CB-589

ARGUMENTOS DEL PROFESOR ACERCA DE LOS RECURSOS USADOS EN LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE PENDIENTE

David Alfonso Páez[1,2] – María Eugenia Ramírez Esperón[2] – María Guadalupe Pérez Martínez[1,2] – Rubí Surema Peniche Cetzal[1,2]
dapaez@correo.uaa.mx – mmramiremx@yahoo.com.mx – gperezm@correo.uaa.mx – rspenichece@correo.conacyt.mx
[1]CONACyT – [2]Universidad Autónoma de Aguascalientes, México

Núcleo temático: Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas
Modalidad: CB
Nivel educativo: Medio o Secundario (12 a 15 años)
Palabras clave: Recurso, argumento, pendiente, profesor

Resumen

En este documento reportamos un estudio cuyo objetivo es indagar los argumentos que el profesor de educación secundaria (noveno grado) construye para dar significado a los recursos usados en la comprensión y cálculo de la pendiente de rectas trazadas en un sistema de coordenadas cartesianas XY. Para el análisis de datos se recurrió al marco conceptual de la Aproximación Documental de lo Didáctico. La investigación es de corte cualitativo y se desarrolló mediante un estudio de casos. La recopilación de datos fue en dos etapas: a) video-grabación de las clases donde una profesora enseñó el concepto de pendiente y b) entrevista semi-estructura acerca de los recursos usados en la clase. Los resultados muestran que algunos recursos provienen de la experiencia docente, por ejemplo, para calcular la pendiente de rectas que pasan por los puntos $(x, 0)$ *y* $(0, y)$*, donde* $x, y \neq 0$*, la profesora usa la expresión algebraica* $\frac{y}{x}$ *y la ajusta para obtener el resultado esperado; sin embargo, en la entrevista se percató de que los argumentos con los que justificó esa fórmula no corresponden a la relación matemática correcta, pues no puede generalizar su procedimiento para cualquier recta.*

Antecedentes

En México, el estudio del concepto de pendiente se introduce en educación secundaria con el propósito de que sea base para la comprensión de un pensamiento matemático más abstracto (e.g., variación o derivada), y con implicaciones que va más allá de su uso algebraico; tal como indicador de la inclinación de rectas respecto al eje de las abscisas en el sistema de coordenadas XY (SEP, 2011). En diversos investigadores se ha reportado que el profesor tiene dificultades en la comprensión y cálculo de la pendiente (e.g., Nagle, Moore-Russo, Viglietti, & Martin, 2013; Zaslavsky, Sela, & Leron, 2002). Según lo reportado en la

ISBN 978-84-945722-3-4

literatura especializada, esas dificultadas son producto de una falta de conocimiento acerca de la relación entre las representaciones algebraicas y geométricas de la pendiente de una recta, el ángulo de inclinación y la escala del sistema de coordenadas cartesianas en el que se traza tal recta (Lobato & Thanheiser, 2002).

Por su parte, Stump (2001) aseguran que las dificultades también se deben a la variedad de significados o sinónimos cotidianos que el profesor le asocia a la palabra pendiente: inclinación, declive, empinada, acostada, declinada, entre otros. Para Zaslavsky et al. (2002) pueden deberse a inconsistencias que en ocasiones algunos libros de texto introducen respecto al estudio de ese concepto matemático. Estos investigadores encontraron libros de texto en los que se define la pendiente como el coeficiente de $\Delta y/\Delta x$ y la interpretaban, de manera geométrica, como el ángulo de inclinación de la recta respecto al eje de las abscisas, sin establecer una relación. Asimismo, Stump (1999) asegura que existe un vacío entre las sugerencias didácticas y matemáticas del currículum y la práctica docente efectuada en el aula de clases.

