SITUAÇÕES DIDÁTICAS ENVOLVENDO A INTEPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO TEOREMA DA FUNÇÃO IMPLICITA: ANÁLISES PRELIMINARES E ANÁLISE *A PRIORI*

Francisco Regis Vieira Alves
fregis@ifce.edu.br
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará – IFCE

Tema: Pensamento Matemático Avançado
Modalidad: CB
Nivel educativo: Terciário – Universitário
Palabras clave: Teorema, Função Implícita, Tecnologia, Visualização.

Resumen
O Teorema da Função Implícita ocupa parte invariante da abordagem de qualquer livro de Cálculo. O caráter de injunção deste quadro diz respeito ao predomínio de tarefas algorítmico-manipulatórias, que relegam o entendimento conceitual e negligenciam o significado gráfico-geométrico de simbologias carregadas e, de modo standard, requeridas em tarefas. Diante destes entraves, adotamos a metodologia de pesquisa chamada de Engenharia Didática. Por tanto, descrevemos apenas as etapas de preparação, que antecedem uma sequência de ensino. Deste modo, descrevemos as fases de análise preliminar, fase de concepção e análise a priori. Dentre os objetivos atingidos, a partir dos dados coligidos e analisados com apoio nesse design de investigação, destacamos: os livros de Cálculo no Brasil priorizam o caráter algorítmico-manipulatório das atividades, a exploração didática da tecnologia viabiliza a exploração da visualização. Por fim, com amparo nesses resultados, podemos aplicar as atividades estruturadas em situações de sala de aula.

1. Introdução

A ideia da solução de uma equação do tipo $f(p,x)=0$ (*), para $x=s(p)$ (x como uma função de p) envolve um importante papel no contexto da Análise Clássica. A função obtida, por intermédio dessa hipótese e acrescidas de outras condições, é chamada de função definida implicitamente pela equação (*). Reparemos ainda a ideia próxima de resolver $f(x)=y$ para x como função de y, concerne à inversão da função f.

Em determinadas circunstâncias, em que existe uma função implícita ou uma inversa, necessitamos de propriedades como diferenciabilidade e a continuidade de lipschitz (DONTCHEV & ROCKAFELLER, 2009, p. 82). Esse problema admite um tratamento eminentemente formal e, acrescentamos, lógico-simbólico; padrão *standard* dispensado pelos livros no Brasil. Com efeito, consideremos o sistema (*)$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x^2+y^2-y=0 \end{cases}$ e, perguntamos: (a) Há alguma solução para tal sistema? (b) O que garante sua unicidade? (c) Temos alguma função implícita determinada por tais relações?

Quando restringimos todo nosso olhar e atividade ao quadro analítico, impomos, sem muito detalhamento que $x^2+y^2-y=0 \to x^2+(1-x^2-z^2)-\sqrt{(1-x^2-z^2)}=0$. Daí, efetuando alguns cancelamentos, resolveremos ainda $(1-z^2)=\sqrt{(1-x^2-z^2)} \leftrightarrow 1-2z^2+z^4=1-x^2-z^2 \leftrightarrow x^2=z^2-z^4$. A primeira dificuldade é que a equação $x^2=z^2-z^4$ está no plano xOz. Em seguida, de modo padrão, verificamos as condições de diferenciabilidade e descrevemos, se possível, a derivada de 1ª de uma função, descrita de modo implícito pela equação $x^2=z^2-z^4$. Por esta via, todo processo se encerra e a percepção e visualização é negligenciada.

Vamos agora considerar outra possibilidade. Por esta via, a tecnologia desempenha um papel fundamental por meio da possibilidade de explorarmos nossa capacidade de percepção e da visualização. Dai, na figura 1, exploramos as potencialidades do *software CAS Maple*. A primeira pergunta tem resposta imediata, ou seja, temos solução para o sistema (*). Ademais, mais de uma solução, na verdade, na curva que se assemelha a um "8", contamos com soluções, nas vizinhanças dos pontos em que tivermos o gráfico de uma função. Reparemos ainda o caráter de suavidade da curva descrita por $x^2=z^2-z^4$, que representa, justamente, a interseção de dois objetos. Observamoa que, imbuídos de uma atividade investigativa, restrita apenas ao caráter analítico, nunca adquiríamos tal sensação qualitativa perceptual, atinente ao comportamento (suave) da curva, muito menos do entendimento de sua descrição gráfico-geométrico no IR^3 e a localização de pontos de multiplicidade.

