SEQUÊNCIA DE ENSINO PARA O TEOREMA DE SCHWARZ: ANÁLISE PRELIMINAR E ANÁLISE A PRIORI

Francisco Regis Vieira Alves
fregis@ifce.edu.br
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará - IFCE

Tema: Pensamento Matemático Avançado
Modalidade: CB
Nivel educativo: Terciário – Universitário
Palabras chave: Teorema de Schwarz, Engenharia Didática, Tecnologia, Ensino.

Resumo
Sob determinadas hipóteses, quando consideramos funções em duas variáveis reais, a ordem da derivação de suas variáveis é irrelevante e conduzem ao mesmo resultado. Tal fato é relatado e apresentado pelos autores de livros de Cálculo no Brasil como Teorema de Schwarz. Assim, diante dos entraves relatados na literatura, descrevemos as etapas de análise preliminar e analise a priori, previstas na metodologia de pesquisa conhecida como Engenharia Didática. A sistematização e detalhamento destas duas etapas de investigação nos auxiliaram na estruturação do desenho didático de situações-problema que evitam determinados entraves, apontados por especialistas. Ademais, o uso da tecnologia pode impulsionar a modificação da mediação deste objeto em sala de aula, na medida em que, as atividades visão não apenas a valorização do caráter manipulatório/ algoritmizado. Por fim, com origem nessas etapas de pesquisa, inserimos a discussão da adoção de uma proposta de ensino que pode ser usada na fase de experimentação.

1. Introdução

Apresentamos neste escrito, a descrição das etapas iniciais (análise preliminar e análise *a priori*) de um estudo teórico, apoiado na sistematização investigativa da Engenharia Didática - ED. Quando restringimos nossa atenção às duas etapas iniciais, o *design* de investigação proposto pela ED possibilita a sistematização de etapas para a preparação didático-metodológica do professor, que antecedem o momento efetivo da mediação em sala de aula.

Assim, com o tema Teorema de Schwarz, discutiremos e descreveremos alguns elementos atinentes a certas situações envolvendo o funcionamento de contraexemplos em Matemática. Reparemos que a exploração do *CAS Maple* funcionará como elemento impulsionador para outras formas de mobilização do saber matemático, com ênfase na visualização e percepção de determinadas propriedades gráfico-geométricas.

2. Engenharia Didática

A metodologia de pesquisa nominada Engenharia Didática (ARTIGUE, 1996), tem sido utilizada *design* de investigação, numa perspectiva de complementaridade (ARTIGUE, 2008) com outras teorias, desde a década de 80. Sublinhamos o estudo de Camacho & Aguirre (2001) que discute um desenho didático para a apresentação do conceito de limite. Esses autores dão ênfase nas etapas de *analise preliminar* e *análise a priori*.

De modo semelhante, neste artigo, escolhemos um teorema que prevê as condições de comutatividade das derivadas mista (em nosso caso, para funções $z = f(x, y)$) como objeto investigado. Ademais, diante da relevância do citado teorema, e lugar didático garantido nas discussões desenvolvidas em disciplinas dos cursos de graduação no Brasil, sobretudo, nos cursos de licenciatura em Matemática, assumimos a premissa sobre a relevância da descrição de situações didáticas que promovam a visualização, com vistas ao seu melhor entendimento conceitual, e não apenas lógico-formal (ALVES, 2012b, p. 125).

Desde que, vista como metodologia de pesquisa, a Engenharia Didática – ED é caracterizada como um esquema experimental com base em realizações didáticas em sala de aula. Além disso, nos apoiando em Almouloud (2007, p. 171), optamos pela descrição das seguintes etapa: (i) análise preliminar ou análise prévia; (ii) construção das situações e análise *a priori*. Daí, em (i), tencionamos descrever o estudo da organização matemática e da organização didática do objeto matemático. Em (ii), realizaremos a descrição das situações problema, a determinação das escolhas das variáveis didáticas locais. Por fim, salientamos que, de acordo com Almouloud (2007, p. 176), a análise matemática envolve a possibilidade de “identificar os métodos e/ou estratégias de resolução de cada situação, evidenciando os conhecimentos e saberes matemáticos envolvidos.”. Passaremos, então, a etapa de análises preliminares.

