

CRITÉRIO VISUAL PARA A IDENTIFICAÇÃO DO COMPORTAMENTO DE CONVERGÊNCIA PARA INTEGRAIS IMPRÓPRIAS

Francisco Regis Vieira Alves
fregis@ifce.edu.br

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará

Tema: Pensamento Matemático Avançado

Modalidad: CB

Nivel educativo: Terciário – Universitário

Palabras clave: Integral imprópria, Critério de Convergência, Visualização.

Resumen

A partir do século XVII, registramos uma rica discussão sobre a generalização da noção de integral. Neste sentido, a noção de integral imprópria traz a possibilidade de descrição da contribuição cumulativa de áreas, numa região do plano, para uma classe mais extensa de funções. Deste modo, com o intuito de conceber situações de ensino que valorizem a visualização, desenvolvemos um estudo de caso (BOGDAN & BIKLEN, 1994), de caráter exploratório, com o objetivo de descrever, apresentar e aplicar situações didáticas relacionadas com esta noção matemática. A descrição e concepção das situações se apoiaram na Teoria das Situações Didáticas, cunhada nos anos 80. Os dados indicaram que, com o auxílio do software Geogebra, conseguimos provocar nos sujeitos participantes, a elaboração de sentenças proposicionais oriundas das propriedades apreendidas diretamente do comportamento gráfico. Por fim, com a TSD (BROUSSEAU, 1986), temos a possibilidades de sistematização e replicação em outras situações e momentos de ensino.

Introdução

A noção de integral de Riemann, nos livros de Cálculo Diferencial e Integral, no Brasil, assume determinadas restrições (como a continuidade) da função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, que garantem a existência/significado de $\int_a^b f(x)dx$. Por outro lado, a referida noção, do ponto de vista histórico, foi generalizada, a partir dos trabalhos de figuras emblemáticas, tais como: Cauchy, Du Bois Raymond, Dirichlet, Lebesgue (CAVAILLÉS, 1962).

Daí, podemos falar sobre a integral generalizada, que passa a considerar uma classe maior de funções, tais como: (i) funções definidas em intervalos abertos ou semi-abertos; (ii) funções com imagem ilimitada. E não necessariamente contínuas em todos os pontos do seu domínio. Não obstante, diante dos entraves indicados no ensino de Cálculo e de Análise, indicaremos de que modo a tecnologia pode proporcionar outras vias para a significação da referida noção. No próximo segmento, desenvolveremos uma rápida discussão em torno desta noção e do seu ensino.

Sobre a noção de integral imprópria nos livros de Análise Real

Reconhecidamente, o caráter abstrato de apresentação dos conceitos no contexto de Análise Real, que divisamos em compêndios especializados (DJAIRO, 1996; LIMA, 2005) utilizados no Brasil, influencia, de modo pouco questionado, as abordagens e expedientes didáticos para a apresentação da noção de integral, inclusive, nas disciplinas de Cálculo Integral. Não obstante, patenteamos autores como Bloch (2011, p. 342) que evidencia o caráter heurístico inerente à noção de integral imprópria, ao afirmar que “podemos pensar numa aproximação deste intervalo, por meio de intervalos do tipo $[a, t]$, onde $t \in (a, b)$ e t é pensado como cada vez mais próximo do ponto $x = b$. Neste caso, o autor considera funções do tipo $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$.”

Tal descrição permite interpretar o símbolo $\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x)dx$, como as aproximações sucessivas de contribuições de área, segundo a definição da integração clássica de Riemann, entretanto, retirando a condição de continuidade em $x = b$. No próximo segmento, tendo em vista os elementos indicados nesta seção que podem atuar como entraves ao entendimento, indicaremos a exploração da noção de integral imprópria, com o apoio da tecnologia, como uma via distinguida, com vistas ao entendimento heurístico e intuitivo da mesma. Outrossim, assumimos como hipótese, pois, de investigação, que a mediação envolvendo o uso de um *software* (Geogebra, em nosso caso) permitem suavizar a abordagem axiomática e estruturante da Análise.