Es posible darse cuenta de la preocupación de diversos investigadores por explorar la enseñanza, comprensión y cálculo de la pendiente. Esto ha permitido efectuar distintas líneas de investigación; en particular, estudiar la práctica docente y caracterizar el conocimiento didáctico y matemático. Moore, Conner y Rugg (2011) reportaron que el profesor suele definir y representar la pendiente de manera geométrica como una relación de lo que *sube* entre lo que *avanza* dados dos puntos sobre la recta, aun cuando a los estudiantes se les dificulta establecer una relación funcional entre dos variables.

Aunque se busca esclarecer los tipos de dificultades en la comprensión del concepto de pendiente, parece que todavía falta mucho por hacer en educación matemática. En la actualidad, la comunidad de investigaciones (e.g., Nagle et al., 2013) consideran que se requieren estudios de cómo el docente aborda en el aula el concepto de pendiente; además, Stump (1999) asegura que “los profesores de matemáticas en servicio […] necesitan oportunidades para examinar el concepto de pendiente, reflexionar sobre su definición [y] construir relaciones entre sus diversas representaciones” (p. 142).

Interesados en las dificultades antes descritas, en este documento pretendemos como objetivo analizar y reportar los argumentos que tiene el profesor, de educación secundaria (noveno grado) sobre los recursos matemáticos en la enseñanza del concepto de pendiente. Para ello,

ISBN 978-84-945722-3-4

planteamos como pregunta de investigación: ¿Qué importancia tienen los recursos usados por el profesor en la comprensión de la pendiente?

Marco teórico

Para analizar la práctica del profesor de matemáticas, Gueudet y Trouche (2009) proponen la Aproximación documental de lo didáctico y, en al cual, centran su interés en los recursos usados en la clase. Para estos investigadores, los *recursos* son parte fundamental de la práctica docente al consideran que el profesor se apoya en ellos para enseñar y facilitar el aprendizaje de las matemáticas; en otras palabras, son inherentes al quehacer del docente y su funcionalidad reside en el *uso* que se les da en la clase.

En el proceso de enseñanza de las matemáticas existe una variedad de recursos y su uso está en función del conocimiento que sea tenga sobre ellos y del contenido a enseñar. Según la Aproximación documental, el profesor usa recursos físicos (e.g., el libro de texto y la calculadora) y no físicos (e.g., conceptos matemáticos y su simbolización, y las discusiones académicas con los colegas o los estudiantes).

Desde una perspectiva socio-histórica, a partir de cómo los recursos son usados, el profesor se *apropia* de ellos y los *transforma* en *instrumentos* para que los alumnos tengan acceso al conocimiento matemático. Para Gueudet y Trouche (2009), el profesor interacciona con sus recursos disponibles mediante un *trabajo documental*, en el cual moldea y define su práctica docente. En esa interacción ocurre una *génesis documental*: proceso dinámico donde se da esa apropiación y transformación llamado *instrumentalización* y, al mismo tiempo, los recursos moldean e influyen en la actividad y el conocimiento del profesor llamado proceso de *instrumentación*.

La transformación de los recursos es gradual y continua, e intervienen *esquemas de utilización*. Estos son conocimientos o creencias que guían y determinan la práctica del profesor, Gueudet y Trouche (2009) los definen como: "fuerzas impulsoras y resultados de la actividad del profesor” (p. 205). Aunque podría interpretarse que el documento se reduce, por ejemplo, a una lista de ejercicios o problemas matemáticos que el profesor elaboró u obtuvo de algún lugar (e.g., libro de texto e internet), no necesariamente es una entidad física; pues “está saturado con la experiencia del profesor” (p. 205). De modo que un documento es el conjunto de recursos y esquemas de utilización de esos recursos ante un determinado problema/tarea matemática.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Metodología