3. Análise *a priori* e concepção de situações

Nas situações doravante propostas, indicaremos elementos, descreveremos uma via de abordagem que evita os processo algébricos manipulatórios, recorrentemente identificados nos livros de Cálculo no Brasil (ALVES, 2011; ALVES & BORGES NETO, 2011). Neste sentido, concordamos com Alves & Borges Neto (2011, p. 10), quando apontam a hegemonia do caráter dos procedimentos e aplicações, em detrimento do caráter conceitual, como característica marcante dos autores de livros de Cálculo no Brasil. Desde modo, nossas *análises prévias* envolvidos com este saber, apontam indicadores que podem atuar como entraves, em abordagens que se pautam, apenas, nesses compêndios tradicionais de Cálculo (GUIDORIZZI, 2010; STEWART, 2001). Deste modo, com o intuito de superar tais entraves, estruturamos duas situações.

(1) Decidir a classe de diferenciabilidade e as condições de aplicação do teorema de Schwarz em relação à seguinte função $f(x,y)=xy\dfrac{(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)}$.

Comentários: Na figura abaixo indicamos as regiões do espaço onde estão definidos os gráficos de $f(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$. Esse primeiro exemplo foi escolhido, tendo em vista, que o mesmo constitui, aparentemente, o principal contraexemplo fornecido pelos autores de livros (ALVES, 2011, p. 210). Nossa discussão deverá evitar, de modo precipitado, a constatação do principal fato salientado por esses autores, ou seja, a constatação de que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=1\neq -1=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$.

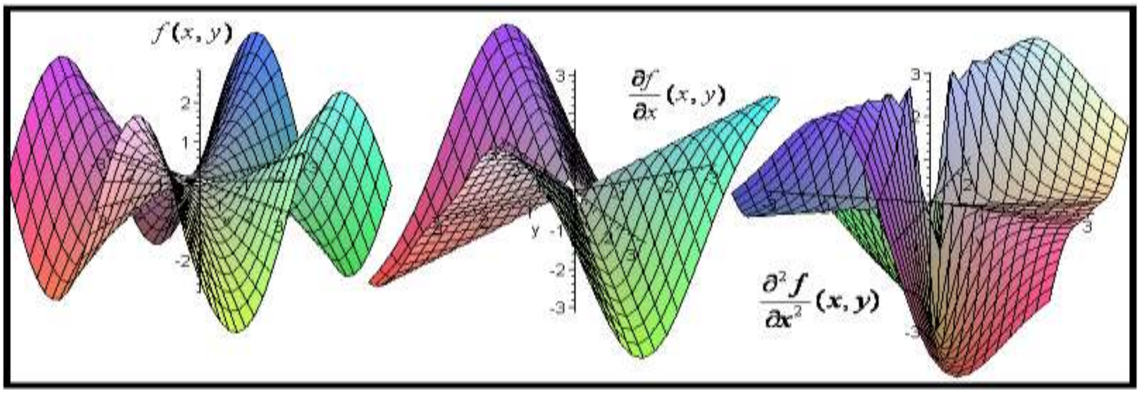

Figura 1. Descrição gráfico-geométrica da função e suas derivadas de 1ª e 2ª em relação à variável x

Na tabela 1 exibimos a descrição analítica das derivadas parciais de 1ª e 2ª ordem relativas à função $f(x,y)$. Determinados teoremas, cuja demonstração é, em muitos casos, omitida, podem ser aplicados nos termos que apresentamos, como as seguintes propriedades $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial x}(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial x\partial x}(0,0)$.

Tabela 1: Descrição analítica das derivadas de 1ª e 2ª ordem da função.

	Descrição analítica das derivadas com auxílio do *software Maple*
f_x	$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(f(x,y)\right)=\dfrac{y(x^2-y^2)}{x^2+y^2}+\dfrac{2x^2y}{x^2+y^2}-\dfrac{2x^2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$
f_{xx}	$\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left(f(x,y)\right)=\dfrac{6yx}{x^2+y^2}-\dfrac{6yx(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}-\dfrac{8x^3y}{(x^2+y^2)^2}+\dfrac{8x^3y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}$
f_y	$\dfrac{\partial}{\partial y}\left(f(x,y)\right)=\dfrac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2}-\dfrac{2xy^2}{x^2+y^2}-\dfrac{2xy^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$

f_{yy}	$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(f(x,y)) = -\frac{6yx}{x^2+y^2} - \frac{6yx(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} + \frac{8xy^3}{(x^2+y^2)^2} + \frac{8xy^3(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}$
$f_{xy} = f_{yx}$	$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}(f(x,y)) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - \frac{2y^2}{x^2+y^2} - \frac{2y^2(x^2-y^2)}{x^2+y^2} + \frac{2x^2}{x^2+y^2} - \frac{2x^2(x^2-y^2)}{x^2+y^2} + \frac{8x^2y^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}$

Fonte: Elaboração do autor.

