SIMULACIÓN FÍSICA Y COMPUTACIONAL: ESTRATEGIA METODOLÓGICA PARA RESOLVER PROBLEMAS ESTOCÁSTICOS

Greivin Ramírez Arce
gramirez@itcr.ac.cr
Instituto Tecnológico de Costa Rica

Tema: Pensamiento relacionado con la probabilidad
Modalidad: Taller
Nivel educativo: Terciario-Universitario
Palabras clave: simulación, estocástica, programas de estudio, formación de profesores.

Resumen

Se propone en este artículo utilizar, como estrategia metodológica, la simulación física y computacional para desarrollar el pensamiento intuitivo en la solución de problemas estocásticos. Los participantes trabajan, de manera social, en el desarrollo de actividades guiadas sobre estadística y probabilidad donde intervienen los distintos estándares de procesos matemáticos (representar, conectar, comunicar, plantear y resolver problemas y razonar y argumentar) que son propuestos en los nuevos programas de estudio en matemática para primaria y secundaria en Costa Rica. Se espera que, los participantes expongan sus estrategias de solución y reconozcan la necesidad de incorporar la simulación, física y computacional, en procesos aleatorios e incorporen la tecnología en el análisis de datos.

Keywords: simulation, stochastic, curricula, teacher training.

Abstract

The aim in this article is to use, as a methodological strategy, practical simulation and computational simulation to develop intuitive thinking in stochastic problem solving. People will work in groups on guided activities of statistics and probability involving representation, inter-connection, communication, problem posing and solving, and explanation. The problems will be those proposed in the new mathematics curricula for Costa Rica primary and secondary schools. It is hoped that participants will present their solution strategies and recognize the need to incorporate practical simulation and computational simulation in random processes and to incorporate technology in the data analysis.

Introducción y justificación

Especial atención brinda el Ministerio de Educación Pública (MEP) de Costa Rica a utilizar la simulación de experimentos estadísticos dinámicos en los distintos niveles educativos de primaria y secundaria.

Inzunsa (2006) resume el éxito de los estudiantes al utilizar la simulación computacional (sugerida por Shaughnessy, 1992; Burrill, 2002; Sánchez, 2002; Lipson, 2002):

> Los estudiantes encuentran sentido a la resolución de problemas mediante la simulación una vez que se apropiaron de los recursos del software y después de haber abordado algunas actividades. Son capaces de construir por ellos mismos las distribuciones, generando las poblaciones, tomando muestras, definiendo estadísticos y calculado sus probabilidades. (p. 215).

La simulación, primero física, permite que el estudiante se enfrente a la situación real del problema, con el fin de que empiece a observar el comportamiento de algunos experimentos, más tarde, la simulación computacional, permitirá inferir patrones, debido a la gran cantidad de experimentos que se pueden crear, manipulando parámetros y variando las condiciones del problema inicial.

Además, el MEP (2012) aporta "Usar la computadora para visualizar y experimentar las Matemáticas…Son instrumentos para facilitar cómputos, para apoyar la visualización de entidades y relaciones matemáticas, para favorecer la experimentación matemática, orquestar comunicaciones, formar redes y matematizar lo real externo".

Se propone, como estrategia metodológica, incorporar la simulación física y computacional, en la solución de problemas estocásticos de primaria y secundaria, que aparecen en los nuevos programas propuestos por el Ministerio de Educación Pública de Costa Rica.

En particular, se utiliza el paquete Excel para efectuar las simulaciones computacionales, por su fácil acceso, por las virtudes que aporta en términos funcionales y gráficos y por su dinamismo. Sin embargo, existen muchos paquetes estadísticos que favorecen el proceso de simulación de problemas estocásticos, entre ellos Fathom, Geogebra, R, Probability Explorer, entre otros.

Plan y metodología de la propuesta

La propuesta de incorporar la simulación, tanto física como computacional, se debe dividir en tres etapas:

Primera etapa:

Etapa introductoria donde se les expone a los estudiantes, la importancia de incluir en el aula, simulación física y computacional, como estrategia de enseñanza de la estocástica.

Segunda etapa:

Los participantes se dividen en grupos y trabajan en actividades guiadas con el fin de proponer estrategias de solución, tanto físicas como computacionales, en los problemas estocásticos que intervienen en cada actividad.

Tercera etapa:

Los participantes de cada estación, exponen los problemas a los que se enfrentaron y sus estrategias de solución. Así como las competencias o habilidades matemáticas que debieron utilizar y los estándares de procesos que activaron.

