# FUNCIÓN PARTE ENTERA DESDE LA MODELACIÓN

Manuel Andrés Castiblanco Acosta
mcastiblanco7@yahoo.es, manuelcastiblanco@gmail.com
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia

Tema: Pensamiento Algebraico
Modalidad: CB
Nivel educativo: Educación básica secundaria
Palabras clave: Función parte entera, modelación, sistemas de representación

**Resumen**

*En el presente proyecto pretende mostrar un proceso de modelación como estrategia didáctica para la enseñanza y el aprendizaje del concepto de la función parte entera (techo y piso), para abordarlo me apoyare en los sistemas semióticos de representación de Duval, en donde se prestara especial atención en los procesos de tratamiento en las representaciones de la función y sus unidades significantes; otro elemento es el pensamiento variacional, para aproximarme al concepto de función desde una óptica dinámica, de cómo se relacionan las variables y su covariación en las cantidades de la misma o diferente magnitud. Se tendrán en cuenta aspectos socioculturales intervienen en el quehacer de los estudiantes de un colegio oficial de Bogotá, que les permite construir un saber, de qué manera interfieren en su aprendizaje y qué artefactos utilizan para llegar a la solución de un problema. Para llevar a cabo lo anterior se proponen ejercicios que toman elementos del contexto sociocultural de los estudiantes, para que elaboren un modelo matemático.*

La noción de función es uno de los objetos matemáticos más relevantes dentro de la enseñanza de las ciencias como las ciencias naturales, las ciencias físicas, las ciencias sociales y uno de los objetivos principales es la obtención de modelos matemáticos que permiten comprender la relación de dependencia entre las magnitudes y expresarlas de forma sencilla mediante tablas y gráficas. De esta forma se puede realizar una interpretación ya sea visual del modelo o mediante las fórmulas que constituyen una representación más abstracta (Carmen Azcárate Giménez & Jordi Deulofeu Piquet, 1996). De acuerdo con lo anterior, el aprendizaje de la noción de función es importante no solo para el área de matemáticas, sino para la comprensión de varias nociones en otras ciencias.

En el proceso de aprendizaje de la noción de función los estudiantes se ven enfrentados a errores y dificultades que autores como Azcárate & Deulofeu (1996) relacionan con la definición, la complejidad de su simbolismo, la articulación sus representaciones y la diversidad de problemas y modelos. Esto lo corrobora Michele Artigue (1995), al afirmar que los objetos básicos del cálculo son complejos, y dado que la noción de función hace parte de ellos, también ella se hace compleja. En consecuencia para enseñar y aprender la noción de función hay que estudiarla en sus diferentes matices y de forma profunda, de manera que los estudiantes puedan elaborar una representación global, que conlleve a la comprensión de dicha noción. En este documento se abordaran, en primera instancia, dos dificultades presentes en los procesos de aprendizaje, asociadas a la definición y a la articulación de las representaciones.

En el marco del proceso de aprendizaje de la noción de función, los estudiantes de grado octavo y noveno, como lo menciona la National Council of Teachers of Mathematics (2000), deben empezar a conocer los diferentes tipos de funciones como por ejemplo la función lineal que tiene ciertas propiedades, y sus representaciones con características que las diferencian de otras funciones, como las cuadráticas, las racionales, exponenciales, logarítmicas etc. A través de sus representaciones y conversiones los estudiantes pueden ver las interacciones entre el álgebra, la geometría, la estadística y la matemática discreta en sus distintas formas en que los fenómenos matemáticos pueden ser representados, de modo que los estudiantes deben aprender a utilizar una amplia gama de funciones de manera explícita y recursiva para entender cómo varían y poder llegar a modelar el mundo a su alrededor. Mediante la comprensión de las propiedades anteriormente descritas de las funciones, los estudiantes tendrán una visión más global de los fenómenos que se modelan.

Así como es importante el trabajo con las representaciones de funciones lineales, afines, cuadráticas, también lo es la atención que requieren las funciones a trozos como la función valor absoluto y la función parte entera del tipo $f(x)=[\![ax+b]\!]$. Luisa Ruiz, (1998), complementa lo anterior diciendo que:

> “estas representaciones se utilizarán por el profesor como útil didáctico para dar cierto grado de significación gráfica a conceptos como límites laterales, continuidad, crecimiento o derivabilidad” (pág. 185).

