CB-534

LA GRAMÁTICA DEL LENGUAJE MATEMÁTICO

Sueli Cunha
sueli.cunha@ime.uerj.br
Universidade do Estado do Rio de Janeiro – Brasil

Núcleo temático: VII – Investigación en Educación Matemática
Modalidad: CB – Comunicación breve
Nivel educativo: Formación y actualización docente
Palabras clave: Lenguaje Matemático, Educación matemática, Alfabetización en matemáticas

Resumo

El significado de "alfabetización" es "acción y efecto de alfabetizar" (DIRAE) y "alfabetizar" significa "enseñar a alguien a leer y a escribir" (DIRAE). De esta manera, "alfabetización en matemáticas" significa "enseñar a alguien a leer y a escribir en el Lenguaje Matemático". Danyluck (citada en Souza, 2010) dice: "Ser alfabetizado en matemáticas, entonces, es entender lo que lee y escribir lo que entiende…" (p. 2). Sin embargo, el Lenguaje Matemático no tiene oralidad; así, para leer una expresión matemática es necesario hacerlo con la ayuda de otro lenguaje (español, portugués, etc...). Es decir, para leer una expresión matemática, esta debe ser traducida a otro lenguaje, natural; pero no significa que se deban traducir los símbolos uno a uno, al contrario, se debe describir su sentido (Silveira, 2014). Por ejemplo, la expresión $\forall x, y \in \mathrm{N} \Rightarrow x + y \in \mathrm{N}$ *puede ser leída (después de "decodificar" los símbolos) como "la suma de dos números naturales es un número natural". En esta comunicación se compara el Lenguaje Matemático con las lenguas naturales (español, en este caso) y se hace una introducción a su gramática: su alfabeto, algunas convenciones, formación de palabras, puntuación y una indicación para no utilizar "jergas".*

Introdución

El Lenguaje Matemático, puede ser visto como una lengua extranjera, hablada por el "pueblo de las ciencias exactas". Normalmente, el estudio de una lengua extrajera se hace por "niveles": básico, intermedio y avanzado. Lo mismo puede ocurrir con el aprendizaje del Lenguaje Matemático. Por ejemplo, la idea dada por la frase "La suma de los diez primeros números pares positivos" (cuyo sentido es "*la operación de adición con diez términos formados por los diez primeros números pares positivos*") puede ser expresada en distintos idiomas, como:

1. Portugués: "A soma dos dez primeiros números pares positivos";

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

2. Francés: “La somme des dix premiers nombres paires positifs”;
3. Inglés: “The sum of the ten first positive even numbers”.

Para expresarla en el Lenguaje Matemático, nivel básico, es necesario conocer los conceptos de “*adición*”, “*términos*”, “*paridad de un número entero*”, “*número positivo*”, “*ordenación*”. De esta manera, esta frase se escribe en Lenguaje Matemático básico como:

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20.$$

Sin embargo, esta misma idea puede ser indicada, en un Lenguaje Matemático intermedio, de una forma más compacta, como

$$\sum_{i=1}^{10} 2i.$$

Ahora, una vez conocida la sintaxis de esta expresión, se puede escribir la suma de los cien, de los mil o de los “n” primeros números pares, sin que sea necesario enumerarlos todos. Basta alterar el número máximo de términos que se quiera adicionar.

Según Silveira (2014), “El Lenguaje Matemático considerado como un lenguaje universal debe ser comprendido en todas las otras lenguas” (p.51). Sin embargo, para leer, escribir y entender bien un lenguaje, es necesario conocer su gramática. Wittgenstein (2010) (Como se cita en Ruy, 2008) asocia las reglas gramaticales de un lenguaje con las reglas de un juego. Así, las estrategias de un juego, basadas en sus reglas, son practicadas de la misma manera que se deben practicar las reglas gramaticales de un lenguaje (Cunha, 2017b). Un lenguaje es entonces una forma de comunicación, donde la persona que “habla” y la persona que “escucha” se comprenden (Ruy, 2008); es decir, ambos conocen las reglas del “juego de lenguaje” (o la gramática del lenguaje) que están utilizando. Es interesante observar que así como las lenguas naturales, el Lenguaje Matemático posee sus dialectos (por ejemplo, *algebrés*, *logiqués*, *geometriqués* - relativo al álgebra, lógica y geometría, respectivamente).

