O DESEMPENHO DE ALUNOS DO 6º ANO EM QUESTÕES QUE ENVOLVEM A OBTENÇÃO DOS FATORES DE UM NÚMERO E SUA DECOMPOSIÇÃO EM FATORES

Gabriela S. Barbosa e Sandra M. P. Magina
Gabrielasb80@hotmail.com e sandramagina@gmail.com
UERJ/Brasil e UESC e PUC-SP/Brasil

Tema: Pensamento Numérico
Modalidade: Comunicação Breve
Nível: Primário (6 a 11 anos)
Palavras-chave: Teorema Fundamental da Aritmética. Fatores. Situações. Representações. Jogos.

Resumo

O presente artigo objetiva analisar o desempenho de alunos de 6º Ano do Ensino Fundamental de uma escola particular da zona norte do Rio de Janeiro, Brasil, em situações-problema que envolvem a obtenção dos fatores e decomposição de um número. Para tanto, aplicamos um diagnóstico (pré e pós-testes) antes e após uma intervenção de ensino baseada em atividades lúdicas e jogos. Neste artigo, analisaremos três situações do teste, o qual enfocou conceitos associados ao Teorema Fundamental da Aritmética. Os resultados apontam que houve crescimento significativo nos rendimentos dos alunos nas três situações. Com base nas ideias de Vergnaud (1996), Campbell (2002), Barbosa (2002), Piaget (1994) e Macedo, Petty e Passos (2000) analisamos as representações, estratégias e equívocos encontrados nas soluções e em que medidas eles foram superados. Concluímos que, para o grupo pesquisado, as atividades lúdicas e os jogos contribuíram fortemente para o avanço na compreensão dos conceitos em questão.

Introdução

No presente artigo temos o objetivo de analisar o desempenho de alunos de 6º Ano do Ensino Fundamental de uma escola particular da zona norte do Rio de Janeiro, Brasil, em situações-problema que envolvem a obtenção dos fatores e decomposição de um número. Trata-se de um recorte de uma pesquisa mais ampla que teve por objetivo descrever e analisar o processo de construção dos principais conceitos associados ao Teorema Fundamental da Aritmética pelo mesmo grupo. Cabe mencionar que, entre estes conceitos, estão os conceitos de múltiplo e fator, de divisibilidade, de distinção entre números primos e compostos, de decomposição em fatores primos e da utilização da decomposição como estratégia de cálculo. A pesquisa de campo, que forneceu dados para tal investigação, foi constituída por três etapas: a primeira correspondeu à aplicação de um teste diagnóstico com nove questões; a segunda à realização, durante dois meses, de uma intervenção de ensino composta por jogos e outras atividades lúdicas; e a terceira envolveu a reaplicação do teste diagnóstico utilizado na primeira etapa, para investigar as contribuições efetivas da intervenção de ensino. Cabe mencionar que para cada uma das etapas de aplicação dos testes, os alunos trabalharam individualmente durante dois encontros de 100 minutos, sem consultar a professora, que apenas fazia uma leitura prévia do material. Para efeito deste artigo, compararemos o desempenho dos alunos nas questões 3, 4 e 5, que abordam a obtenção dos fatores e a decomposição de números. Doravante chamaremos essas questões de q3, q4 e q5. Disponibilizamos em anexo o teste na íntegra. Para que o leitor tenha mais informações sobre as etapas do estudo (desenho do experimento), a figura 1 a seguir apresenta um quadro síntese da pesquisa.

Atividade	Duração	Conceito (s) envolvidos (s)
Aplicação do teste diagnóstico – 100 min		
1) jogo de restos	150 min	Divisão euclidiana
2) construção de retângulos	150 min	Reconhecimento dos fatores de um número
3) tábua de Pitágoras	100 min	Propriedades dos fatores e dos múltiplos de um número
4) jogo de mensagem	150 min	Representações para o produto de mais de dois números
5) jogo do telegrama	150 min	Decomposição de um número em fatores
6) construção da árvore de decomposição	150 min	Decomposição em fatores primos de um número
7) jogo da árvore	150 min	Relações entre os fatores primos de um número e os fatores primos dos fatores deste número
Reaplicação do teste diagnóstico – 100 min		

Figura 1: Apresentação da pesquisa de onde os dados foram extraídos

A teoria que deu sustentação para a realização do estudo foi a Teoria dos Campos Conceituais, a qual apresentaremos sucintamente a seguir.