La investigación es de corte cualitativo mediante el estudio de casos. La recopilación de datos se llevó a cabo con una profesora de matemáticas (Sara, seudónimo), quien labora en educación secundaria (noveno grado), y fue en dos etapas: observación no participante y entrevista semi-estructura. En la primera etapa, video-grabamos el total de las sesiones de clase en las que Sara enseñó el concepto de pendiente (cinco sesiones con una duración de 50 minutos cada una); además, analizamos los datos mediante categorización y triangulación (Miles & Huberman, 1994), tomando como referente la noción de recurso. En el análisis identificamos qué y cómo los recursos son usados por Sara e interpretar cuáles son los esquemas de utilización inmersos en esas sesiones de clase, además, nos permitió recuperar un extracto relevante de las observaciones para que la profesora recordara y analizara lo que sucedió en las cinco sesiones de clase.

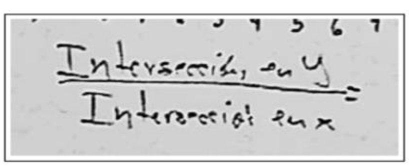
En la segunda etapa, diseñamos e implementamos una entrevista con el propósito de que Sara reflexionara sobre la relevancia de sus recursos en la clase (Gilbert, 1994). De acuerdo con el extracto de las video-grabaciones, la entrevista incluyó preguntas abiertas acerca del uso, justificación y argumentación de los recursos. A continuación exponemos el análisis y discusión de los argumentos de Sara.

Análisis y discusión de datos

Recursos en la clase de matemáticas

Un objetivo de aprendizaje en educación secundaria es comprender y calcular la pendiente en términos de razón de cambio: “identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta” (SEP, 2011, p. 50). Para ello, en el trabajo documental desarrollado en el aula, Sara usó dos fórmulas como recursos matemáticos (véase figura 1). Aunque son distintas entre sí, ambas fórmulas recurren al algoritmo de la división y su uso requiere las coordenadas de dos puntos de la recta.

a)



b)

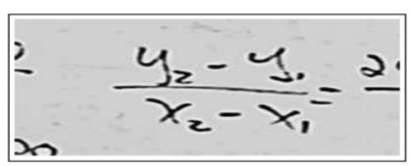


Figura 1. Recursos para calcular la pendiente de rectas cartesianas.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Aun cuando $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, $x_2 \neq x_1$, está institucionalizada en el Programa de estudios (SEP, 2011) para obtener la pendiente (m) de la recta, Sara propone y valida su propio recurso: $\frac{intersección\ en\ y}{interesección\ en\ x}$ o $\frac{y}{x}$. Los esquemas de utilización que tiene la profesora sobre éste son creencias acerca de la eficiencia de tiempo, tomando como referente la facilidad que ella le encuentra a su fórmula para calcular la pendiente; por ejemplo, Sara les dice a los estudiantes: "es una forma más facilita de encontrar la pendiente o razón de cambio".

La creencia de Sara justifica y le da significado a la fórmula propuesta como el recurso ideal en contraste con lo sugerido en el Programa de estudios, sin tomar en cuenta la argumentación o demostración matemática sobre el recurso. En este sentido, la formula se institucionaliza en la clase por el tiempo que se invierte al usarla, pues Sara les menciona a los estudiantes: "la fórmula más rápida para mí de encontrar la pendiente es ésta: intersección de la recta en y entre la intersección en x".

La fórmula es viable sólo para rectar cuya función es $y = mx + b$, donde $b \neq 0$, y su uso requiere conocer las coordenadas de los puntos de intersección de la recta con los ejes cartesianos: $(0, y)$ y $(x, 0)$. El cociente que se obtiene de la fórmula es el inverso aditivo del valor de la pendiente ($\frac{y}{x} = a \rightarrow m = -a$), lo que para Sara es el simétrico del cociente; por ejemplo, para calcular la pendiente de la recta $y = 300x + 400$, ella da la siguiente consigna: "La pendiente siempre va a ser su simétrico cuando lo hagan de esta manera [se refiere a $\frac{y}{x}$]. ¡Bueno!, hay que tener en cuenta eso: cuando lo encuentro de esta manera tengo que saber que es su simétrico" (ver figura 2).