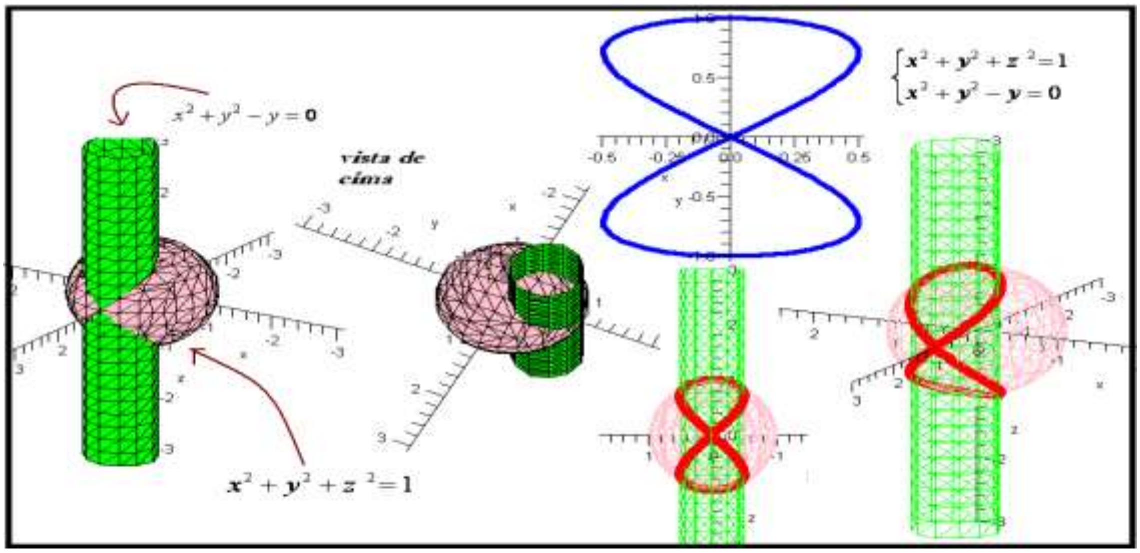

Figura 1. Identificação e visualização de propriedades gráficas possibilitadas pelo *software*

No próximo segmento, discutiremos e descreveremos o *design* de investigação que apoiará as fases de uma investigação que antecedem a experimentação em sala de aula. Em seguida, discutiremos um pouco do cenário de abordagem do Teorema da Função Implícita – TFI nos livros didáticos brasileiros e possibilidades para a estruturação didática de situações de ensino replicáveis em sala de aula.

2. Engenharia Didática

A metodologia de pesquisa nominada Engenharia Didática (ARTIGUE, 1996), tem sido utilizada *design* de investigação, numa perspectiva de complementaridade (ARTIGUE, 2008) com outras teorias, desde a década de 80. Sublinhamos o estudo de Camacho & Aguirre (2001) que discute um desenho didático para a apresentação do conceito de limite. Esses autores dão ênfase nas etapas de *analise preliminar* e *análise a priori*. De modo semelhante, neste artigo, escolhemos o TFI como objeto matemático investigado.

Ademais, diante de sua relevância e lugar didático garantido, nas discussões desenvolvidas em disciplinas dos cursos de graduação no Brasil, sobretudo, nos cursos de licenciatura em Matemática, assumimos a premissa sobre a relevância da descrição/estruturação de situações didáticas que promovam a visualização, com vistas a um melhor entendimento conceitual, suavizando o predomínio algébrico-analítico.