Las reglas gramaticales del Lenguaje Matemático

En Cunha (2017a), fueron enumeradas algunas reglas y convenciones del Lenguaje Matemático: alfabeto, clase gramatical, composición de palabras por derivación, así como las prioridades entre las operaciones y la puntuación. En Cunha (2017b), se presenta un estudio más detallado de la gramática del Lenguaje Matemático, haciendo una comparación

ISBN 978-84-945722-3-4

con el portugués. En esta comunicación, estos conceptos son presentados, haciendo una comparación con el español.

Alfabeto

El alfabeto español contiene veintisiete letras: *a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, ñ, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z* (Real Academia Española). En cambio, el alfabeto del Lenguaje Matemático es formado por dígitos, letras del alfabeto latino o griego y símbolos. La Alfabetización Matemática se hace continuamente. Así, no es necesario presentar todas las "letras" del alfabeto del Lenguaje Matemático al mismo tiempo; pero, se van presentando a medida que se hacen necesarias. En realidad, ¿de que serviría presentar el símbolo de *derivada parcial* (δ) a un alumno de educación primaria, si (cuando mucho) él va a usarlo sólo en la educación superior? Es interesante observar que, en el Lenguaje Matemático, los símbolos del alfabeto no necesariamente representan un fonema; ellos pueden representar una frase (por ejemplo, el símbolo "$>$" representa la frase "*es mayor a*"). Esos símbolos son denominados "*símbolos **frasales***".

Algunas convenciones

En español, así como en portugués, hay algunas convenciones como la de que un nombre propio debe comenzar con una letra mayúscula o la de que una palabra del género femenino debe terminar con "*a*" (entre otros). Siguen algunas convenciones en el Lenguaje Matemático:

1) *conjuntos*: denominados por letras mayúsculas (inclusive las matrices, que son conjuntos ordenados de elementos colocados en filas y columnas, organizados de una forma rectangular);
2) *elementos de un conjunto*: representados por letras minúsculas;

   Observaciones:

   a) los conjuntos de conjuntos son denominados por letras mayúsculas *cursivas*. Por ejemplo, $\mathcal{M}_{m\times n}$ representa el conjunto de las matrices con m filas y n columnas, mientras que $A_{m\times n}$ (o incluso $M_{m\times n}$) representa *una determinada* matriz que pertenece a $\mathcal{M}_{m\times n}$. De la misma forma, el conjunto potencia de un dado conjunto A es representado por $\mathcal{P}(A)$.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

b) en el dialecto *geometriqués* pasa lo contrario: una recta (un *conjunto* infinito de puntos situados en una misma dirección) es representada por una letra minúscula, mientras que un punto que pertenece a una determinada recta es representado por una letra mayúscula.

Clases de palabras

En español, así como en portugués, hay clases gramaticales, que, según el Diccionario Inverso de la Real Academia Española [DIRAE], son grupos de palabras formados en función de sus significados (por ejemplo, nombre, adjetivo, adverbio, etcétera.). Algunas de esas clases son subdivididas en subclases; por ejemplo, hay adverbios de tiempo, modo, o lugar, entre otros. En el Lenguaje Matemático, son identificadas las clases *constantes*, *variables*, *operadores*, entre otras (Cunha, 2017a). Estas clases pueden ser subdivididas también en subclases; por ejemplo, variables enteras o reales así como operadores aritméticos, relacionales o lógicos.

Esas clases y subclases siguen una *regla* para su identificación. Por ejemplo,

1) *constantes*: son valores fijos, aunque desconocidos; son representados por las primeras letras del alfabeto latino ($a, b, c, \ldots$), si son constantes reales, o por las letras k, m, n, si son constantes enteras (normalmente positivas).
2) *variables*: son cantidades que pueden asumir valores distintos en un cálculo; son generalmente identificadas por las letras x, y, z, si son variables reales, o por las letras i, j, si son variables enteras; a veces se utilizan t (para "tiempo") o l (para "lado"), etcétera.
3) *proposiciones lógicas*: son representadas por letras a partir de *p*:p, q, r, s.