Metodologia e procedimentos de investigação

O estudo desenvolvido no segundo semestre de 2012, no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará – IFCE se apoiou em um *design* de investigação (PONTE, 1994, p. 4) de cunho qualitativo. Nesta modalidade, “a fonte direta de dados foi o ambiente natural e o investigador o instrumento principal.” (BOGDAN & BIKLEN, 1994, p. 47). De caráter descritivo e exploratório, nossa investigação considerou dados oriundos de entrevistas semi-estruturadas realizadas ao decorrer de uma atividade, fotos, gravações de áudio (com o *software Cantasia*) e os protocolos das atividades produzidos por cinco sujeitos (alunos 1, 2, 3, 4 e 5).

Cabe acrescentar que este grupo de (cinco) alunos cursava, há época, o 4º semestre do curso de Licenciatura em Matemática (em 2012) e, na disciplina Cálculo II, já detinham todo o conhecimento formal que os qualificava para a resolução da atividade que doravante apresentaremos. Tendo em vista, pois, do nosso interesse de compreender um determinado fenômeno, num contexto determinado e um assunto particular, o tipo de

estudo escolhido foi o estudo de caso (BOGDAN & BIKLEN, 1994, p. 89). Assim, diante de alguns entraves relatados na literatura (ALVES, 2012a, 2012b) estruturamos e concebemos algumas atividades que permitem um percurso investigativo negligenciado por esses autores, além de buscar a superação dos mesmos. Seguem, pois, a atividade:

(I) Com base nos gráficos exibidos no computador. Decidir: (i) o tipo de integral apropriado; (ii) seu comportamento de convergência ou divergência. Justifique!