Uma verificação negligenciada diz respeito à análise da classe de diferenciabilidade desta função. De fato, usando a substituição por coordenadas polares, verificamos que $\lim_{(\rho\cos(\theta),\rho sen(\theta))\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos(\theta),\rho sen(\theta)) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\lim_{(\rho\cos(\theta),\rho sen(\theta))\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos(\theta),\rho sen(\theta)) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

Por outro lado, $\lim_{(x,x)\to(0,0)} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(f(x,x)) \neq 0 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(f(0,0))$ e $\lim_{(y,y)\to(0,0)} \frac{\partial^2}{\partial y^2}(f(x,x)) \neq 0 = \frac{\partial^2}{\partial y^2}(f(0,0))$. Tais limites devem indicar elementos aos estudantes concluir que $f \in C^1$ e $f \notin C^2$, onde C^1 representa a classe de diferenciabilidade das derivadas de 1ª ordem contínuas. Enquanto que $f \notin C^2$ indica que suas derivadas de 2ª não são contínuas. Na figura 2, mostramos que as derivadas de 1ª ordem são distintas (fig. 2, lado direito) do ponto de vista gráfico-geométrico.

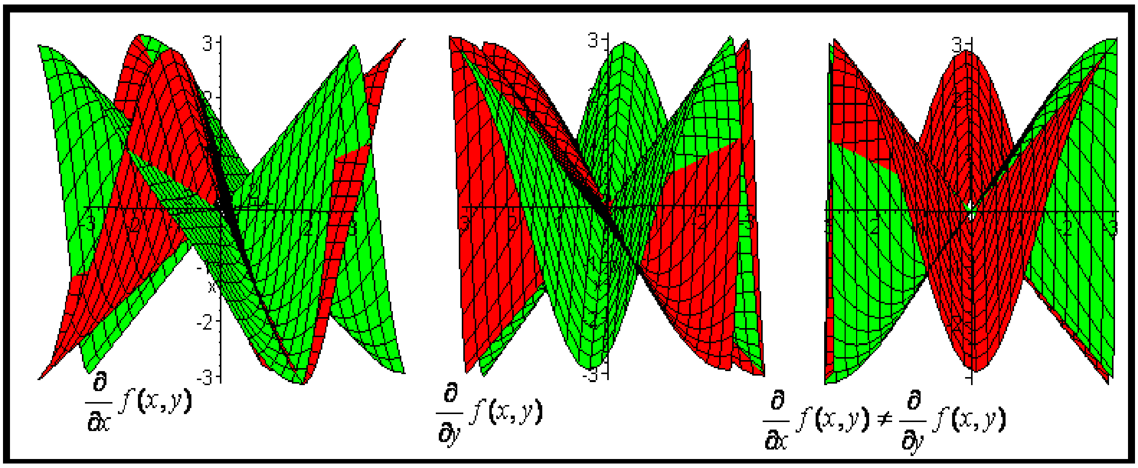

Figura 2. Descrição gráfico-geométrica das derivadas parciais de 1ª ordem

Ainda com base nos dados que exibimos na tabela 1, podemos também verificar que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$ e $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(0,0)$, com o uso de coordenadas polares. Vale observar o argumento empregado em Alves & Borges Neto (2011), em que escrevem $f(x,y) = xy\frac{(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)} = xy \cdot g(x,y)$, onde $g(x,y)$ é limitada. A vantagem desse argumento diz respeito à possibilidade de avaliar e descrever

$\partial^2 f/\partial x\partial y(0,0)$ e $\partial^2 f/\partial y\partial x(0,0)$, usando limites interados. Na próxima situação, abordaremos um exemplo histórico, discutido por Hairer & Wanner (2008, p. 328).

(2) Decidir as condições de aplicação do teorema de Schwarz em relação à seguinte função $f(x,y)=\begin{cases} x^2 \cdot arctg\left(\dfrac{y}{x}\right) - y^2 arctg\left(\dfrac{x}{y}\right) \text{ se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$. Investigar sua classe de diferenciabilidade.