Formación de palabras

En español, así como en otras lenguas, se pueden formar nuevas palabras, a partir de una palabra *primitiva*, añadiendo afijos. En Cunha y Velasco (2017), son presentados los afijos en el Lenguaje Matemático, y además de los prefijos y de los sufijos, como en la lengua española, son descritos también *sobrefijos*, *suprafijos*, *infrafijos*. Además, se puede encontrar la *parasíntesis* que, en el Lenguaje Matemático, significa "el proceso de formación de palabras en que intervienen simultáneamente *dos o más* tipos de afijos" (Cunha & Velasco, 2017). Siguen algunos ejemplos de palabras derivadas en el vocabulario matemático.

ISBN 978-84-945722-3-4

a) el *sufijo superior* "-1" designa "*el inverso de*". Así, si x es un número real distinto de cero, x^{-1} significa "el inverso de x"; de la misma manera que A^{-1} representa la "matriz inversa" de una matriz A, cuyo determinante es distinto de cero;
b) en el dialecto *logiqués*, el *prefijo* "$\sim$" es un *prefijo de negación* (así como el prefijo "des" en español: *des*conocer, *des*confiar); es decir, si una proposición lógica p representa la sentencia "Gabriel García Márquez fue un escritor mexicano", la proposición $\sim p$ representa su negación (o sea, "Gabriel García Márquez **no** fue un escritor mexicano").
c) la *negación* en el dialecto *algebrés* es representada por el *sobrefijo* "$/$ "; es decir, $\nexists$ significa "no existe", $\not\subset$ significa "no es subconjunto" y $\neq$ significa "diferente", "distinto" o "no es igual";
d) el *suprafijo* "$\rightarrow$", en $\vec{v}$, denota un *vector geométrico*;
e) el *infrafijo* "$-$" significa "*o igual*" en, por ejemplo, "$\leq$" ("es menor *o igual* a")
f) finalmente, un ejemplo de *parasíntesis* es Z_+^*, que representa los *enteros positivos*, dado que el *sufijo inferior* "$+$" significa "excluir los enteros negativos" y el *sufijo superior* "$*$" significa "excluir el cero".

La puntuación clarificadora

En la Gramática Práctica de la editorial Océano (1999), hay un capítulo intitulado "*Escribir correctamente utilizando una puntuación clarificadora*", donde se describen, por ejemplo, los signos de puntuación relacionándolos con la entonación o con el ritmo que provocan. Con ese propósito, en el *juego de lenguaje* de la lengua española, los signos de "interrogación" y de "admiración" se emplean en el principio y al final de la oración interrogativa y exclamativas, respectivamente, "a diferencia de otras muchas lenguas" (Océano, 1999, pp. 272-273).

Es por medio de un signo de puntuación que se diferencia una afirmación ("Vamos al cine.") de una pregunta ("¿Vamos al cine?"). Es interesante observar que hay también una diferencia de entonación en la lectura de estas dos frases.

En el Lenguaje Matemático, la entonación tiene en cuenta no solamente la puntuación como también el orden de prioridad de las operaciones. Por ejemplo, en $2 + 5 \times 3$, sin puntuación, debido a la prioridad de la multiplicación sobre la adición, se lee "dos más, cinco multiplicado

ISBN 978-84-945722-3-4

por tres" y se entiende que será calculada "la suma de dos con el producto resultado de la multiplicación de cinco por tres" (resultando en 17); por otro lado, en $(2+5)\times 3$, la puntuación altera la entonación en su lectura (se lee "dos más cinco, multiplicado por tres") y el orden de precedencia de las operaciones: de esta vez es la suma resultante de la adición de dos con cinco que será multiplicada por tres (resultando en 21). Es interesante observar la "coma" (","), como una marca del ritmo en la lectura, indicando el orden de precedencia de las operaciones.

A veces, la diferencia de significado entre dos sentencias matemáticas se hace sólo por la noción del orden de prioridad de las operaciones, como en $a+\frac{b}{c}$ ("la suma de a con el cociente de la división de b por c") y $\frac{a+b}{c}$ ("el cociente de la suma resultante de a con b, dividido por c"), pero en sus lecturas respectivas se hace una diferencia de entonación; es decir, $a+\frac{b}{c}$ se lee "a más, b dividido por c", mientras que $\frac{a+b}{c}$ se lee "a más b, dividido por c".