Actividades y una propuesta de solución a problemas estocásticos

A continuación se presentan algunos problemas seleccionados que forman parte de la segunda etapa. Para cada uno de ellos, se brinda una propuesta de pasos para conseguir una simulación física, un flujo a seguir para lograr una simulación física y por último se presenta una propuesta de solución teórica, con el fin de justificar los resultados conseguidos y comparados con las simulaciones físicas y computacionales.

Problema 1

Considere un juego en el que se lanzan dos dados distintos, la persona que quiere jugar debe seleccionar un número de uno a seis y apostar $1000. La persona gana $1000 si el número seleccionado sale en uno de los dados y gana $2000 si el número seleccionado sale en los dos dados, en caso contrario el jugador pierde el dinero apostado. Si un jugador juega muchas veces, ¿se considera justo el juego? ¿Qué se esperaría?

Simulación física

1. **1.** Seleccione un número entre 1 y 6 que será el valor al cual le apuesta al lanzar dos dados.
2. **2.** Lance los dos dados, en caso de:

- coincidir en los dos dados: gana $1000

- coincidir en un dado: no gana ni pierde

- no coincidir en ningún dado: pierde $1000

3. **3.** Repita los pasos 1 y 2 las *n* veces que desee y registre la cantidad que gana o pierde en cada experimento.
4. **4.** Obtenga el promedio de las ganancias (y perdidas) registras.

¿Qué significa ese promedio?

Simulación computacional

1. **1.** Cree una variable llamada *Núm_Elegido*, a la cual se le define un random de 1000 valores en el intervalo entero [1,6]. Esto es utilizamos el comando: *=ALEATORIO.ENTRE(1;6)*
2. **2.** Cree otra variable llamada *Dado1*, a la cual se le define un random de 1000 valores en el intervalo entero [1,6]. Esto es utilizamos el comando: *=ALEATORIO.ENTRE(1;6)*
3. **3.** Cree otra variable llamada *Dado2*, a la cual se le define un random de 1000 valores en el intervalo entero [1,6]. Esto es utilizamos el comando: *=ALEATORIO.ENTRE(1;6)*
4. **4.** Cree otra variable llamada *Ganancia*, a la cual se le define el siguiente condicional para los 1000 valores aleatorios de las tres variables anteriores. Así: *SI(Y(A2=B2;A2=C2);1000;SI(O(A2=B2;A2=C2);0;-1000))*
5. **5.** Obtenga el promedio de los 1000 valores de la variable *Ganancia*: *=PROMEDIO(D2:D1001)*

Solución teórica

Sean

X: el número de coincidencias al lanzar los dos dados. $R_X = \{0,1,2\}$
G: la ganancia al lanzar los dos dados. $R_G = \{-1000_{X=0}, 0_{X=1}, 1000_{X=2}\}$

X	0	1	2
G	-1000	0	1000
f(G=g)	$\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{25}{36}$	$2\left(\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\right)=\frac{10}{36}$	$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$

$$E(G) = -1000 \cdot \frac{25}{36} + 1000 \cdot \frac{1}{36} = \frac{-2000}{3}$$

El juego es injusto. Se espera a la larga perder, en promedio, $\frac{-2000}{3}$ colones por juego.

Problema 2 (en Shaughnessy, 1992)

Se tienen tres monedas cuyas caras son de colores e igualmente probables de extracción. Una moneda es "azul" por un lado y "roja" por el otro, otra tiene "rojo" por ambas caras y la otra "azul" por ambas caras. Si se introducen las monedas en una bolsa y se extrae una al azar sin ver uno de sus lados, ¿qué es más probable con respecto al color que está por el revés de esta misma moneda si el lado visto de la moneda ocurrió que era rojo?

( ) Que sea rojo
( ) Que sea azul
( ) Son igualmente probables
( ) No se puede determinar

Simulación física

1. Tome tres monedas de igual nominación y coloréelas según las condiciones dadas. Póngalas en una bolsa y realice el experimento de extraer, aleatoriamente, una moneda y colóquela sobre la mesa dejando ver sólo un lado de la moneda (lado visible).
2. En caso de que el color visto de la moneda sea:
   a. Azul, vuelva a colocar la moneda en la bolsa y extraiga nuevamente una moneda.
   b. Roja, regístrelo y observe qué color tiene el lado inverso de la moneda (lado invisible). Vuelva a poner la moneda en la bolsa y extraiga nuevamente una moneda. Cuándo haya ocurrido que el lado visible fue rojo durante 100 ocasiones, ¿qué ocurrió con el lado invisible? ¿Cuántas veces fue rojo?
3. Repita el paso anterior varias ocasiones. ¿Ocurre lo mismo con el lado invisible por cada 100 bolas rojas obtenidas en el lado visible? ¿Por qué?