Comentários: Nesse caso, sem o apoio computacional, a obtenção de suas derivadas de 1ª e 2ª ordem se torna uma tarefa fastidiosa. A organização didática do professor deve prever o momento em que os aprendizes concluem que $f \in C^1$ e $f \notin C^2$.

Tabela 2: Descrição analítica das derivadas de 1ª e 2ª ordem da função.

	Descrição analítica das derivadas com auxílio do *software Maple*
f_x	$2x \cdot arctg\left(\dfrac{y}{x}\right) - \dfrac{y}{1+y^2/x^2} - \dfrac{y}{1+x^2/y^2}$
f_{xx}	$2 \cdot arctg\left(\dfrac{y}{x}\right) - \dfrac{2y}{x\left(1+y^2/x^2\right)} - \dfrac{2y^3}{\left(1+y^2/x^2\right)^2 x^3} + \dfrac{2x}{y\left(1+x^2/y^2\right)^2}$
f_y	$\dfrac{x}{1+y^2/x^2} - 2y \cdot arctg\left(\dfrac{x}{y}\right) + \dfrac{x}{1+x^2/y^2}$
f_{yy}	$-\dfrac{2y}{x\left(1+y^2/x^2\right)^2} - 2 \cdot arctg\left(\dfrac{x}{y}\right) + \dfrac{2x}{y\left(1+y^2/x^2\right)} + \dfrac{2x^3}{\left(1+x^2/y^2\right)^2 y^3}$
$f_{xy} = f_{yx}$	$\dfrac{1}{1+y^2/x^2} + \dfrac{2y^2}{\left(1+x^2/y^2\right)^2 x^2} - \dfrac{1}{1+x^2/y^2} - \dfrac{2x^2}{\left(1+x^2/y^2\right)^2 y^2}$

Fonte: Elaboração do autor.

Na fig. 3, exibimos uma região do IR^3 aonde se tem definido o gráfico da função, limitado, nas vizinhanças da origem. Com efeito, na fig. 3-I indicamos uma bola, centrada na origem. Mostramos também suas derivadas f_x (II) e f_{xx} (III).

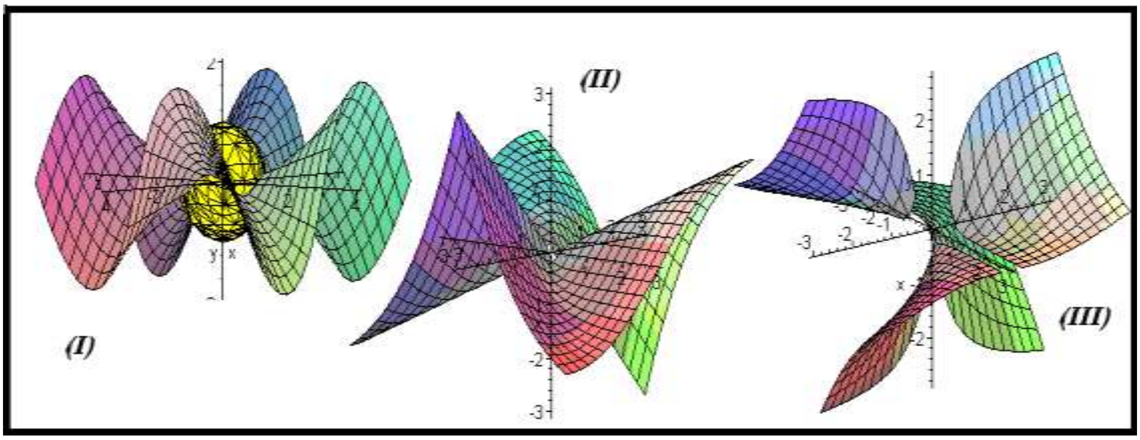

Figura 3. Comportamento geométrico do gráfico da função e suas derivadas de 1ª e 2ª ordens

Na figura 3-I, o professor deve levar o entendimento do caráter limitado na origem (condição necessária para a existência do limite). Por outro lado, na figura 4, conduzimos o solucionador de problema a perceber que o comportamento gráfico-geométrico de suas derivadas de 2ª ordem é distinto (fig. 4 no centro). Com efeito, é mais imediato se produzir alguma ilação a partir dos gráficos da figura 4, do que a identificação de padrões algébricos exibidos na tabela 2. Reparemos que com amparo na percepção, divisamos a região no IR^3 na qual não temos definido o gráfico das derivadas de 2ª ordem (vizinhança da origem (0,0,0)).