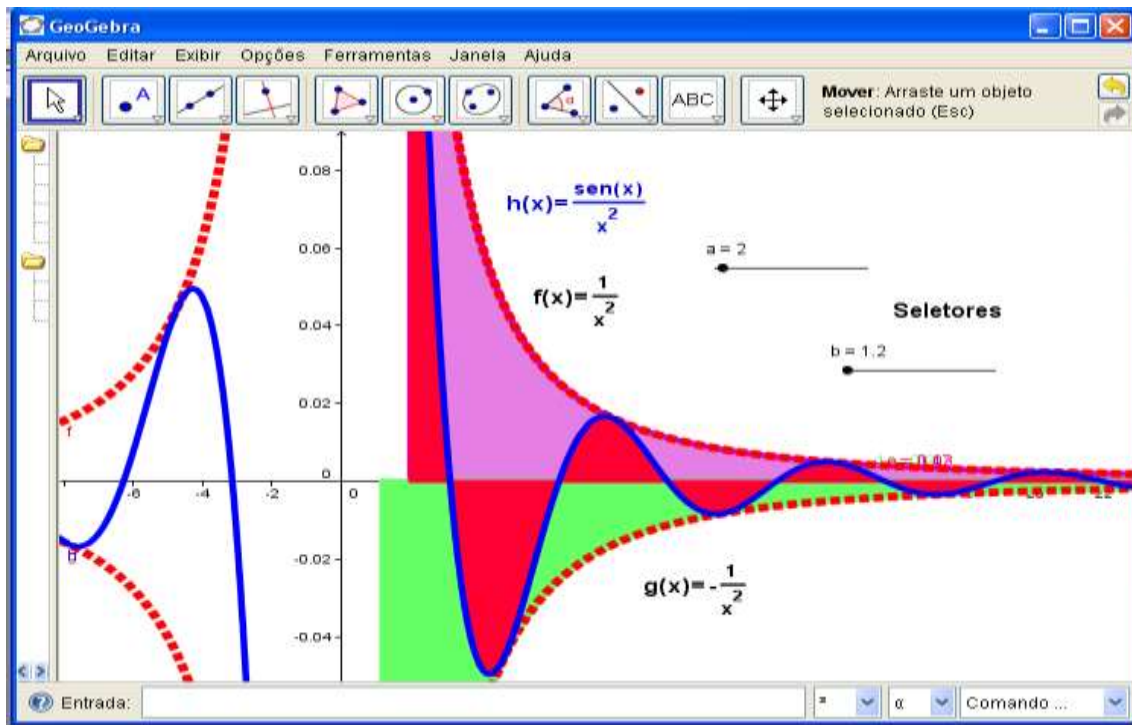


Figura 1. Atividade proposta em sala de aula com arrimo na tecnologia

Comentários: Os elementos presentes na situação (I) evitam o tratamento algébrico e manipulatório precipitado, no que diz respeito da estratégia a ser seguida. Neste sentido, vale recordar que embora possamos identificar o principal objeto matemático, vinculado a tal situação, o cenário que exibimos na figura 1, é carregado de opções epistemológicas e pressupostos didáticos. Sua estruturação deve permitir a transformação do discurso matemático (BROUSSEAU, 1986, p. 83). Ademais, o sentido desta situação, envolve um conjunto de estratégias possíveis, como marco inicial na visualização (ALVES, 2012b). Todas as atividades (e o áudio) de *desktop* foram registradas e gravadas por intermédio do *software Cantasia*.

Discussão dos dados

Passaremos, pois, a analisar parte dos extratos produzidos pelos alunos participantes do estudo. Neste sentido, o aluno 1, ao inspecionar o gráfico presente na atividade 1, manifesta uma interpretação dinâmica, vinculada à noção de integral imprópria. De fato,

podemos patentear os elementos indicados nas linhas 2, 5, 6 e 7. Sublinhamos ainda na linha 7, o cuidado da definição da integral, com origem na visualização.

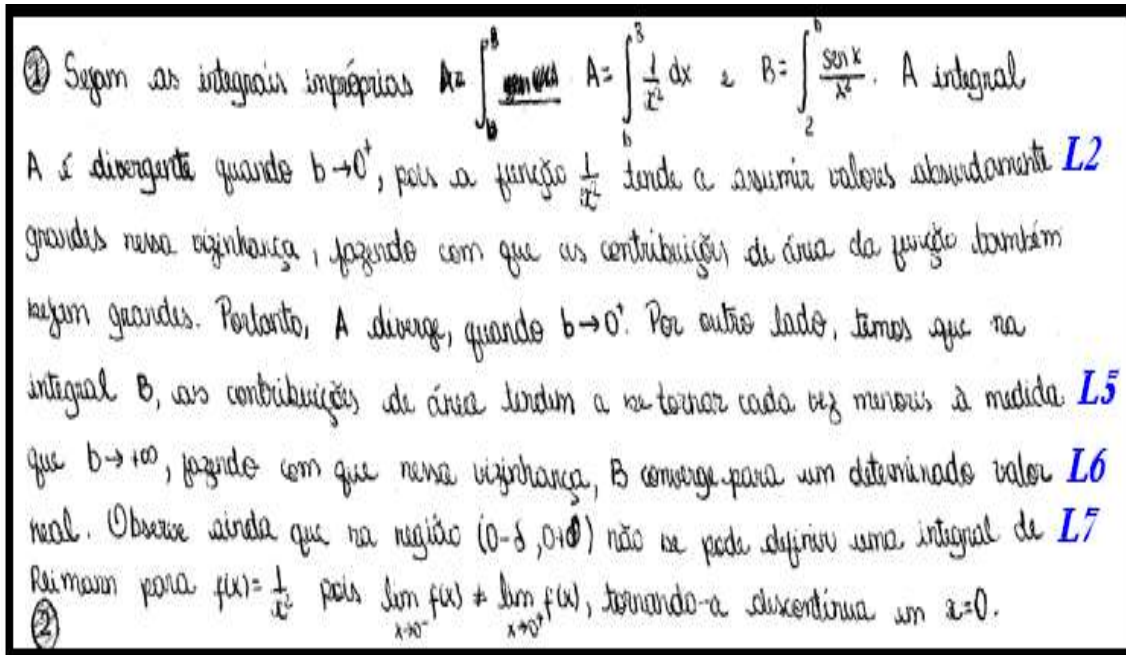


Figura 2. Produção escrita do aluno 1 na atividade 1.

Na figura 2, indicamos na linha 2, que a análise do gráfico precedeu e funcionou como um guia para a definição de uma estratégia e, na etapa final, a aplicação do modelo analítico adequado a situação. Na linha 3, o aluno 2 descreveu de modo dinâmico, as contribuições área que descrevem o processo de cálculo da integral imprópria. Tanto esse aluno, bem como os demais, exploraram a construção geométrica que exibimos na fig. 1. Manipularam e investigaram seu comportamento, alterando os seletores ‘a’ e ‘b’.