En los trabajos consultados sobre esta temáticas y desarrollados en educación básica media, generalmente se abordan las funciones lineales, afines, cuadráticas o por partes, pero se dejan de lado las funciones de parte entera. En el presente reporte se quiere dar a conocer la importancia de la función parte entera dentro del currículo de matemática para los grados octavos y novenos, ya que la función parte entera tiene diversas aplicaciones en la vida diaria, por ejemplo para establecer los valores en las tarifas en el cobro de servicios, tales como el transporte en taxi o servicios públicos (gas, agua y energía).

Por lo anterior se quiere abordar este concepto como paso de las matemáticas discretas que se ven en grados anteriores a las matemáticas continuas, puesto que esta función involucra el concepto de continuidad y discontinuidad, proporcionando un paso importante hacia la representación gráfica de otras familias de funciones como las polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas, como se menciona en los estándares básicos de competencias, MEN (2003).

Por lo general el tipo de función que se aborda para comenzar el concepto matemático función es la lineal. En grado séptimo (Ciclo 3) los estudiantes tienen un primer contacto con la noción de proporcionalidad directa y proporcionalidad inversa en contextos aritméticos y geométricos, en donde se hace una representación de diagramas, expresiones verbales y tablas, de tal forma que el estudiante pueda establecer una relación entre las mismas, así como identificar algunas características de las gráficas cartesianas como puntos continuos y líneas formadas por segmentos. En el siguiente ciclo (cuatro), que corresponde a los grados octavo y noveno, la propuesta es analizar las representaciones de las funciones polinómicas, identificar las relaciones entre propiedades de la gráfica y propiedades de representación algebraica y estudiar la relación entre los cambios de parámetros en las representaciones algebraicas y los cambios en las gráficas que los representan. Como se ve, en esta propuesta de los estándares curriculares no se mencionan las funciones a trozos o por partes, la única relación que se crea sucede en el ciclo tres con respecto a las características de las gráficas cartesianas formadas por segmentos.

## La función parte entera

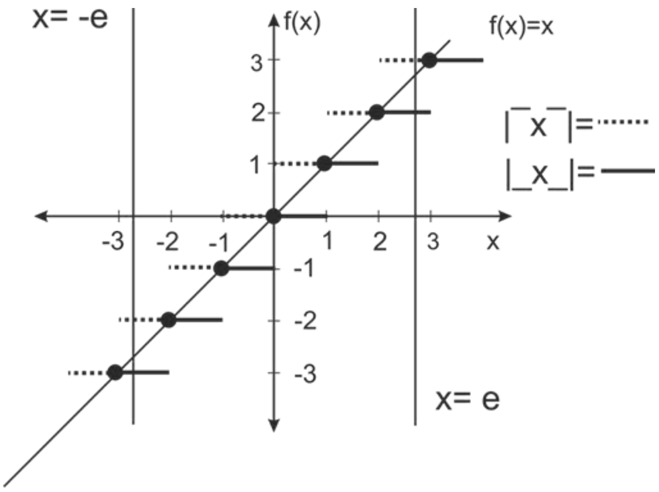
Los números enteros son el pilar de la matemática discreta y a menudo se requiere convertir un número real arbitrario en número entero. Una función asociada a este procedimiento es la función parte entera (integer) definida por Graham R., Knuth D. & Patashnik O. (1994) como aquella que asigna a cada número real un número equivalente a su parte entera, y se denota como $f(x) = [x]$. A comienzos de la década de 1960, Kenneth Iverson, introdujo los nombres de techo y piso, así como su notación a dos tipos de funciones que están definidas para todos los reales:

Función piso (Floor): $f(x) = \lfloor x \rfloor$, El mayor entero menor o igual a x

Función Techo (Ceiling): $f(x) = \lceil x \rceil$= El menor entero mayor o igual a x

Otras de las características de estas funciones es que son funciones a trozos, lo que significa que su representación gráfica consta de segmentos horizontales de la recta que varían a una altura constante. La gráfica de esta función no es continua cuando se evalúa en cada uno de los números enteros, pues los límites de la izquierda y la derecha difieren en 1, pero sí es continua en cada uno de sus intervalos abiertos (n, n+1), donde el valor de la variable es constante.