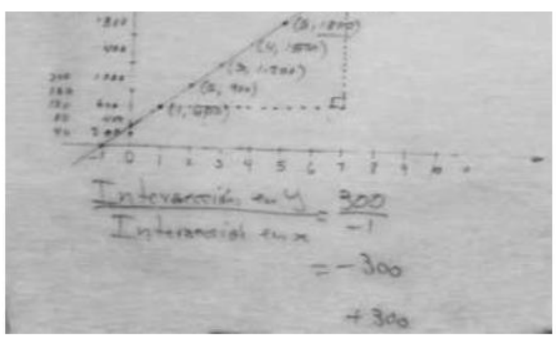


Figura 2. Cálculo de la pendiente de la recta $y = 300x + 400$.

De acuerdo con el discurso de Sara, el inverso aditivo del cociente está limitado a cambiar su signo de positivo (+) a negativo ($-$), o viceversa, e identificar el tipo de recta (creciente o

ISBN 978-84-945722-3-4

decreciente), sin una demostración y argumentación matemática de eso proceso de conversión, por ejemplo, $(+m) + (-m) = 0$ (Courant & Robbins, 2002). Para la recta descrita en la Figura 2, Sara menciona: "Pero –300 va a ser +300, porque la recta va incrementando, porque tiene pendiente positiva: aumenta x aumenta y. Tiene pendiente positiva, no lo puedo dejar así [–300]. ¡Ya encontré la pendiente!". Inferimos que esta falta es producto del esquema de utilización antes mencionado.

Al trabajar con la familia de rectas $y = mx + b$, Sara institucionaliza la fórmula $\frac{y}{x}$ para obtener la pendiente de toda recta; al respecto, ella dice: "la pueden usar para cualquier recta". Sin embargo, el carece de funcionalidad para rectas $y = mx$, pues sólo tienen un punto de intersección (x, y) y en el cual $x, y = 0$.

Fundamentación de los recursos

Los argumentos que tiene Sara sobre el recurso $\frac{y}{x}$ están centrados en el aprendizaje que ella obtiene de su práctica como docente de matemáticas. Enseñar el concepto de pendiente en términos de razón cambio $(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1})$ a varios grupos de estudiantes, y en diferentes ciclos escolares, le ha permitido a Sara deducir y usar su recurso matemático:

Entrevistador: ¿Este procedimiento [$\frac{y}{x}$] lo sacó de algún libro de texto?

Sara: ¡No! Yo me he dado cuenta, me he enterado de varias cosas hasta ahorita, incluso en este ciclo escolar y me supongo que todos los que vengan, he aprendido y deduzco cosas. Quizá después me doy cuenta que está escrito en el libro de texto, pero no lo había visto, lo encuentro hasta que trabajo con los alumnos. Entonces, eso [$\frac{y}{x}$] lo encontré, aunque no puedo decir que es mío, que lo haya descubierto, a la mejor está escrito por ahí, pero no lo he visto.

Los conocimientos que Sara construye sobre los saberes enseñados le permiten dar significado a sus recursos (Chevallard, 1999). Como puede observase en el extracto precedente, la percepción visual y deducción de Sara es en el sentido, de lo que ella mencionó en la entrevista, "encontrar" o "descubrir" la fórmula sin tener la intención de ello. Aunque el conocimiento construido de la práctica docente pudiera estar reconocido por una comunidad de expertos, no existe un interés por hacer una búsqueda previa –reflexionar–, analizar y corroborar que es válido.