Hablar correctamente el Lenguaje Matemático

El Lenguaje Matemático posee, por lo menos, dos características interesantes: i) **no** admite la situación "está gramaticalmente errada, pero se puede comprender"; ii) las "jergas" dificultan la comprensión de una frase. Estos dos casos son analizados a seguir:

i) En la lengua española, se cometen muchos errores de concordancia entre "sujeto compuesto" y "verbo" que no comprometen la comprensión de la frase. Por ejemplo, ("Errores frecuentes de concordancia", 2014) la sentencia "*La **manada** de lobos **atravesaron** el desierto velozmente*" no está correcta, pero se puede entender. En realidad, aunque *manada* signifique "un conjunto de ciertos animales de una misma especie que andan reunidos" (DIRAE), *manada* está en singular (el sustantivo *lobos* es un complemento del sujeto compuesto "manada de lobos", que indica cuales animales componen la manada); el sujeto está en singular, lo que es demostrado pelo determinante "la", en singular. La frase correcta es entonces "*La **manada** de lobos **atravesó** el desierto velozmente*". Este tipo de error ocurre también con los nombres

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

colectivos. Por ejemplo, hay quien puede decir "*La* ***mayoría creen*** …", cuando lo correcto sería "*La* ***mayoría cree*** ...".

En el Lenguaje Matemático, leer por ejemplo "$2x$" como "dos equis" (en lugar de "dos veces equis", "dos multiplicado por equis" o incluso "dos por equis"), puede llevar a un alumno de primaria a escribir "33" cuando se ha dicho que $x = 3$. Durante la alfabetización en Lenguaje Matemático, es importante utilizar siempre el símbolo "×" para representar la multiplicación (es decir, escribir "$2x$" como "$2 \times x$") hasta que el concepto de multiplicación sea bien comprendido. Más tarde, cuando no haya más dudas, se pueden presentar las expresiones sinónimas de "$2 \times x$" (es decir, $2 \cdot x$ y $2x$).

ii) Un ejemplo de "jerga" en el Lenguaje Matemático es decir que para resolver una ecuación de primer grado se debe "pasar al otro lado restando" o "pasar al otro lado dividiendo". En realidad, lo que se hace es utilizar las propiedades del *elemento neutro* y del *elemento simétrico* (o *opuesto* o *inverso*). Por ejemplo, resolver la ecuación $2x + 6 = 14$ significa "determinar el valor de x que hace que la expresión "$2x + 6 = 14$" sea verdadera". Entonces, lo que se desea es "sacar" el valor de x. Por lo tanto, es necesario "deshacer" las operaciones que fueron efectuadas "sobre" x, haciendo las mismas operaciones, en orden inversa, con los elementos simétricos; y esto manteniendo la relación de igualdad. Es decir, para resolver la ecuación $2x + 6 = 14$, se debe seguir las etapas siguientes

$\mathbf{(2x + 6) + (-6) = 14 + (-6)}$ *("deshaciendo" la adición)*

$\mathbf{2x + \big(6 + (-6)\big) = 14 - 6}$ *(propiedad asociativa; resta como "inversión aditiva")*

$\mathbf{2x + 0 = 8}$ *(propiedad del elemento simétrico)*

$\mathbf{2x = 8}$ *(propiedad del elemento neutro)*

$\mathbf{\frac{1}{2} \times (2x) = \frac{1}{2} \times 8}$ *("deshaciendo" la multiplicación)*

$\mathbf{\left(\frac{1}{2} \times 2\right) x = \frac{8}{2}}$ *(propiedad asociativa; división como "inversión multiplicativa")*

$\mathbf{1x = 4}$ *(propiedad del elemento inverso)*

$\mathbf{x = 4}$ *(propiedad del elemento neutro)*

*(**4** es el valor procurado de* $\boldsymbol{x}$*)*

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Cuando se entiende que lo que se hace ***no*** es "simplemente" "pasar al otro lado", se puede más tarde comprender más fácilmente, por ejemplo, la resolución de una "ecuación con matrices", importante en el estudio de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Reflexiones Finales