Desde que, vista como metodologia de pesquisa, a Engenharia Didática – ED é caracterizada como um esquema experimental com base em realizações didáticas em sala de aula, adotamos a perspectiva de Almouloud (2007, p. 171), quando fornece a descrição das seguintes etapa: (i) análise preliminar ou análise prévia; (ii) construção das situações e análise *a priori*. Daí, em (i), tencionamos descrever o estudo da organização matemática e da organização didática do objeto matemático. Em (ii), realizaremos a descrição das situações problema, a determinação das escolhas das variáveis didáticas locais. No próximo segmento, acentuaremos alguns dos aspectos históricos envolvidos com o tema. Tais elementos compõem a análise prévia.

3. Sobre o Teorema da Função Implícita

Nas análises prévias, identificamos problemas de ensino e aprendizagem relacionados com o objeto de estudo. De modo inicial, nos atemos ao estudo da gênese histórica do saber e suas manifestações antigas e contemporâneas, ou seja, seu ensino atual. Ainda nesta fase, discutiremos, com brevidade, uma análise dos livros didáticos de Cálculo. Com respeito ao contexto histórico, registramos no livro de Krantz (2001) uma detalhada descrição histórica sobre a evolução do TFI. Neste sentido, Krantz (2001, p. 7) destaca que “pensado com o viés de um argumento heurístico, seu resultado é bastante simples, o teorema da função implícita é uma parte fundamental e poderosa dos fundamentos da matemática.”. Para tanto, esse autor aponta a contribuição de matemáticos, tais como: L. Euler, I. Newton, L. Lagrange, A.Cauchy, etc.

Hodiernamente, ao consultar e comparar as abordagens adotadas por livros de Cálculo no Brasil, diferentemente das ideias em sua gênese, identificamos a ênfase nas manipulações e aplicações algebrizadas do TFI. Observamos, como tônica geral, a requisição de tarefas (GUIDORIZZI, 2010; STEWART, 2001) que exigem antes uma habilidade algorítmico-manipulatória específica, do que a necessidade de uma interpretação, sobretudo, geométrico-gráfica, dos objetos e propriedades investigadas. Noções específicas e não triviais, no que concerne ao seu entendimento, como: existência, unicidade, condições (hipóteses) necessárias, são negligenciadas. Tais elementos constituem parte da analise matemática desse saber e que devem ser reconsiderados na etapa seguinte.

No próximo segmento, apresentamos a construção das situações e análise *a priori*. Vale observar que, em sua elaboração, a visualização não é elemento secundário condicionante da estratégia de resolução a ser empregada. Outrossim, muitos dos elementos de ordem qualitativa nas situações podem ser observados e readaptados a outras situações de ensino, todavia, na restritas a lápis/papel.

4. Análise *a priori* das situações problema

Nesta seção apresentamos algumas situações problema apoiadas pela tecnologia informática. Artigue (2003, p. 130) sugere, com veemência, uma atividade matemática profissional amparada em tais tecnologias. Vejamos a primeira situação.

Situação 1: Considere a figura 2 que exibimos abaixo. Nela, admitimos uma região de interseção descrita pelo sistema $\begin{cases} x^2+y^2-z=0 \\ z=3 \end{cases}$. Divisamos o vetor $v=(2\sqrt{2},2,0)$ (figura 2), então pedimos que: (i) descrever analiticamente e geometricamente a interseção desse sistema; (ii) relacionar o vetor $v=(2\sqrt{2},2,0)$ com o comportamento do gradiente no ponto $(\sqrt{2},1,3)$; (iii) descrever o significado do símbolo $\partial f/\partial y\left(\sqrt{2},1\right)$, onde $f(x,y)=x^2+y^2$; (iv) é possível obter o valor da derivada de uma função g descrita implicitamente?

Comentário: Na figura 2, o solucionador deverá suspeitar que $v=(2\sqrt{2},2,0)$ é na verdade $\nabla f(\sqrt{2},1)$, devido suas propriedades sobre a curva de nível (i) $x^2+y^2=3$.

Ademais, $\nabla f(x,y)=(2x,2y)$ é o vetor gradiente e que $\left(\sqrt{2},1\right)$ é solução para o sistema e que $\nabla f(\sqrt{2},1)=(2\sqrt{2},2,0)=v$ (ii) como é indicado acima. Mas ainda $\partial f/\partial y\left(\sqrt{2},1\right)\neq 0$. Pelas condições do TFI, existe uma função definida na vizinhança do ponto $x=\sqrt{2}$, com $f(x,g(x))=3$ e $g'(\sqrt{2})=-f_x(\sqrt{2},1)\big/ f_y(\sqrt{2},1)=-\sqrt{2}$.