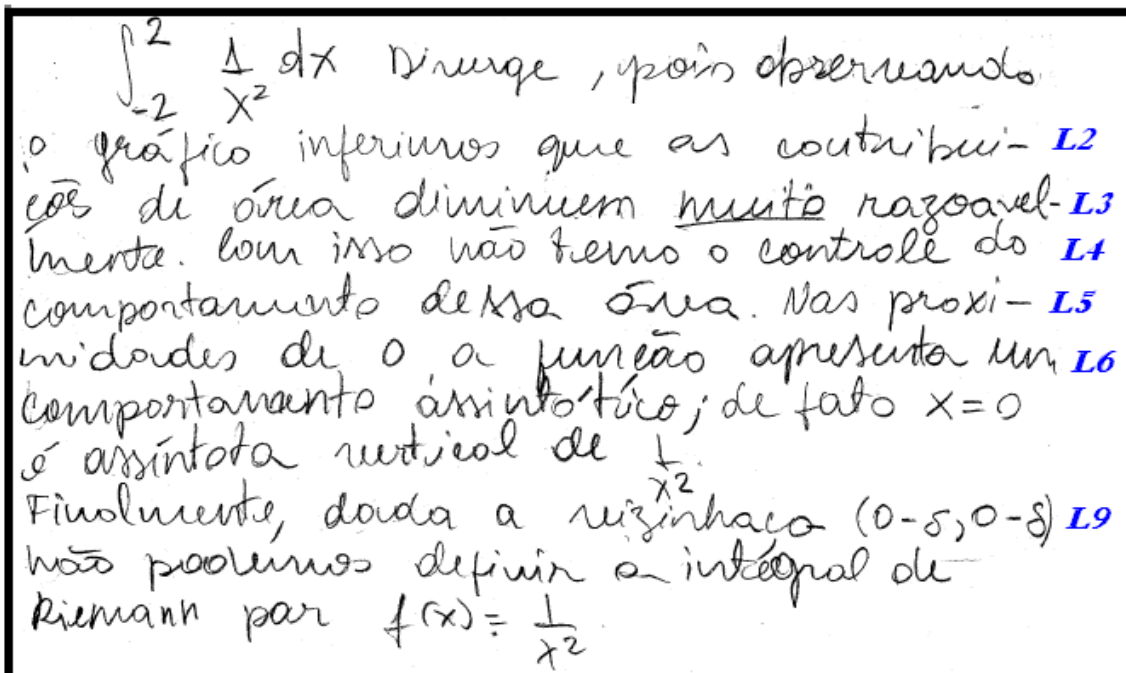


Figura 3. O aluno 2 descreve o comportamento da integral a partir do gráfico

Na figura 4, o aluno 3, decidiu o comportamento de convergência da integral $\int_4^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2} dx$. Vale sublinhar que a descrição desta integral foi originada diretamente no gráfico exibido na figura 1. Não indicamos, de maneira precipitada, a integral de nosso interesse, envolvida na situação da atividade (I), nem muito menos, a determinação, de maneira peremptória, dos limites desejados no cálculo. Tal indicação, quando antecipada na resolução do problema, evita que o solucionador manifeste preocupações concernentes às questões pertinentes à existência da integral investigada.