A Teoria dos Campos Conceituais e o papel dos jogos no processo de ensino-aprendizagem

Desde a elaboração do teste até sua aplicação e correção estivemos fundamentados na Teoria dos Campos Conceituais (TCC). Esta é uma teoria cognitivista que tem fornecido subsídios para o estudo dos processos de construção de conceitos presentes nas ciências exatas, com destaque para os conceitos matemáticos e físicos. Segundo Vergnaud (2009), seu criador, um conceito não pode ser construído isoladamente. Um conceito está associado a muitos outros formando um campo conceitual. Para a formação de conceito, por sua vez, é necessário que o indivíduo interaja com uma diversidade de situações. As situações que escolhemos para trabalhar os conceitos relacionados ao teorema fundamental da aritmética, envolveram jogos atividades lúdicas.

Nossa opção por utilizar jogos vem da importância que autores consagrados como Piaget e Macedo dão a tal ferramenta. De fato, Piaget (1994) explica que por meio dos jogos a criança pode vivenciar os processos de assimilação e de acomodação. Tais processos consistem em acrescentar novos eventos aos esquemas já existentes e em modificar esses esquemas. Trazendo a situação de jogo para a sala de aula, encontramos em Macedo, Petty e Passos (2000) que os jogos favorecem a produção de experiências significativas para os estudantes, seja em termos dos conteúdos disciplinares, seja por meio do desenvolvimento de competências e de habilidades.

Retornando à TCC, entendemos que, junto com as situações, as ideias de representação e esquemas formam os pilares desta teoria. Esquema é um conceito introduzido por Piaget, para considerar as formas de organização das habilidades sensório-motoras e das habilidades intelectuais. Um esquema gera ações e deve conter regras, é eficiente para toda uma série de situações e pode gerar diferentes sequências de ação, de coleta de informações e de controle, dependendo das características de cada situação particular. Existe, ainda, presente nos esquemas, uma série de conhecimentos, os chamados invariantes operatórios. Analisando os registros e representações que os alunos fizeram nos testes, procuramos identificar os esquemas que mobilizaram e os consequentes conceitos matemáticos subjacentes a cada um.

Estudos correlatos

As pesquisas da Campbell e Zazkis (2002) e Barbosa (2002) apontam para a necessidade de mudanças no ensino da Aritmética, respectivamente, nos cursos de formação de professores e na educação básica. É um aspecto consensual entre os pesquisadores a relevância do estudo da Teoria Elementar dos Números desde a educação básica, porque, aplicando seus conhecimentos da estrutura multiplicativa nesse contexto, o sujeito terá oportunidades valiosas para enriquecer sua compreensão das propriedades de multiplicação e divisão. Para fazer uso das possibilidades oferecidas pelos conceitos da estrutura multiplicativa, o indivíduo deve ter experiência com a representação de números naturais como produto (s) de primos. Isto inclui decompor em fatores primos, executar aritmética sobre as decomposições e usar a estrutura embutida nas fatorações para reconhecer e justificar relações de divisibilidade. Com base nestes estudos, procuramos inferir sobre os procedimentos empregados por nossos alunos.

Desempenho nas questões de identificação dos fatores de um número e sua decomposição em fatores (q3, q4 e q5)

Iniciando por uma análise quantitativa, como mostra o quadro, o teste de Mc Nemar apontou como significativo ao nível de 5% (p-valor menor ou igual a 0,05) o crescimento do número de acertos em q3, q4 e q5.