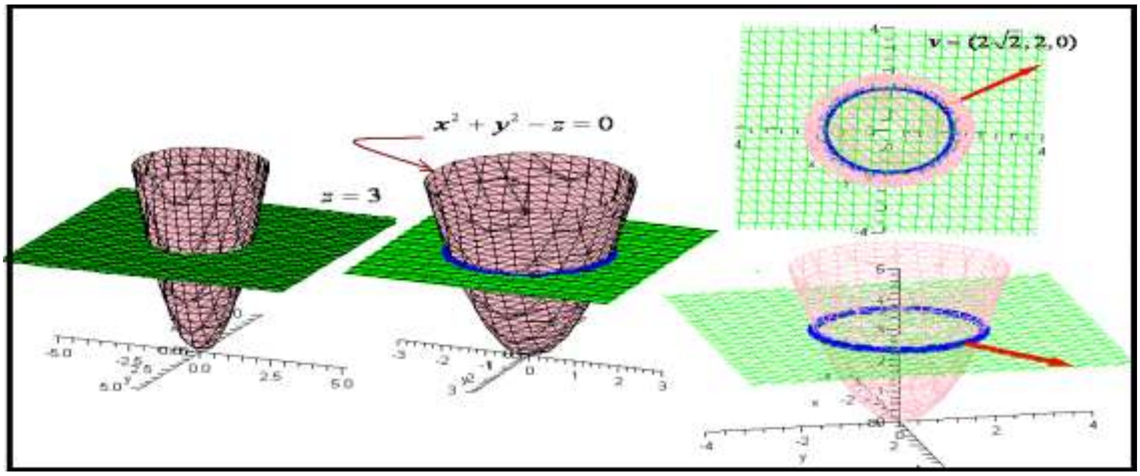

Figura 2. Descrição geométrico-gráfica envolvendo a visualização da curva de interseção e propriedades do vetor gradiente no espaço

Situação 2: Consideremos a seguinte equação $xyz-yz^4+x^2y=2$. Interpretar que tipo de objeto é determinado pela mesma e, no ponto $(0,-2,1)$ decidir se podemos discriminar uma função diferenciavel numa vizinhança deste ponto.

Comentários: De modo *standard*, definiremos $f(x,y,z):=xyz-yz^4+x^2y$ e, deste modo, podemos interpretar a equação $f(x,y,z)=k$, com $k\in IR$ sendo as superfícies de nível determinada para cada $k\in IR$. Mas, estamos interessados neste caso pelo nível $k=2$, todavia, exibimos na figura, para os níveis $k=6,8,12$. Na mesma figura, no lado direito (canto superior) indicamos a localização topológica do ponto $(0,-2,1)$.

