 29/12/ 2012.

Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação*. Porto: Porto Editora.

Edwards, C. (1969). *The Historical development of the Calculus*. New York: Springer. 362f.

Filler, A. (2011). Discovering functional and dynamic aspects of parametric equations by creating computer animations. In: *Proceedings of Bericht*. Alemanha. pp. 187-193. Acessado em: 2 de março 2013. Disponível em:< http://www.math.unipa.it/~grim/21_project/21_charlotte_FillerPaperEdit2.pdf>.

Guidorizzi, H. (2010). *Um curso de Cálculo*. v. 2, 5ª edição. Rio de Janeiro: LTC.

Pereira, L. (2007). *Uma abordagem interativa ao tratado de curvas especiais notáveis de Gomes Teixeira* (dissertação de mestrado em ensino de Matemática). Porto: Faculdade de Ciências do Porto. Acessado em: 12 de março 2013. Disponível em: http://www.fc.up.pt/fcup/contactos/teses/t_050370108.pdf

Ponte, J. (1994) O estudo de caso na investigação em Educação Matemática. In: *Quadrante*. 3-1, p. 3-18.Yates, R. (1947). *A Handbook on Curves and properties*. Michigan: An Arbor.

Stewart, J. (2001). *Cálculo*. v. II, São Paulo: Thomson.

Zdorov, A. (1980). *Remarkable curves*. Moscow: MIR.