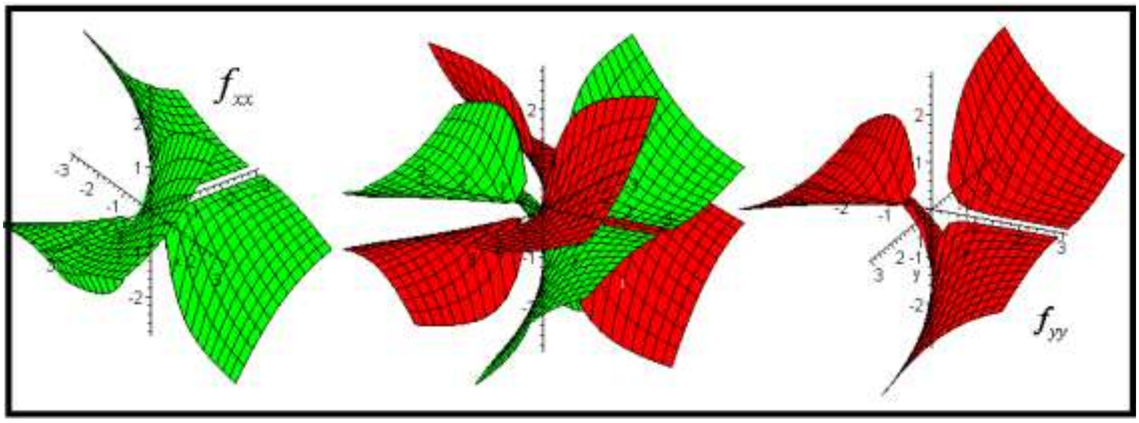

Figura 4. Descrição gráfico-geométrica de suas derivadas de 2ª ordem

Com base dos dados da tabela 2 e nas figuras 3 e 4, conjecturamos que contamos com a continuidade das derivadas de 1ª ordem e a descontinuidade de suas derivadas de 2ª ordem. De fato, podemos escrever no quadro analítico que: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} [2x\cdot arctg\left(\frac{y}{x}\right) - y\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2} - y\cdot\frac{y^2}{x^2+y^2}] = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$. Por outro lado, simplificando a expressão da tabela 2, podemos escrever:

$$\lim_{(x,x)\to(0,0)} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x,y) = \lim_{(x,x)\to(0,0)} [2\cdot arctg\left(\frac{y}{x}\right) - \underbrace{\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)}}_{(*)} - \frac{2y^3}{\left(x^2+y^2\right)^2 x^2} + \frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}].$$

Percebemos que, devido ao termo (*), indicado na expressão acima, se verifica, facilmente, que $\lim_{(x,x)\to(0,0)} \frac{2xx}{\left(x^2+x^2\right)} = 2$ depende da trajetória escolhida, quando tomamos o limite na origem. Vale destacar que nas descrições analíticas que obtemos do *software* e descrevemos as tabelas 1 e 2, teremos a oportunidade de empregar teoremas envolvendo a soma de limite, que devem corresponder ao limite da soma, na condição em que, exista cada limite em separado. Por fim, no rol dos exemplos que encontramos nos compêndios especializados no Brasil, destacamos algumas situações: (i)

$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{xy}^3}{\mathrm{x}^2+y^2} \text{ se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 \text{ se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ (GUIDORIZZI, 2010, p. 275); (ii) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{x}^3\mathrm{y}-\mathrm{xy}^3}{\mathrm{x}^2+y^2} \text{ se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 \text{ se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ (STEWART, 2001, p. 908). Sugerimos, do ponto de vista matemático, a seguinte descrição de (i) $f(x,y)=xy\cdot\dfrac{y^2}{(x^2+y^2)}=xy\cdot g(x,y)$.

Daí, escrevemos ainda $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,y)-f(0,y)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xy\cdot g(x,y)-0\cdot y\cdot g(0,y)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(y\cdot g(x,y)\right)$.