Questões	Teste Inicial (% de acerto)	Teste final (% de acerto)	Ganho (%)	p-valor
q3	**38,1**	**76,2**	**100,0**	**0,021**
q4	**15,0**	**70,0**	**366,7**	**0,001**
q5	**28,6**	**85,7**	**200,0**	**0,000**

Figura 1: Síntese dos desempenhos dos alunos nas questões q3, q4 e q5

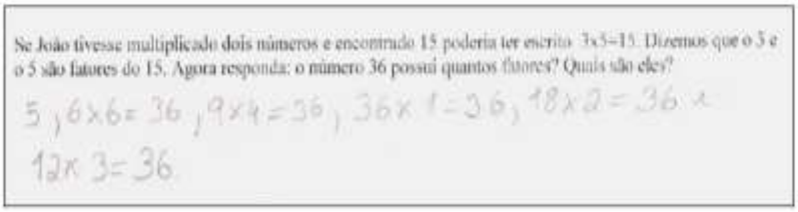
Isto foi, para nós, um forte indício da eficácia de nossa intervenção de ensino e nos conduziu a uma análise de cunho qualitativo cuja síntese apresentamos a seguir.

Para compreender a decomposição de um número em fatores primos e consequentemente, usá-la na otimização de cálculos e na realização de cálculos mentais, é preciso, antes de tudo, que o aluno admita a possibilidade de decompor um número em fatores, ou seja, escrevê-lo como produto de dois ou mais fatores. Nossa experiência, adquirida lecionando Matemática para turmas do Ensino Fundamental há cerca de 10 anos, associada às pesquisas de Campbell e Zazquis (2002) nos sugeriu que esta não é uma ideia facilmente concebida pelos alunos. Tanto em nossa prática profissional como na leitura dos artigos organizados por esses pesquisadores, percebemos que há alunos que, frente a um número, aplicam processos para fazer sua decomposição em fatores, obtêm-na satisfatoriamente, entretanto, não associam a decomposição que obtiveram ao número tomado inicialmente no processo.

Assim, por exemplo, o aluno obtém *2 x 3 x 5* a partir do 30, mas não reconhece que 30 é, na verdade, o resultado de *2 x 3 x 5*. Nesse sentido, julgamos necessário investigar os conhecimentos prévios dos alunos da turma na qual realizamos nossas investigações sobre a decomposição de um número e, por isso, as questões q3, q4 e q5 constaram nas avaliações inicial e final.

Na questão q3, foi proposto aos alunos decompor 36 em produtos de dois fatores. Nas questões q4 e q5, propusemos que identificassem os fatores de, respectivamente, 36 e 7. Escolhemos estes números justamente para verificar se haveria alguma diferença no tratamento que dariam a números primos e compostos, muito embora as questões ainda não apresentassem esta nomenclatura. É importante salientar que os percentuais de crescimento das taxas de acerto das três questões foram considerados significativos pelo Teste de McNemar. Os erros verificados na avaliação inicial foram, em sua maioria, superados na avaliação final.

Em q4 e q5, os cálculos e a identificação dos fatores com os produtos foram as causas dos erros cometidos pelos alunos. Por exemplo, ao produzirem a falsa igualdade *3 x 13 = 36*, alguns alunos indicavam 3 e 13, como fatores de 36. Já a identificação dos fatores com o produto pôde ser melhor esclarecida pela análise do protocolo apresentado na Figura 3:


Se João tivesse multiplicado dois números e encontrado 15 poderia ter escrito 3x5=15. Dizemos que o 3 e o 5 são fatores do 15. Agora responda: o número 36 possui quantos fatores? Quais são eles?

