

QUEBRA-CABEÇA DE LANGFORD UM CONVITE AO PENSAMENTO CRIATIVO MATEMÁTICO

Mateus Mendes Magela
mateusmendes.m@uol.com.br
Universidade Federal do Espírito Santo - Brasil

Tema: Jogos e Estratégias em Matemática.
Modalidade: Feira Matemática
Nível educativo: Médio (11 a 17 anos)
Palavras chaves: Langford; sequência; quebra-cabeça; cubos.

Resumo:

O Quebra-Cabeça de Langford mostra-se um passatempo simples, entretanto suficientemente engenhoso para conquistar atenção de alunos, de todas as idades. Simplificando a ideia de Langford, deve-se arranjar os algarismos $1, \dots, n$ com $n \in \mathbb{N}$, em sequência usando cada dígito exatamente duas vezes, separados por n outros números. O objetivo deste trabalho é contribuir na qualidade da aprendizagem dos alunos sobre problemas complexos por meio de missões que oferecem ricas oportunidades de investigação ativa, análise e reflexão. Tais métodos implicam um aumento da utilização de uma grande variedade de fontes de informações diferentes. Uma maneira mais simples de aplicar o quebra-cabeça é usar cartas de baralho em vez de blocos. Nesse sentido, o Quebra-Cabeça mostra-se um excelente recurso para promover a matemática recreativa permitindo explorar assuntos, tais como aritmética modular, métodos de contagem, construção de algoritmos aplicados à resolução de problemas e lógica matemática.

1. Introdução

A potencial oportunidade oferecida pelo problema Langford, para promover o pensamento matemático criativo de maneira lúdica, transformou o Quebra-Cabeça de Langford em um valioso instrumento de aprendizagem desde que o vira pela primeira vez, ainda estudante de graduação, descrito no livro Almanaque das Curiosidades Matemáticas de Ian Stewart.

O problema de Langford tem inspirado não somente a matemática recreativa, ao mesmo tempo, tem motivado a pesquisa por algoritmos mais eficientes, e métodos de contagem igualmente hábeis.

Muitos estudos computacionais e teóricos já foram realizados para estabelecer o número de arranjos distintos possíveis para determinadas quantidades de pares envolvidos no Quebra-Cabeça de Langford. O aspecto de contagem do problema de Langford levou a um desafio computacional, a fim de encontrar o número de soluções para valores grandes de n , e John E. Miller dedicou uma página na internet para o problema em que ele documenta esses resultados.

Os jogos são instrumentos de grande relevância no desenvolvimento cognitivo e essa oportunidade de aprendizagem pode ser potencializada quando esse processo está acompanhado de uma análise sobre as regras, uma formalização dos dados além de uma reflexão sobre as tomadas de decisões.

Portanto, a utilização do problema de Langford no processo de ensino e de aprendizagem da matemática pode proporcionar resultados satisfatórios, já que permite a aproximação do aluno com a matemática eliminando barreiras existentes.

2. Antecedentes históricos

O matemático escocês C. Dudley Langford observava seu filho brincar com seis cubos coloridos, dois de cada cor. Langford percebeu que o menino os arrumou de modo que os dois cubos amarelos, por exemplo, ficaram separados por um cubo, os dois cubos azuis ficaram separados por dois cubos e que os dois cubos vermelhos ficaram separados por três cubos. A partir disso, Langford pensou no emparelhamento e concluiu que esse é o único arranjo possível, a não ser por sua reflexão da direita para esquerda.

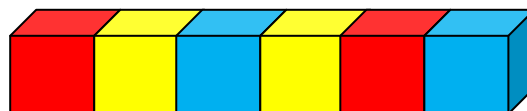


Figura 1 - Os cubos de Langford

3. Elaboração do material

Para exposição do Quebra-Cabeça de Langford, utilizaremos cubos de madeira (de dimensões 3 cm x 3 cm x 3 cm) numerados de 1 a 8 sendo cada algarismo representado exatamente duas vezes. Para realizar esta atividade em sala de aula, uma ideia mais simples é utilizar cartas de baralho.



Figura 2 - Material para exposição

4. Ficha técnica

- Jogadores: um.
- Material: 16 cubos numerados de 1 a 8. (cada algarismo ocorre exatamente duas vezes).
- Dificuldade: média (porém a dificuldade pode ser aumentada ou diminuída alterando a quantidade de pares).
- Objetivo: arranjar os cubos em sequência de modo que os cubos com número um apareçam separados por um cubo, os cubos com número dois apareçam separados por dois outros números e assim aplicando até os cubos com número oito.

5. Uma breve prova

A sequência de Langford de ordem n admite solução apenas quando $n \equiv 0 \pmod{4}$ ou $n \equiv 3 \pmod{4}$, ou seja, o emparelhamento proposto por Langford só é possível se a quantidade de pares envolvidos for um múltiplo de quatro ou uma unidade a menos que um múltiplo de quatro.

Demonstração: Seja $S = (s_1, \dots, s_k, \dots, s_{2k})$ $s_k \in \{1, \dots, n\}$ e $n \in N$ com $2k$ elementos uma sequência de Langford posto que o par (a_i, a_j) representa os índices disjuntos de S em que i ocorre com $i \in \{1, \dots, n\}$ sendo $n \in N$. Observe que quando $s_i = s_j = n$, sendo $i, j \in \{1, \dots, 2k\}$, considerando sem perda de generalidade $i < j$, então, $a_j - a_i = k + 1 \Rightarrow a_j = a_i + (k + 1)$.

$$\sum a_i + a_j = 1 + 2 + \dots + n + \dots + 2n = n(1 + 2n), \text{ com } a_i, a_j \in S \quad (1)$$

$$\sum a_j = \sum a_i + (1 + 2 + \dots + n) + n \quad (2)$$

Segue das equações (1) e (2) que:

$$\begin{aligned} 2\sum a_i + (1 + \dots + n) + n &= n(1 + 2n) \\ \Rightarrow \sum a_i &= \frac{n(1 + 2n) - n}{2} - \frac{(1 + n)n}{4} = \frac{2n + 2n^2 - 2n - n + n^2}{4} = \frac{3n^2 - n}{4} \end{aligned} \quad (3)$$

Como a_i é um índice da sequência $\frac{3n^2 - n}{4}$ deve ser sempre um valor inteiro e os únicos valores de n que satisfazem essa restrição ocorrem quando $n \equiv 0 \pmod{4}$ ou $n \equiv 3 \pmod{4}$.

6. Agradecimentos

Tenho prazer de registrar meus agradecimentos a duas pessoas: Maria de Fátima Fafá Pinto por agradáveis conversas e pela confiança depositada em meu trabalho; minha irmã Maira Mendes Magela, que com paciência invulgar, colaborou para corrigir o texto, apontando vários deslizes que procurei corrigir;

Referencias bibliográficas

Honours, T e David, C. (2005). Algorithms for Constructing Generalized Skolem type Sequences.

Larsen, J. (2009) Counting the number of Skolem sequences using inclusion exclusion.

Stewart, I. (2008). Almanaque das curiosidades matemáticas. Rio de Janeiro: Zahar.