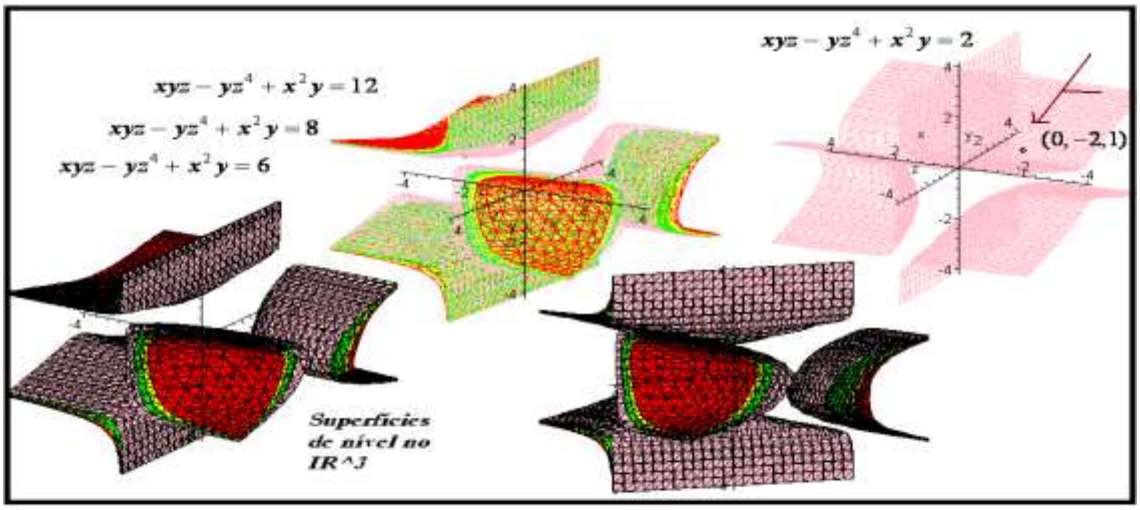

Figura 3. Visualização das superfícies de nível determinadas pela função

Reparemos que $f(0,-2,1)=2$ e suas derivadas parciais são descritas por $\left\{ \partial f \big/ \partial x = yz+2xy \right.$; $\partial f \big/ \partial y = xz - z^4 + x^2 ; \partial f \big/ \partial y = xy - 4yz^3 \therefore \partial f \big/ \partial y (0,-2,1) = 8 \neq 0$. Daí, pelo TFI, obtemos uma vizinhança do $(0,-2,1)$, digamos $B_r(0,-2,1) \subset IR^3$ de modo que podemos z pode ser descrita como função diferenciável das variáveis ‘x’ e ‘y’. Em seguida calculamos $\left\{ \partial z \big/ \partial x (0,-2,1) = -\frac{f_x(0,-2,1)}{f_z(0,-2,1)} = -\frac{-2}{8} = \frac{1}{4} \right.$ e $\partial z \big/ \partial y (0,-2,1) = -\frac{f_y(0,-2,1)}{f_z(0,-2,1)} = -\frac{-1}{8}$. Tais valores nos permitem determinar a posição de um plano, que passa no ponto $(0,-2,1)$. Na figura 4, com o auxilio do *CAS Maple*, indicamos a vizinhança aberta (uma bola amarela), na qual, todo o aparato matemático previsto pelo TFI está sendo empregado. Na figura 4, adquirimos o sentido topológico dessa situação.