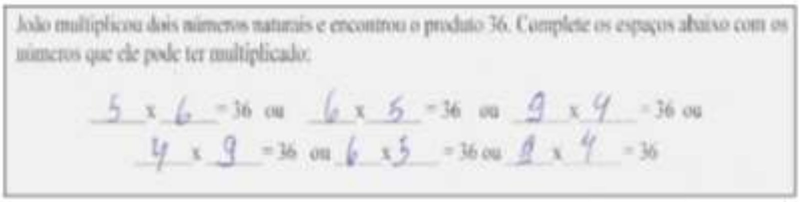
5, 6x6=36, 9x4=36, 36x1=36, 18x2=36 e 12x3=36

Figura 3: Identificação dos fatores como produtos

Em lugar de o aluno escrever que os fatores de 36 são 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 e 36, ele considerou que a resposta certa a esta solicitação eram os produtos que havia escrito na questão anterior: *2 x 18*, *3 x 12*, *4 x 9*, *6 x 6*, *1 x 36*. Assim, escreveu que o 36 possui 5 fatores. Este equívoco foi bastante frequente na avaliação inicial e nós inferimos que os enunciados destas questões associados à q3 induziram os alunos a cometê-lo. Outra justificativa fundamenta-se nas pesquisas de Campbell e Zazquis (2002) e Barbosa (2002) que revelam a tendência dos alunos para associar fatores à divisão e múltiplos à multiplicação.

Por fim, as omissões dos produtos *3 x 12*, *2 x 18*, *6 x 6* e *1 x 36* foram os únicos fatos que nos chamaram atenção em q3. As justificativas que os alunos deram para tais omissões foram úteis para que compreendêssemos seus procedimentos em algumas atividades na intervenção de ensino.

Os produtos *3 x 12* e *2 x 18* foram esquecidos, pois, como verificamos nas conversas com os alunos, não constam nas tabuadas de 1 a 10, que eles memorizaram desde os anos iniciais e era exatamente nelas que eles buscavam produtos que resultassem em 36. As omissões dos produtos *6 x 6* e *1 x 36* ocorreram porque, para eles, era necessário que os números a serem multiplicados fossem diferentes e não fazia sentido que o próprio 36 fosse usado como fator. Estas concepções, inicialmente, foram obstáculos para a formalização dos conceitos e para o reconhecimento de propriedades das relações "múltiplo de" e "fator de" durante a intervenção de ensino. Na questão q3, eram oferecidas lacunas para que os alunos completassem com os produtos. Ao omitirem algum deles, pelo menos uma lacuna sobrava. Nestes casos, ou os alunos deixavam a (s) lacuna (s) em branco ou aplicavam a propriedade comutativa e trocavam a ordem dos fatores de algum produto que já tivessem escrito como mostra a Figura 4 a seguir:


João multiplicou dois números naturais e encontrou o produto 36. Complete os espaços abaixo com os números que ele pode ter multiplicado:

5 x 6 = 36 ou 6 x 5 = 36 ou 9 x 4 = 36 ou
4 x 9 = 36 ou 6 x 5 = 36 ou 9 x 4 = 36

Figura 4: Aplicação da propriedade comutativa da multiplicação

Não tendo escrito os produtos *3 x 12* e *2 x 18*, o aluno aplicou a propriedade comutativa e preencheu as lacunas com *4 x 9* e *9 x 4*. Mesmo a falsa igualdade, proveniente de erros de cálculos, teve a ordem dos fatores invertida. Esta atitude dos alunos foi um exemplo do processo de equilibração e acomodação de esquemas descrito por Vergnaud (1990) na Teoria dos Campos Conceituais. Eles possuíam esquemas suficientes para dar conta do preenchimento de algumas lacunas: aquelas cujos pares de números se encontram nas tabuadas de 1 a 10. Mas encontrar os pares cujo produto é 36 que não se encontram nas tabuadas de 1 a 10 constituiu-se um situação conflituosa para eles. Assim, foram buscar na bagagem de esquemas que já dominavam, algum que pudesse ajudá-los a lidar com a situação. Encontraram este que tem como invariante operatório a propriedade comutativa da multiplicação, entretanto ele não contribuiu para que o conflito fosse desfeito. Afinal, desconsiderando-se a ordem, os pares eram os mesmos e aqueles esperados não foram encontrados.