Simulación Computacional

Inicialmente se tiene las opciones R1 (rojo moneda 1), A1 (azul moneda 1), R2 (rojo moneda 2), R2 (rojo moneda 2), A3 (azul moneda 3) y A3 (azul moneda 3). Aunque R1 y R2 no son distinguibles (son los mismos colores), se tomarán de esta forma sólo para saber que en el primer caso el lado invisible cambia de color, mientras que en el segundo, el lado invisible mantiene el color.

Así, cada cara de la moneda tiene inicialmente $\frac{1}{6}$ de posibilidad de ocurrir. Por lo que podemos asignar lo que ocurre en la moneda, como lado visible, en comparación a lanzar un dado, donde:

1: R1 2: A1 3: R2 4: R2 5: A3 6: A3

1. Cree una columna llamada *Lado Visible,* y asígnele la fórmula de obtener un número aleatorio entre 1 y 6 (lanzar un dado). Así: *=ALEATORIO.ENTRE(1;6)*
2. Cree una nueva columna llamada *Lado invisible* y utilice el condicional de que si sale una moneda con igual color en ambas caras entonces el color se mantiene en el dorso de la moneda, sino el color cambia. Así: *SI(A2<=2;"Cambia";"No cambia")*
3. Repita este experimento 1000 veces. Arrastre las fórmulas de la primera y segunda columna hasta la fila 1001.
4. Luego cuente cuántas veces, de las 1000, el color no cambia. Esto es: *=CONTAR.SI(B2:B1001;"No cambia")*

5. Construya un gráfico de frecuencias absolutas con los resultados obtenidos en el punto anterior. ¿Cómo describiría usted la gráfica obtenida?
6. Determine, de esos 1000 experimentos, la frecuencia relativa del número de veces que cambia de color el dorso de la moneda y cuántas veces se mantiene.

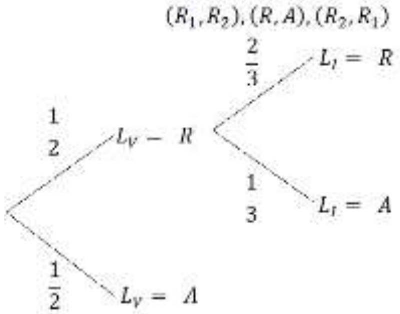
   Presione F9 si desea volver a realizar otros 1000 experimentos.

Solución teórica

Tómese

L_I: lado invisible de la moneda y L_V: lado visible de la moneda

Se pide $P(L_I = R \mid L_V = R)$



$$P(L_I = R \mid L_V = R) = \frac{2}{3}$$

Se debe a que la moneda que tiene rojo por ambas caras, se debe contar como doble, pues cuando se da que $L_V = R$, no se sabe a ciencia cierta "cuál rojo" ocurrió, aunque son indistinguibles, pudo ser un lado (R_1) o el otro (R_2).

Problema 3 (en Shaughnessy, 1992)

Una caja tiene en su interior tres bolas rojas y tres bolas azules. Se extraen dos bolas sin reemplazar la primera.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bola sea roja dado que la primera fue roja?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola sea roja, dado que la segunda es roja?

Simulación física

I parte

1. Tome tres canicas de dos colores distintos y de igual tamaño según las condiciones dadas. Póngalas en una bolsa y realice el experimento de extraer, aleatoriamente y en forma sucesiva, dos canicas.
2. En caso de que la primera canica sea de color:
   a. Azul, vuelva a colocar la canica en la bolsa y extraiga nuevamente otra canica.
   b. Roja, regístrelo y sin regresar esta primera bola, extraiga una segunda bola. ¿Cuántas veces se obtuvo una canica roja, dado que la primera fue roja?
3. Repita el paso anterior varias ocasiones. ¿El número total de segundas canicas rojas por cada 100 canicas rojas obtenidas en la primera canica es el mismo? ¿Por qué?

II parte

1. Extraiga, aleatoriamente y en forma sucesiva, dos canicas, de tal manera que la primera canica no sea vista en primera instancia por ningún compañero.
2. En caso de que la segunda canica sea de color:

a. Azul, vuelva a colocar las canicas en la bolsa y extraiga nuevamente dos canicas con el mismo procedimiento.
b. Roja, regístrelo y puede observar el color de la primera bola, ¿Cuántas veces se obtuvo una canica roja en la primera bola, dado que la segunda fue roja?