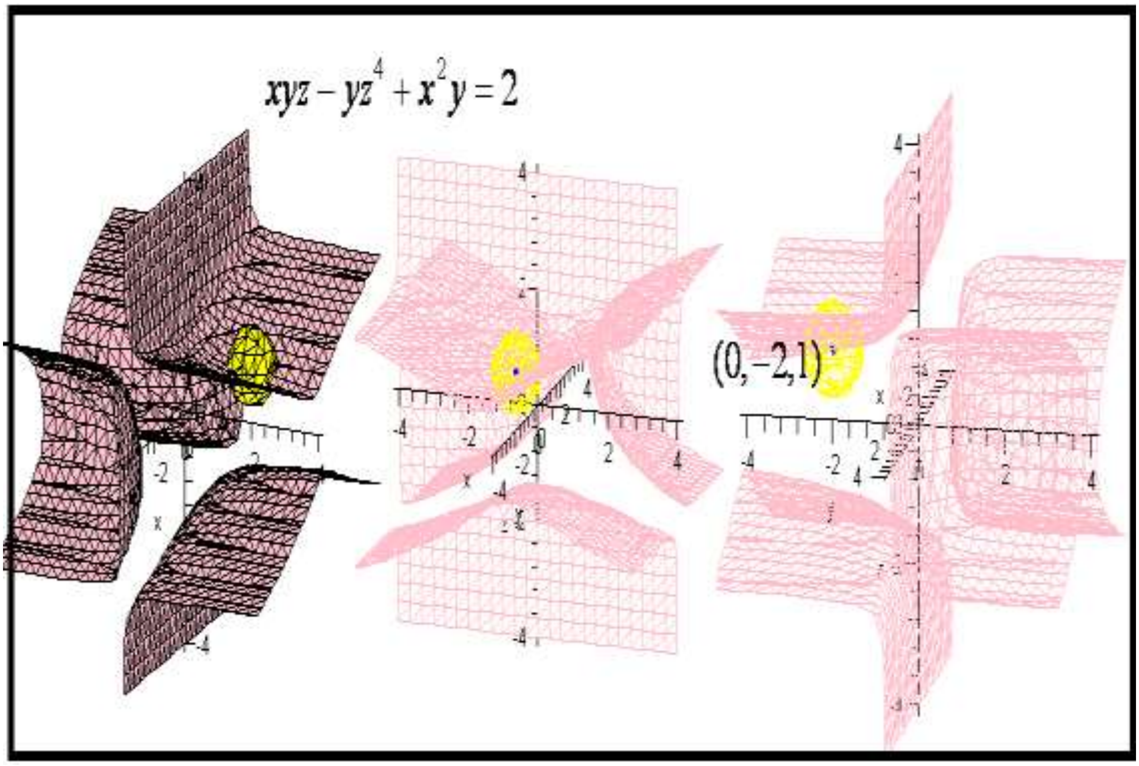

Figura 4. Visualização da região do espaço, na qual, obtemos uma vizinhança do ponto escolhido

Vale comentar que o símbolo $\partial z / \partial x (0,-2,1) = 0,25$ é a declividade de uma reta tangente à superfície de nível no ponto $(0,-2,1)$. Podemos descrever esta reta pela equação $(z-1) = 0.25(x-0)$ (fig. 5). Enquanto que $\partial z / \partial y (0,-2,1) = 1/8$ é a declividade de uma reta tangente à superfície de nível no ponto $(0,-2,1)$. Podemos descrever esta reta pela equação $(z-1) = \frac{1}{8}(y+2)$. Podemos, agora, determinar o vetor gradiente de $\nabla f(x,y,z) = (yz+2xy, xz - z^4 + x^2, xy - 4yz^3) \therefore \nabla f(0,-2,1) = (-2,-1,8)$ (em azul).

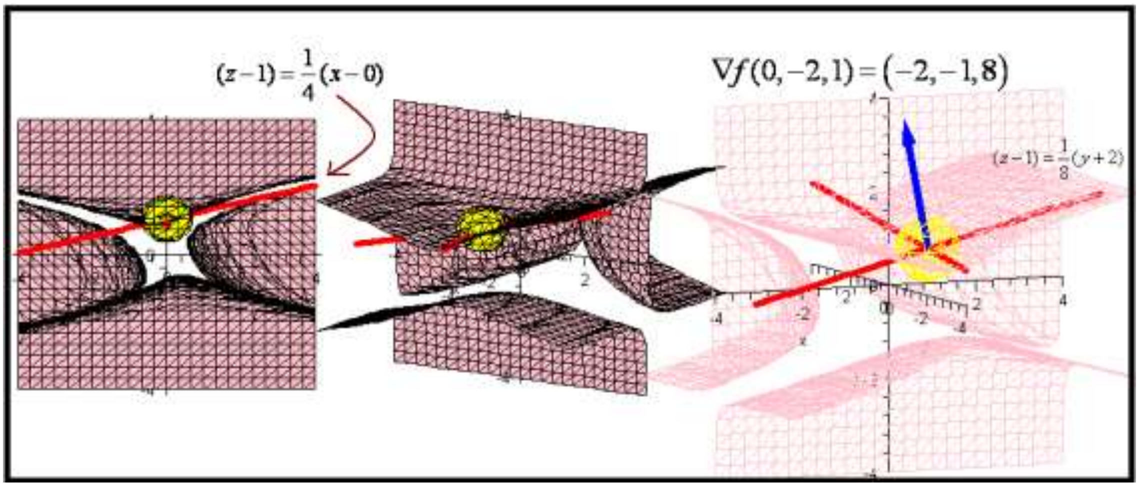

Figura 5. Determinação das direções que permitem determinar um plano tangente no ponto

Evidenciamos nessas situações que a estratégia de solução e a atenção do solucionador de problemas são fortemente originadas, na visualização e percepção das propriedades gráfico-geométricas. Tal abordagem reduz a hegemonia de um ensino formalista, apontado e criticado por especialistas (ARTIGUE, 2003). Para concluir esta seção, o entendimento da organização matemática das situações, apoiada na tecnologia, proporciona antever as possíveis estratégias e, até mesmo, equívocos e o surgimento de falsas concepções dos aprendizes.