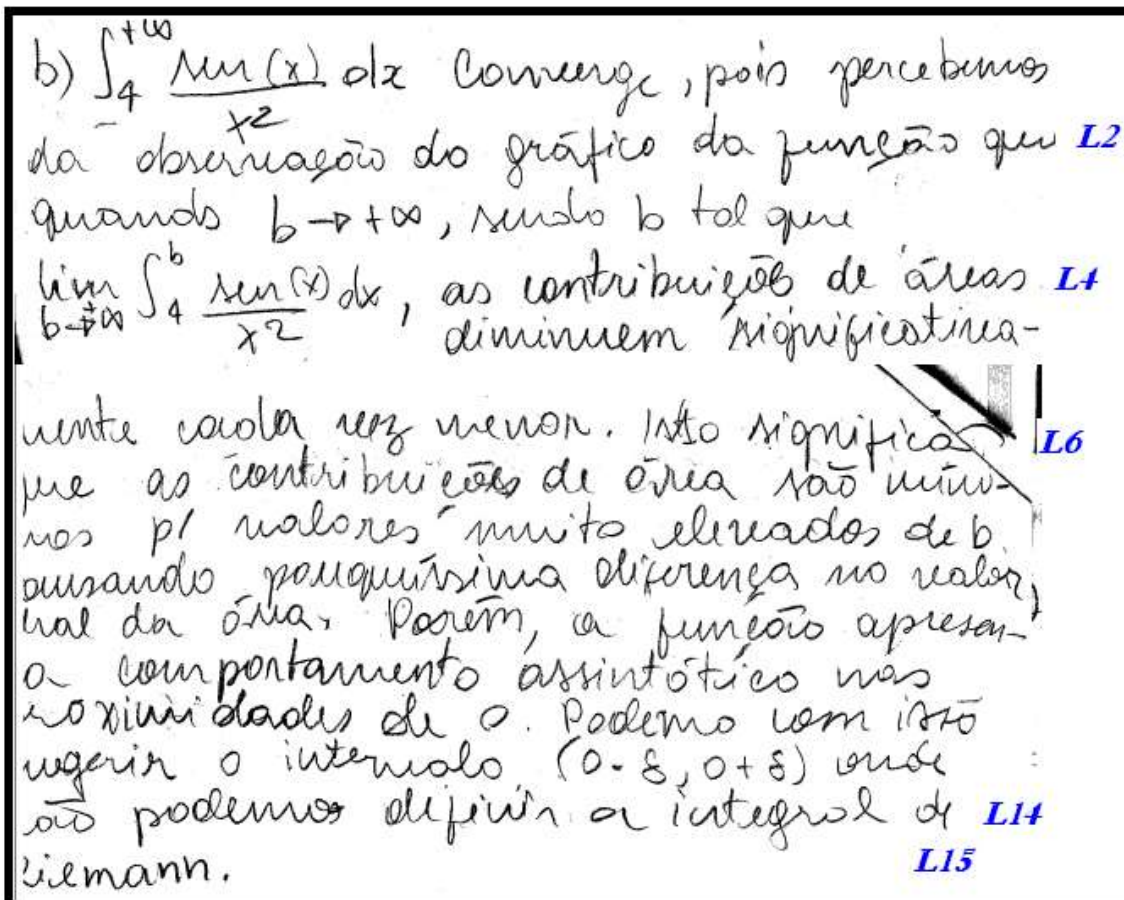


Figura 4. O aluno 3 indica, do ponto de vista topológico, a região adequada, na qual, podemos contar com a existência e sentido da integral imprópria

Na figura 5, colocamos em evidência o erro manifestado pelo aluno 4. Reparemos, nesse caso, que o fator da mediação mais observado, diz respeito ao momento em que o aluno empregou, de fato, uma estratégia de natureza analítica. Nessa, como em outras situações, apenas depois de desenvolver uma análise visual e apreensão perceptual de propriedades indicadas na figura 1, o aluno 4 procedeu a resolução analítica.

argue:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \Rightarrow \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{1}{x^2} dx \Rightarrow \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(x \right)_0^b \Rightarrow \lim_{b \rightarrow +\infty} (b - 0) = +\infty \quad \text{diverge}$$

a integral $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ diverge, pois o seu comportamento tende a $+\infty$ para $+\infty$.

Analogamente $\int \frac{\sin x}{x} = \int \frac{-1}{x^2}$. $-\frac{1}{x^2} < \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x^2}$

Figura 5. Descrição da estratégia analítica empregada na atividade

Nesse sentido, vale salientar a dificuldade manifesta pelos alunos, no sentido de empregar teoremas e propriedades conhecidas, no contexto da integral de Riemann, ao novo contexto de estudo da integral generalizada. Neste sentido, trazemos, em consonância com o caso anterior do aluno 4, as dificuldades registradas nas estratégias de natureza analítica, efetivadas pelo aluno 5 (ver figura 6).