Por fim, podemos usar que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)\right]=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{\left[\lim\limits_{x\to 0}\left(y\cdot g(x,y)\right)\right]}{y}==\lim_{y\to 0}\frac{y\cdot\left[\lim\limits_{x\to 0}\left(y\cdot g(x,y)\right)\right]}{y}=\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}\left(g(x,y)\right)\right]$$

As últimas relações descrevem a derivada mista $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=\lim\limits_{y\to 0}\left[\lim\limits_{x\to 0}\left(g(x,y)\right)\right]$ como um limite interado, o que proporciona profícuas relações conceituais (ALVES, 2011, p. 230). Já no caso (ii), a mera identificação do padrão algébrico $\dfrac{\mathrm{x}^3\mathrm{y}-\mathrm{xy}^3}{\mathrm{x}^2+y^2}=xy\cdot\dfrac{(\mathrm{x}^2-\mathrm{y}^2)}{(\mathrm{x}^2+y^2)}$ nos remete a um caso já analisado e não proporciona ulteriores implicações didáticas.

4. Considerações finais

Deparamos no *locus* acadêmico rotinas metodológicas e abordagens de determinados conteúdos que assinalam o caráter algébrico-manipulatório de definições e teoremas. Nesse escrito, indicamos um teorema clássico do Cálculo a Várias Variáveis que, de modo *standard*, recebe um trato deficitário, por parte dos autores dos compêndios especializados (ALVES & BORGES NETO, 2011; ALVES, 2012b).

Por outro lado, com origem nos pressupostos e sistematização previstos pela ED, descrevemos duas etapas que podem subsidiar os momentos que antecedem uma aula propriamente dita de Cálculo, com o foco direcionado ao teorema de Schwarz. Sublinhamos que no rol das variáveis didáticas locais, o uso e a estruturação de atividades apoiadas na tecnologia se fazem imprescindíveis, na medida em que, prevemos a ação dos sujeitos a partir da inspeção e elaboração de conjecturas a partir da visualização. Por fim, no que concerne à organização matemática do objeto desse estudo, recomendamos ao professor a exploração das propriedades relacionadas com a classe de diferenciabilidade das funções com que tenciona verificar o teorema de Schwarz. Assim, em vez de restringir uma mediação didática que prioriza apenas o comportamento das derivadas mistas na origem, a investigação pormenorizada da classe da diferenciabilidade, de modo geral, por ser realizada, com o recurso ao *software*.

Referencias bibliográficas

Almouloud, S. Ag. (2007). *Fundamentos da Didática da Matemática*. São Paulo: Editora UFPR.

Alves, F. R. V. (2011). *Aplicações da Sequência Fedathi na promoção das categorias do raciocínio intuitivo no Cálculo a Várias Variáveis*. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 353p. Disponível em: <http://www.teses.ufc.br/tde_biblioteca/login.php .

Alves, F. R. V.; Borges Neto, Hermínio. (2011). Análise de livros de cálculo a várias variáveis: o caso da comutatividade das derivadas parciais. In: *XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática*, 1-12. Acessado em: 2 de fevereiro 2013. Disponível em: http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem.

Alves, F. R. V. (2012a). Uma Engenharia Didática para o ensino do Cálculo – o caso da identificação dos pontos extremantes de uma função. In: *Anais do X Conferência Argentina de Educación Matemática*. Buenos Aires, 13-24. Acessado em: 2 de fevereiro 2013. Disponível em: 1 de jan 2013. Disponível em: http://www.soarem.org.ar/XCAREM/programa.htm .

Alves, F. R. V. (2012b). Uma sequência de ensino para a aplicação do teste da Hessiana. In: *Anais do V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*. Acessado em: 2 de fevereiro 2013. Disponível em: 10 de jan 2013. Disponível em:
http://sipem-sbem.lematec.net/CD/PDFs/GT04/CC42397162334_B.pdf .

Artigue, M. (1996). *Ingénierie didactique*. In: BRUN, J. *Didactiques des Mathématiques*, Paris: Delachaux et Niestlé, pp. 243-264.

Artigue, M. (2008). Didactical design in Mathematics Education. En Winslon, Carl. (ed.) *Nordic Research in Mathematics Education*. NORMA08, p. 7-17. Acessado em: 2 de janeiro 2013. Disponível em: https://www.sensepublishers.com/files/9789087907839PR.pdf.

Camacho, A. & Aguirre, M. (2001). Situación didática del concepto de límite infinito: análisis preliminar. *Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa*. Novembro, v. 4, nº 3, p. 237-265

Guidorizzi, Hamilton. (2010). *Um curso de Cálculo*, v. 2, 5ª edição. São Paulo: LTC.

Hairer, E. & Wanner, G. (2008). *Analysis by its history*. New York: Springer.

Stewart, J. (2001). *Cálculo*. v. II, 4ª edição. São Paulo: Thomson.