3. Repita el paso anterior varias ocasiones. ¿El número total de primeras canicas rojas por cada 100 canicas rojas obtenidas en la segunda canica es el mismo? ¿Por qué?

Simulación computacional

I parte

1. Cree una variable llamada *Primera_Bola*, a la cual se le define un random de 1000 valores en el intervalo entero $[1,3]$. Esto es utilizamos el comando: *=ALEATORIO.ENTRE(1;3)*
2. Cree otra variable llamada *Segunda_Bola*, a la cual se le define un random de 1000 valores en el intervalo entero $[1,3] - Primera\_Bola$. Así:*=SI(A2=1;ELEGIR(ALEATORIO.ENTRE(1;5);2;3;4;5;6;);SI(A2=2;ELEGIR(ALEATORIO.ENTRE(1;5);1;3;4;5;6);ELEGIR(ALEATORIO.ENTRE(1;5);1;2;4;5;6)))*
3. Se obtiene, de los 1000 valores, la proporción de extracciones en las que la segunda bola fue roja dado que la primera fue roja. Así: *Proporción de rojas=CONTAR.SI(B2:B1000;"<=3")/1000*

II Parte

1. En un nuevo archivo, cree una variable llamada *Primera_Bola*, a la cual se le define un random de 1000 valores en el intervalo entero $[1,6]$. Esto es utilizamos el comando: *=ALEATORIO.ENTRE(1;6)*

2. Cree otra variable llamada *Segunda_Bola*, a la cual se le define un random de 1000 valores en el intervalo entero $[1,6] - Primera\_Bola$. Así: *=SI(A2=1;ELEGIR(ALEATORIO.ENTRE(1;5);2;3;4;5;6;);SI(A2=2;ELEGIR(ALEATORIO.ENTRE(1;5);1;3;4;5;6);SI(A2=3;ELEGIR(ALEATORIO.ENTRE(1;5);1;2;4;5;6);SI(A2=4;ELEGIR(ALEATORIO.ENTRE(1;5);1;2;3;5;6);SI(A2=5;ELEGIR(ALEATORIO.ENTRE(1;5);1;2;3;4;6);ELEGIR(ALEATORIO.ENTRE(1;5);1;2;3;4;5))))))*

3. Se obtiene, de los 1000 valores de la segunda extracción, la cantidad total de bolas que resultaron ser rojas. Esto es: *Total Rojas Segunda Extracción = CONTAR.SI(B2:B1000;"<=3")*

4. Se define una nueva variable llamada *Ambas_Rojas*, que será la que contabilice las ocasiones en las que en ambas extracciones resultaron bolas rojas. Para cada pareja de extracciones se le asigna a esta variable un "1" si ambas resultaron ser rojas o un "0" en caso contrario. Así: *=SI(Y(A2<4;B2<4);1;0)*
5. Se obtiene, de los 1000 valores anteriores, la cantidad total de parejas en las que ambas extracciones resultaron ser rojas. Esto es: *Total Primera y Segunda Rojas = CONTAR.SI(C2:C1000;"=1")*

6. Se obtiene, de los 1000 valores, la proporción de extracciones en las que la primera bola fue roja dado que la segunda fue roja. Así: $Proporción = \frac{TotalPrimeraySegundaRojas}{TotalRojasSegundaExtracción}$

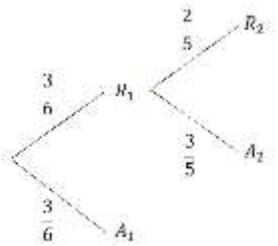
Solución teórica

Tómese

R_1: bola roja la primera extracción y R_2: bola roja la segunda extracción

I parte

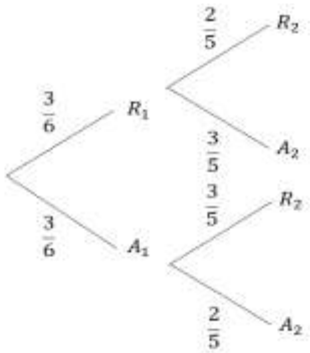
Se pide $P(R_2 \mid R_1)$



$$P(R_2 \mid R_1) = \frac{2}{5}$$

II parte

Se pide $P(R_1 \mid R_2)$

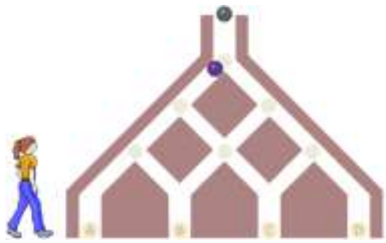


$$P(R_2) = P\big((R_1 \cap R_2) \cup (A_1 \cap R_2)\big)$$
$$= \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{2}$$
$$P(R_1 \mid R_2) = \frac{P(R_1 \cap R_2)}{P(R_2)}$$
$$= \frac{P(R_1)P(R_2 \mid R_1)}{P(R_2)}$$
$$= \frac{\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}$$

Problema 4

Simulación física

A) Suponga que tenemos un circuito como el mostrado en la figura adjunta y que por la parte superior se lanzan 100 bolitas.