El Lenguaje Matemático, como cualquier otro lenguaje, es una herramienta de comunicación entre dos partes, donde es necesario que ambas partes conozcan sus reglas o su "juego de lenguaje". Una de las dificultades de comprensión de las matemáticas es que no hay una "comunicación" puesto que las partes no se comprenden. Lo que se hace es leer los símbolos "uno a uno", sin la preocupación de comprender su significado. Leer

$$\sum_{i=1}^{10} 2i$$

como "sumatorio sobre i, desde un hasta diez, de dos i", en realidad lo que se hace es leer cada símbolo; podría ser comparado a leer "escuela" como "*e*", "*ese*", "*ce*", "*u*", "*e*", "*ele*", "*a*". Sin embargo, en la lengua española (así como en portugués) las letras representan fonemas que juntos forman palabras; las letras no poseen significado propio como los símbolos matemáticos (por ejemplo, el símbolo "$>$" representa una frase). Además, el Lenguaje Matemático no posee oralidad; él necesita de un lenguaje natural (español, portugués, francés, inglés, etcétera) para expresar el significado de sus símbolos. Por eso, es importante "comprender el significado" de cada símbolo y entender lo que significa la expresión para después expresarla en un lenguaje natural. Además, se puede hacer correlación entre propiedades que son estudiadas a lo largo del aprendizaje de las matemáticas sin tener en cuenta que una es extensión de la otra. Por ejemplo, la "famosa expresión" "*La integral de la suma es la suma de las integrales*", es decir $\int[f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ no es nada más que una extensión de $\sum x_i + y_i = \sum x_i + \sum y_i$, que a su vez es una extensión de la combinación de las propiedades conmutativa y asociativa de la adición, estudiada en la escuela por los niños.

Concluyendo, aprender y enseñar las matemáticas no significa memorizar fórmulas o "trucos" para "saber" cómo resolver algunos problemas de escuela; al contrario, se debe

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

conocer la gramática del Lenguaje Matemático para comprender lo que se dice en este lenguaje.

Referencias bibliográficas

Cunha, S. (2017a). Considerações sobre a Aprendizagem Contínua do *Matematiquês* – a Linguagem Matemática. En M. G. B. Maia & G. F. Brião (Orgs), Alfabetização Matemática: perspectivas atuais, Capítulo 3, pp. 25-60. Curitiba, Brasil: Editora CRV.

Cunha, S. (2017b). Ler, Escrever e Compreender a Linguagem Matemática. En M. G. M. Paiva (Org). Psicopedagogia Clínica e Aplicada ao Ensino da Matemática. Rio de Janeiro, Brasil: Letra Capital, (en prensa).

Cunha, S. & Velasco, J. (2017). Los afijos en el Lenguaje Matemático. In: II CEMACYC – II Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe. Cali, Colombia. 29 octubre al 1 noviembre. A presentar.

DIRAE. Diccionario de la lengua española de la Real Academia Española. http://dirae.es. Consultado en 18/04/2017.

"Errores frecuentes de concordancia" (2014). Blog de Redacción – PUCP. http://blog.pucp.edu.pe/blog/blogderedaccion/2014/08/27/errores-frecuentes-de-concordancia/. Consultado en 20/04/2017.

OCÉANO. GRAMÁTICA PRÁCTICA – Ortografía, Sintaxis, Incorrecciones, Dudas. (1999). Barcelona, España.

Real Academia Española. http://www.rae.es/consultas/exclusion-de-ch-y-ll-del-abecedario. Consultado en 18/04/2017.

Ruy, M.C. (2008). O Conceito de Jogos de Linguagem nas *Investigações Filosóficas* de Wittgenstein. In: VII-SEPECH – Seminários de Pesquisa em Ciências Humanas. Londrina (PR), Brasil. 17 a 19 setembro. http://www.uel.br/eventos/sepech/sepech08/arqtxt/resumos-anais/MateusCRuy.pdf. Consultado 18/04/2017

Silveira, M. R. A. (2014). Tradução de textos matemáticos para a linguagem natural em situações de ensino e aprendizagem. Educ. Matem. Pesq., 16(1), 47-73. http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/download/15338/pdf. Consultado 18/04/2017.

Souza, K.N.V. (2010) Alfabetização Matemática: Considerações sobre a Teoria e a Prática. Revista de Iniciação Científica da FFC, 10(1). http://www.bjis.unesp.br/revistas/index.php/ric/article/download/273/259 . Consultado 18/04/2017.

ISBN 978-84-945722-3-4