ISBN 978-84-945722-3-4

La funcionalidad del recurso $\frac{y}{x}$ se fundamenta en las deducciones que Sara hace (o de que lo infiere como descubrimiento en un determinado momento del proceso de enseñanza y aprendizaje) y en el uso constante que se le da en el aula. Aunque no se puede aseverar la falta de reflexión sobre tales deducciones, es evidente que la validez de este recurso se reafirma hasta que Sara logre coincidir con él o lo encuentre por casualidad, por ejemplo, en algún documento oficial; es decir, da por hecho que existe su recurso matemático y es reconocido por la comunidad de expertos.

El uso del recurso propuesto se orienta por dos esquemas de utilización de Sara: a) regla de dividir valores con signo y b) relación entre los tipos de pendientes (positiva o negativa) y rectas (crecientes o decrecientes). Este último se da cuando las rectas se leen en el plano de izquierda a derecha. Ambos esquemas se perciben cuando se le pide a Sara que explique su recurso en la recta $y = 1x - 1$ trazada en el plano cartesiano:

> *Sara*: Si digo que es la intersección de *y* entre *x*, pues entonces éste va a quedar pendiente positiva [*Se refiere al resultado*]. Entonces va a ser $\frac{-1}{+1} = -1$. Aquí me resulta negativo $[-1]$, pero como esta recta crece, entonces *m* [*pendiente*] tiene que ser igual a 1.

Para que coincida el signo del cociente con el tipo pendiente, Sara determina el reciproco [aditivo] del cociente mediante su segundo esquema de utilización. Dado que la recta le indica si la pendiente es positiva o negativa, Sara deja el valor absoluto del cociente y sólo cambia el signo de positivo (+) a negativo (–), o viceversa. Aunque su recurso funciona para este tipo de rectas. Estos dos esquemas también son la base para justificar que su recurso viable para obtener la pendiente.

Aunque en la clase se concluyó que el recurso se puede usar para cualquier recta, Sara se da cuenta que no es así, pues en la entrevista se le pide usar la fórmula para calcular la pendiente de recta $y = x$ trazada en el plano cartesiano.

> *Entrevistador*: Con $\frac{y}{x}$, ¿puede calcular la pendiente de la recta $y = 1x$?
>
> *Sara*: [*Observa el dibujo de la recta por varios segundos*] Pero con mi procedimiento ¿verdad? Aquí va a tener cero-cero [*Se refiere a* $(0, 0)$], igual puedo tomar otro punto a lo largo de la recta y dividir las coordenadas.
>
> *Entrevistador*: Pero usted mencionó que debe intersecar con los ejes.

ISBN 978-84-945722-3-4

Sara: Sí, dije que debe intersecar en el eje x y en el eje y, y sí tiene pendiente; eso sí, tiene pendiente, pues la recta crece. Pero no se puede calcular la pendiente con mi procedimiento.

Como se puede observar en el extracto de la entrevista, Sara tiene la idea de que dividir las coordenadas de un solo punto de la recta, excepto $(0, 0)$, está haciendo uso de su recurso. Ante la intervención del entrevistador de recordarle el referente para usar el recurso, Sara se retracta de su contradicción y determina que no es posible entonces usar el recurso para toda recta cartesiana. En este proceso de reflexión, surge un conflicto en Sara el cual se advierte al considerar que no puede usar su recurso aun cuando la recta, según el segundo esquema de utilización, creciente. Como argumento ella determina que las rectas no intersecan con los dos ejes cartesianos, cuyos valores de intersección deben ser diferentes de cero; de modo que para Sara el recurso está limitado para una determinada familia de rectas.

Conclusiones

Los resultados de la investigación muestras que Sara usa una variedad de recursos que provienen del Programa de estudio (SEP, 2011), tal como la expresión algebraica $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, pero también ella recurre a sus propios recursos ($\frac{intersección\ en\ y}{interesección\ en\ x}$ o $\frac{y}{x}$) para que los estudiantes comprendan y calculen la pendiente de la recta. De acuerdo con los argumentos de Sara, sus esquemas de utilización están relacionados con creencias y conocimiento matemático; sin embargo, se percibe una falta de éste último sobre el recurso que usó. En términos de Guzmán y Kieran (2013), existen vacíos matemáticos entre el recurso, los esquemas y la práctica de Sara. Aunque el recurso propuesta funciona para un determina tipo de rectas, carece de justificación matemática.