Tomado de García (2009)

Responda las siguientes preguntas:

1. Escriba una posible distribución de la cantidad de bolitas en cada uno de los contenedores (A, B, C, D) una vez que se han lanzado las 100 bolitas.
2. ¿Si el experimento de lanzar 100 bolitas a través del circuito del laberinto se repitiera en igualdad de condiciones en dos ocasiones crees posible que se obtenga el mismo número de bolitas en cada contenedor? Justifica tu respuesta.

B) Suponga que tenemos un circuito como el mostrado en la figura adjunta y que por la parte superior se lanzan 100 bolitas.

Tomado de García (2009)

Responda las siguientes preguntas:

3. ¿En cuál o cuáles de los depósitos (A, B, C, D) caerán más bolitas? Justifica la respuesta.
4. ¿Si el experimento de lanzar 100 bolitas a través del circuito del laberinto se repitiera en igualdad de condiciones en dos ocasiones crees posible que se obtenga el mismo número de bolitas en cada contenedor? Justifica tu respuesta.
5. Realiza tu propio modelo de un circuito sencillo, en el cual haya tres contenedores, de tal manera que el contenedor del centro contenga a la bolita el 50% de las veces que se realice un experimento y que los contenedores que los extremos la contengan aproximadamente un 25% de las veces que se realice el experimento. Utilice el espacio que se ofrece a continuación para realizar el dibujo del laberinto.

Simulación computacional

El archivo circuitosbolas.swf (tomado de García (2009)), has doble clic sobre él para iniciar la aplicación. Utilice los botones para cambiar los circuitos.

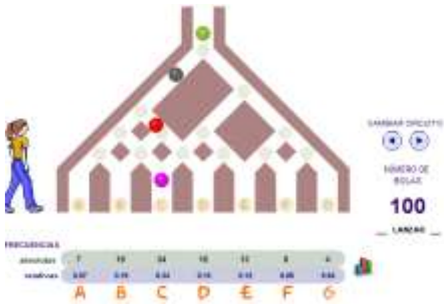
Busque el circuito de la sección A y B de la primera parte (se encuentra en el tercero y cuarto escenario y se puede acceder a él haciendo clic dos veces sobre el botón). Realice el experimento y lance 100 bolitas a través del circuito, para detener el programa debe hacer clic sobre PARAR y responda las siguientes preguntas.

1. Completa la siguiente tabla (una para cada circuito) con los datos obtenidos en tu experimento y termina de llenarla con los resultados de tus compañeros

Frecuencia absoluta obtenida al realizar 100 repeticiones del experimento

	Experimento									
Contenedor	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10
A										
B										
C										
D										

Un ejemplo de experimento es:



Tomado de García (2009)

2. Compare los resultados obtenidos en la simulación física y computacional.

Referencias bibliográficas

Burrill, G. (2002). Simulation as a tool to develop statistical understanding. En B. Phillips (Ed). *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics.*Cape Town South Africa.

Inzunsa, S. (2006). Significados que estudiantes universitarios atribuyen a las distribuciones muestrales en un ambiente de simulación computacional y estadística dinámica. Tesis doctoral no publicada. CINVESTAV-IPN. México.

García, J. (2009). *Laboratorio básico de azar, probabilidad y combinatoria. Instituto de Tecnologías Educativas, Ministerio de Educación, España*. www.ite.educacion.es. Consultado 15-7-2011.

Lipson, K. (2002). The role of computer based technology in developing understanding of the concept of sampling distribution. En B. Phillips (Ed.). *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics.*Cape Town South Africa.

Ministerio de Educación Pública. (2012). *Programas de estudio en matemáticas*. República de Costa Rica. http://www.mep.go.cr/despachos/Anuncio.aspx. Consultado 10-9-2012.

Sánchez, E. (2002). Teacher's beliefs about usefulness of simulation with the educational software Fathom for developing probability concepts statistics classroom. En B. Phillips (Ed.). *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics.*Cape Town South Africa.

Shaughnessy, M. (1992). Research in Probability and Statistics: Reflections and Directions. En Grouws, D. A.(Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* New York. Macmillan Publishing Company, pp. 465-494.