(II) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$, a reta $x=0$ também funciona como assíntota. DE MODO QUE A FUNÇÃO É DESCONTÍNUA NO PONTO $x=0$, ASSIM A INTEGRAL ~~CONVERGE~~ CONVERGE PARA TODO $x \neq 0$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{1}{x^2} dx \Rightarrow \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{b^2} - \frac{1}{0} \right] = 0$$

~~CONVERGE~~ COMO A INTEGRAL DEU UM VALOR. A INTEGRAL CONVERGE

ANALIZANDO (I)

$-1 \leq \sin(x) \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{x^2} \leq \frac{\sin(x)}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$; COMO AS FUNÇÕES DOS EXTREMOS CONVERGEM A INTEGRAL $\int_a^b \frac{\sin(x)}{x^2} dx$ CONVERGIRÁ.

Figura 6. O aluno 5 manifesta erros no uso da definição da integral imprópria. Ademais, não consegue explicitar a propriedade formal que confirma a validade do seu argumento

Recordemos propriedades como (*) $\int_a^x f(x) dx \leq \int_a^x h(x) dx \leq \int_a^x g(x) dx$, onde se tem, por hipótese $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, contando com a convergência das integrais $\int_a^x f(x) dx$ e $\int_a^x g(x) dx$. Observamos na figura 6 que o aluno 5 escreveu $-1/x^2 \leq \sin(x)/x^2 \leq 1/x^2$ o que deve implicar em (*). Registramos ainda, de modo similar ao aluno 4, o mesmo erro operacional e conceitual ao empregar a formulação

$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b x^{-2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} [-1/x]_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} [-1/b + 1] = 1$. O aluno 5 deveria

ter percebido a impossibilidade de avaliar $\int_0^{\infty} dx/x^2$. Por fim, na fig. 7, indicamos a imagem de parte das manipulações desenvolvidas pelo aluno 5. De modo similar aos seus pares, esse aluno explorou as figuras, analisou o comportamento dos gráficos e das regiões de integração (em cor verde/vermelho), percebeu os pontos, no quais, o *software* *Geogebra* indica como indefinido o valor de integral, dada a descontinuidade da função.

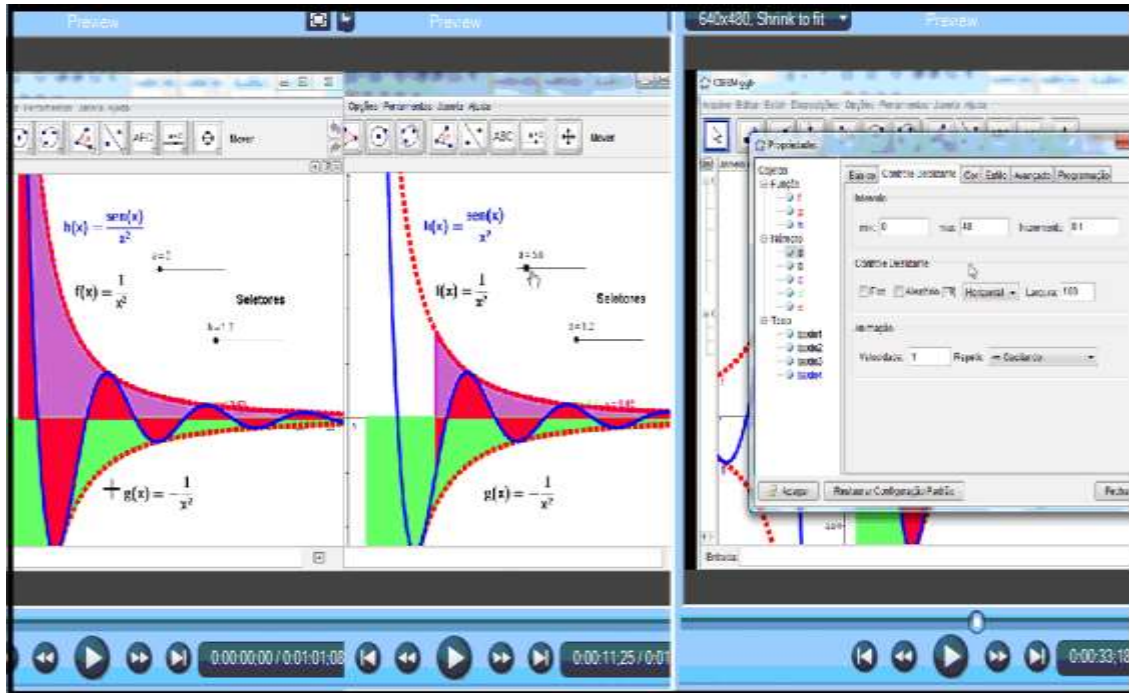


Figura 7. Descrição e análise do áudio e das atividades de *desktop* desenvolvidas pelo aluno 5