Con el propósito de entender estas dos funciones, se observa a continuación una representación gráfica que forma una escalera,




Podemos ver en la gráfica que los valores de las funciones para el número e (ejemplo tomado de Graham, Knuth & Patashnik (1994)),

$e = 2{,}71828$

$\lfloor e \rfloor = 2$, $\lfloor - e \rfloor = -3$ ; $\lceil e \rceil = 3$, $\lceil - e \rceil = -2$

Al observar la gráfica se puede examinar que la función piso se encuentra por debajo de la diagonal y la función techo se encuentra por encima de la diagonal. También se puede ver que las dos funciones tienen el mismo valor cuando se evalúa en cada uno de los números enteros:

$\lfloor x \rfloor = x$, $\leftrightarrow$ x es entero; $\lceil x \rceil = x$, $\leftrightarrow$ x es entero

Cuando x no es entero los valores de $\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor = 1$

**Propiedades**

Las funciones techo y piso tienen las siguientes propiedades

$\lfloor x \rfloor = n \quad n \leq x < n+1$

$\lfloor x \rfloor = n \quad x - 1 < n \leq x$

$\lceil x \rceil = n \quad n - 1 < x \leq n$

$\lceil x \rceil = n \quad x \leq n < x+1$

Los números reales los podemos escribir como la suma de la parte entera y la parte decimal o fraccional

$x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$

Todo lo anterior nos muestra algunas características de esta función que pueden ser útiles al momento de presentarla a los estudiantes. De la misma manera se hace necesario recurrir al pensamiento variacional, para avanzar en la comprensión de la noción de función en términos de la variación

**Pensamiento Variacional**

La noción de función aparece cuando se establecen relaciones funcionales entre variables que cambian. De esta forma emerge la función como herramienta de conocimiento necesaria para enlazar patrones de variación entre variables y para predecir y controlar el cambio. Con el fin obtener un mayor entendimiento de la noción de función se recurre al pensamiento variacional que incorpora a las matemáticas una visión diferente sobre la enseñanza de los contenidos de las matemáticas de forma fragmentada, visión que ha regido por un largo tiempo la actividad escolar, ligada a una enseñanza más amplia, tal como se afirma en los Lineamientos Curriculares (Ministerio de Educación Nacional, 1997):

> "Un campo conceptual que involucra conceptos y procedimientos interestructurados y vinculados que permitan analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas tanto de la actividad práctica del hombre, como de las ciencias y las propiamente matemáticas donde la variación se encuentre como sustrato de ellas".

Lo anterior significa que se establecen múltiples relaciones del pensamiento variacional con otro tipo de pensamiento como el numérico, geométrico, algebraico, estadístico y métrico, a través de las representaciones cuantitativas de las situaciones de variación. A esto agrega Carlos Vasco (2003):

> "El pensamiento variacional puede describirse aproximadamente como una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad.".

En las situaciones de variación y cambio de la vida cotidiana, gran parte de estas llevan consigo una relación directa con el tiempo, donde variación y cambio corresponden a una circunstancia en la que un fenómeno se transforma con el paso del tiempo. Desde el pensamiento variacional el objetivo es conseguir identificar el fenómeno de cambio de las magnitudes, describirlo, interpretarlo, predecir su comportamiento, cuantificarlo y modelarlo (MEN, 2004). Adicionalmente, Vasco (2003) complementa que es necesario modelar la covariación entre cantidades de magnitud y su variación en el tiempo, es decir, no basta con observar el comportamiento de una variable de forma aislada, sino su comportamiento en relación con otras. El concepto de pensamiento variacional promueve en el estudiante la observación, el registro y la utilización del lenguaje matemático, propósito que debe desarrollar el estudiante durante su trabajo en el aula.

De acuerdo con Vasco (2003) el objetivo principal del pensamiento variacional es la modelación matemática. En el proceso de resolución de un problema se debe elaborar primero un modelo de la situación donde las variables covaríen en forma semejante a las de la situación problema, esto no se lleva a cabo sin activar el pensamiento variacional.

Un modelo matemático "*es un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que intentan explicar, predecir y solucionar algunos aspectos de un fenómeno o una situación*" (Villa, 2007) lo que conlleva a comprender mejor el fenómeno que se está estudiando. Este trabajo pretende que los estudiantes formulen un modelo utilizando expresiones numéricas, expresiones algebraicas, tablas, gráficos etc., haciendo uso de la función parte entera.