El argumento de Sara sobre su recurso está centrado principalmente en la eficiencia que se tiene de él y por inferir que es reconocido por la comunidad de expertos. Aunque $\frac{y}{x}$ le permite obtener la pendiente de algunas rectas, se carece de argumentos matemáticos que lo validen. En este sentido, una de sus limitaciones es el hecho de sólo operar con él si la recta está trazada en el sistema de coordenadas cartesianas y si se sabe *a priori* la propiedad de la recta (creciente o decreciente) y el tipo de pendiente (positiva o negativa). El tener sólo los valores de intersección de la recta con los ejes cartesianos podría llevar a una mecanización y estar predispuesto a cambiar el signo al cociente para obtener la pendiente de la recta, sin

ISBN 978-84-945722-3-4

comprensión alguna; además de generar obstáculos conceptuales y procedimentales en los estudiantes (Broussea, 1989).

Referencias

Brousseau, G. (1989). Les obstacles épistémologuiques et la didactique des mathématiques. En C. G. Bednarz (Ed.), *Construction des savoirs, obstacles et conflits* (pp. 41-63). Francia: CIRADE.

Courant, R., & Robbins, H. (2002). *¿Qué son las matemáticas? Conceptos y métodos fundamentales*. México, DF: Fondo de cultura económica.

Gilbert, J. (1994). The construction and reconstruction of the concept of the reflective practitioner in the discourses of teacher professional development. *International Journal of Science Education, 16*(5), 511-522. doi: 10.1080/0950069940160503

Gueudet, G., & Trouche, L. (2009). Towards new documentation systems for mathematics teachers? *Educational Studies in Mathematics, 71,* 199-218. doi: 10.1007/ sl0649-008-9159

Guzmán, J., & Kieran, C. (2013). Becoming aware of mathematical gaps in new curricular materials: a resource-based analysis of teaching practice. *The Mathematics Enthusiast, 10*(1,2), 163-190. Recuperado de http://scholarworks.umt.edu/tme/vol10/ iss1/9

Lobato, J., & Thanheiser, E. (2002). Developing understanding of ratio-as-measure as a foundation for slope. En B. Litwiller (Ed.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions: 2002 Yearbook of the NCTM* (pp. 162-175). Washington, DC: NCTM.

Miles, M. B., & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis: a methods sourcebook.* USA: SAGE.

Moore-Russo, D., Conner, A. M., & Rugg, K. I. (2011). Can slope be negative in 3-space? Studying concept image of slope through collective definition construction. *Educational Studies in Mathematics, 76,* 3-21. doi: 10.1007/s10649-010-9277-y

Nagle, C., Moore-Russo, D., Viglietti, J., & Martin, K. (2013). Calculus students' and instructors' conceptualizations of slope: a comparison across academic levels. *International Journal of Science and Mathematics Education, 11*(6), 1573-1774. doi: 10.1007/s10763-013-9411-2.

SEP (2011). *Programa de estudios. Matemáticas. Educación Secundaria.* México: SEP.

Stump, S. L. (1999), Secondary mathematics teachers' knowledge of slope. *Mathematics Education Research Journal, 11*(2), 124-144. doi: 10.1007/BF03217065

Stump, S. L. (2001). Developing preservice teachers' pedagogical content knowledge of slope. *Journal of Mathematical Behaviour, 20,* 207-227. doi: 10.1016/S0732-3123 (01)00071-2

Zaslavsky, O., Sela, H., & Leron, U. (2002). Being sloppy about slope: the effect of changing the scale. *Educational Studies in Mathematics, 49,* 119-140. doi: 10.1023/A1 016093305002

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4