Outro aspecto relevante diz respeito ao caráter de entendimento da interpretação dinâmica de todo processo envolvido. Nesse caso, para valores $x \rightarrow +\infty$, os alunos observaram que as contribuições de área tendem a diminuir o que lhes sugere a convergência das integrais. Por outro lado, perceberam que as contribuições de área tendem a aumentar, de modo rápido, na medida em que $x \rightarrow 0^+$. Tal tipo de investigação se mostra inexecutável sem o aparato computacional (ALVES, 2012b)

Considerações Finais

Reconhecidamente, a hegemonia de um ensino acadêmico, que fortalece rituais indefectíveis de ensino, caracterizados pela hegemonia do formalismo e elevado grau de abstração, se preserva como tônica geral no *locus* acadêmico. Por outro lado, a atividade (I) analisada neste estudo de caso proporcionou o entendimento de um fenômeno particular, com a produção de conjecturas e a mobilização de um saber (BROUSSEAU, 1986) oriundo da percepção de propriedades gráfico-geométricas (ALVES, 2012b).

O uso do *software Geogebra* permitiu a exploração do cenário de aprendizagem sugerido na atividade (I). Nesta, registramos que, de modo predominante, a investigação dos alunos se iniciou com a inspeção do gráfico. Em seguida, a elaboração de conjecturas e mobilização do saber, oriundo de percepção das propriedades gráfico-geométricas. E, por fim, a testagem e/ou verificação de propriedades dinâmicas do gráfico evitam o emprego precipitado, de natureza predominantemente algébrico-analítica, o que constituiu a comprovação de nossa hipótese de estudo.

Por fim, vale comparar os saberes produzidos pelos alunos 1, 2, 3, 4 e 5, como origem na visualização, com os dados produzidos na efetivação das estratégias de resolução analítica. Esses últimos são passíveis de uma avaliação, por parte do professor, sob a égide restrita do formalismo regida pela axiomática tradicional da Análise Real. Não obstante, os dados indicados nas figuras 2, 3 e 4, possibilitam uma avaliação qualitativa e envolvem o entendimento idiossincrásico dos indivíduos, no que se refere aos teoremas e definições (ALVES, 2012a) envolvidas na atividade (I).

Referencias bibliográficas

- Alves, F. R. V. (2012). Interpretação geométrica de definições e teoremas: o caso de Análise Real. In: *Actas da Conferência Latinoamericana do Geogebra*. Montevideo. Acessado: 28 de novembro de 2012. Disponível em: <<http://www.geogebra.org.uy/2012/home.php?pagina=trabajos/actas.php>>.
- Alves, F. R. V. (2012). Discussão sobre a noção de integral imprópria com o uso do Software Geogebra: In: *Actas da Conferência Latinoamericana do Geogebra*. Montevideo.
- Bloch, E. D. (2011). *The Real Number and the Real Analysis*. New York: Springer.
- Figueiredo, D. G. (1996). *Análise I*. 2ª edição. Rio de Janeiro: LTC.
- Lima, E. L. (2005). *Análise Real*. v. 1, Rio de Janeiro: SBM. 148f.
- Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação*. Porto: Porto Editora.
- Brousseau, G. (1986). *Théorisation des phénomènes d'enseignement de mathématiques*. (Thèse d'État et Sciences). Bordeaux : Université de Bordeaux I. 905f.
- Cavaillés, J. (1962). *Philosophie des Mathématiques*. Paris: Hermann.
- Ponte, J. P. (1994). O estudo de caso na Investigação em Educação Matemática. In: *Quadrante*. 3-1, p. 3-18. Acessado: 28 de novembro de 2012. Disponível em: <[http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt%5C94-Ponte\(Quadrante-Estudo%20caso\).pdf](http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt%5C94-Ponte(Quadrante-Estudo%20caso).pdf)>.