5. Considerações finais

No *locus* acadêmico os rituais de ensino tendem a privilegiar o caráter algoritmizado dos procedimentos. Uma concepção limitada e questionável que atribui uma razão suficiente, segunda a qual, para o entendimento do aprendiz, exige-se o simples trato ou emprego de teoremas (Lozada-Crus, 2012, p. 74). Por outro lado, para a descrição de atividades que detêm a possibilidade de suavizar ou, pelo menos evitar tal caráter, é necessário um bom planejamento para a preparação de uma aula. Neste sentido, nos apoiamos neste artigo nas etapas iniciais previstas pela ED (análise preliminar e análise *a priori*). Nas análises *a priori*, vimos que a exploração da tecnologia, em nosso caso do *CAS Maple*, proporciona e mediação de um conhecimento mobilizado a partir da visualização e percepção de propriedades topológicas e gráficas. Neste sentido, teremos a possibilidade de explorar nos aprendizes não apenas a mobilização e elaboração de argumentos e sentenças proposicionais não apenas fundadas na lógica formal, mas também, na heurística da visualização, caráter marcante no surgimento das ideias do Cálculo (EDWARDS, 1979).

Por fim, acentuamos que nas análises preliminares (análise didática e matemática), o olhar do ponto de vista histórico, poderá fornecer elementos ao professor, no sentido da significação dos problemas. Neste sentido, em consonância com a gênese de muitos conceitos em Matemática, a visualização e os argumentos informais e heurísticos são fundamentais nas etapas primeiras de investigação. Ademais, apesar de que em alguns livros registramos o esforço didático dos autores de livros, no sentido de suavizar a algebrização das atividades (BORTOLOSSI, 2009). De maneira geral, entretanto, constituem esforços isolados, que influencia ainda de modo tímido o ensino na academia, acentuadamente formal (ARTIGUE, 2003, p. 119).

Referencias bibliográficas

Almouloud, S. Ag. (2007). *Fundamentos da Didática da Matemática*. São Paulo: Editora UFPR.

Artigue, M. (1996). Ingénierie didactique. En Brun, J. *Didactiques des Mathématiques*. Paris : Délachaux et Niestle, p. 243-263.

Artigue, M. (2003). O que se puede aprender de la Investigación Educativa en el Nível Universitário. In: *Boletín de la Asociation Matemática Venezolana*. v. 10. nº 2. pp. 117-134.

Artigue, M. (2008). Didactical design in Mathematics Education. En Winslon, Carl. (ed.) *Nordic Research in Mathematics Education*. NORMA08, p. 7-17. https://www.sensepublishers.com/files/9789087907839PR.pdf. Consultado 20/02/2012.

Bortolossi, H. (2009). *Cálculo Diferencial a Várias Variáveis: uma introdução a Teoria da Otimização*. Rio de Janeiro: PUC/RJ.

Camacho, A. & Aguirre, M. (2001). Situación didática del concepto de límite infinito: análisis preliminar. *Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa*. Novembro, v. 4, nº 3, p. 237-265.

Dontchev, A., L. & Rockafeller, T. R. (2009). *Implicit functions and solutions Mappings: a view from variational analysis*. New York: Springer.

Edwards, C. H. (1979). *The historical development of Calculus*. New York: Springer.

Guidorizzi, H. (2010). *Cálculo*. São Paulo: LTC.

Lozada-Cruz, G. (2012). The simple application of the implicit function theorem. *Boletin de la Asociatión Matemática Venezolana. v. XIX, nº1.* Acessado em 2 fev. 2013. Disponivel: http://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol19/BAMV_XIX-1_p071-076.pdfhttp://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol19/BAMV_XIX-1_p071-076.pdf.

Krantz, S. G. & Parks, H. R. (2001). *The implicit function theorem: history, theory and application*. Boston: Birkhaüser.

Stewart, J. (2001). *Cálculo*. v. II, São Paulo: Thomson.