El proceso de construcción del modelo no es sencillo, requiere de un periodo de tiempo en el cual el modelador, acude a sus conocimientos matemáticos, al conocimiento sobre la situación que se quiere simular para establecer una relación análoga entre el modelo y la situación o sistema real. Es allí donde entran en juego las habilidades del modelador para interpretar, establecer, describir y representar las relaciones que existen entre las magnitudes y llegar construir un objeto matemático (Villa, 2007), que simule la dinámica de ciertos subprocesos de la realidad (Vasco, 2003).A este arte de construir un modelo a partir de un fenómeno real es lo que se denomina modelización matemática.

En la modelación matemática existen distintas perspectivas de investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de los modelos matemáticos. De acuerdo con la clasificación que hace Blomhoj (2008), esta investigación se circunscribe en la perspectiva educacional, caracterizada por integrar los modelos matemáticos como medio de aprendizaje de las matemáticas y a la modelación como una competencia importante.

En la modelación matemática se debe elegir un tema, y de él se extrae, el contenido a desarrollar durante las clases, el contenido debe ser suficiente si se quiere utilizar por varias clases.

Para el desarrollo del ciclo de modelación se aplicara la secuencia planteada por Villa. Ya establecida la importancia de la modelación en la construcción de significados de conceptos matemáticos. La función del maestro dentro de la dinámica del proceso de modelación se centra en dos momentos, el primero se presenta ante la necesidad de modelar una situación dado un contexto que pueda representar importancia para los estudiantes. La segunda fase denominada como ejecución donde el maestro en una serie de momentos desarrolla la situación de modelación en la clase. En este documento se pretende desarrollar los momentos que corresponden a la primera fase.

En la fase uno se tienen en cuenta todos los criterios que el docente debe tener presente para la elección y análisis de los contextos y fenómenos que se van a modelar. Algunos de los momentos que debe tener en cuenta el maestro.

1. Observación y experimentación: en este momento se realiza la identificación del problema que va a ser modelado, el docente tendrá presente criterios como conocimientos previos que deben tener los estudiantes para abordar la situación, la relación del estudiante con el contexto del problema, el problema debe pertenecer al mundo real y debe tener coherencia con el concepto que se quiere enseñar.
2. Delimitación del problema: todo problema presenta un número de elementos y variables a tener en cuenta para ser modelados. El docente debe elegir como

organizar el grupo de estudiantes de tal forma que se simplifique el fenómeno delimitando el número de variables.

3. Selección de estrategias: el docente debe tomar la decisión sobre que estrategias, recursos y metodologías de trabajo con el propósito de organizar una secuencia didáctica que involucre conceptos previos y representaciones para identificar las magnitudes.

**Referencias bibliográficas**

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En M. Artigue, R. Douady y

L. Moreno, *Ingeniería didáctica en educación matemática*, Capítulo 6, pp. 97–140. Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica.

Azcárate, C., & Deulofeu,, J. (1996). *Funciones y gráficas*. España: Síntesis.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano*, *registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Santiago de Cali: Universidad del Valle, Instituto de Educación y pedagogía, Grupo de educación matemática.

Biembengut, M & Hein, N. (1997). Modelo, modelación y modelaje: Métodos de enseñanza-aprendizaje de matemáticas. *Epsilon: Revista de la sociedad Andaluza de Educación matemática "Thales"*, 38, 209–222.

Graham R.,Knuth D. & Patashnik O. (1994).Concrete Mathematics. A foundation for computer science. Addison-Wesley Publishing Company. United States

Ministerio de Educación Nacional. (1997). *Lineamientos curriculares*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional

Ministerio de Educación Nacional, C. (2003). Estándares Básicos de Matemáticas. *Santafé de Bogotá*.

Ministerio de Educación Nacional. (2004). *Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales.* Ministerio de Educación Nacional Dirección de Calidad de la Educación Preescolar, Básica y Media.

Sierra, M., González, M. T. & López, C. (1998). Funciones: Traducción entre representaciones. *Aula*, 10, 89–104.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. EEUU: NCTM.

Rey, G., Boubee, C., Vazquez, P., & Cañibano, A. (2009). Aportes didácticos para abordar el concepto de función. *Unión Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 153–162.

Ruiz, L. (1998). *La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico*. España: Universidad de Jaen.

Secretaría de Educación Distrital. (2008). *Orientaciones curriculares para el campo de pensamiento matemático.* Bogotá: Secretaría de Educación Distrital.

Vasco, C. (2003). *El Pensamiento Variacional y la Modelación Matemática.* XI CIAEM, Brasil.

Villa, J. (2007). La modelación como proceso en el aula de matemáticas. *Tecno Lógicas*, 63–85.