Na intervenção era fundamental propor atividades que favorecessem a ampliação do esquema empregado pelos alunos para buscar fatores de um número. Caso contrário, continuariam identificando apenas os fatores dos números que constam nas tabuadas de 1 a 10. Como fruto de nossa preocupação e do trabalho realizado na intervenção, identificamos, na avaliação final, a mudança de procedimento dos alunos, sobretudo em q4 e q5.

A busca dos fatores passou a ser fundamentada na reversibilidade entre multiplicação e divisão. Um esquema muito comum empregado para a obtenção dos fatores de 36 foi realizar a divisão deste número pela sequência dos números naturais e escolher aqueles cuja divisão foi exata. Trata-se de um esquema em que os alunos tinham, inclusive, o controle de suas ações: sabiam que o processo não deveria ser repetido indefinidamente. Alguns o interrompiam quando dividiam por 18, alegando que *"depois do 18, que é o meio, só o 36 mesmo"* e outros interrompiam-no apenas quando dividiam por 36 e, nas divisões, por sua vez, ora armavam cálculos, ora empregavam critérios de divisibilidade. Outro esquema, muito empregado na avaliação final, para a obtenção dos fatores de 36, está representado na Figura 5:

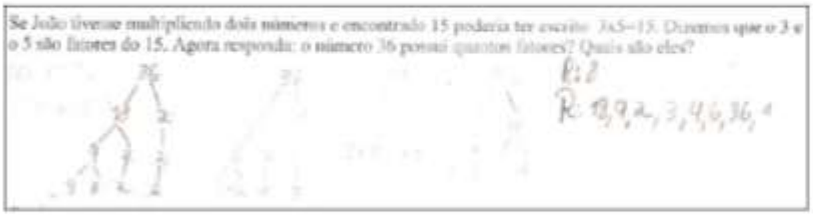


Figura 5: Obtenção dos fatores utilizando a árvore

Podemos ver que o aluno desenhou uma representação gráfica, que denominamos "árvore do 36" e obteve os divisores por meio da manipulação dos números que apareceram nela, tendo se esquecido apenas do 12. Implícitas na ação do aluno estão a decomposição do 36 em fatores primos e a observação desta para obter os fatores. Trata-se de um raciocínio extremamente sofisticado que Campbell e Zazquis (2002) não conseguiram verificar nem entre professores em formação, que constituíam os sujeitos de suas pesquisas. Segundo os mesmos autores, a reflexão sobre este procedimento cria condições para a construção de outros conceitos da Teoria Elementar dos Números, como o m.m.c. e o m.d.c..

Considerações Finais

Ao apresentarmos nossos resultados, não temos a pretensão de generalizá-los para além do universo pesquisado, pois temos consciência de que se trata de um estudo com um pequeno número de sujeitos. Não temos, também, a pretensão de apontar o melhor ou único caminho a ser percorrido pelos alunos para a construção dos conceitos ligados ao Teorema Fundamental da Aritmética.

Sabemos que cada sujeito traça o seu caminho e que outros fatores, como as experiências anteriores com o assunto ou com as situações-problema propostas são determinantes para sua caminhada. Acreditamos que nossos resultados poderão trazer contribuições significativas para a discussão científica sobre a construção de conceitos ligados não só ao Teorema Fundamental da Aritmética como à Teoria dos Números, de modo geral.

Referências

Barbosa, G. S. (2002). *Construção dos conceitos de múltiplo e divisor à luz da Psicologia de Vygotsky*. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Rio de Janeiro: Universidade Santa Úrsula.

Campbell, S. (2002). Coming to terms with division: Preservice teachers' understanding. In: campbell, S. Zazkiz, R. (Org.). *Learning and Teaching Number Theory.* (pp. 1-14). Westport: Ablex Publishing.

Macedo, L. de; petty, A. L. S.; PASSOS, N. C. (2000). *Aprender com jogos e situações problemas.* Porto Alegre: Artes Médicas.

Piaget, J. (1994). *A formação do símbolo na criança: imitação, jogo e sonho; imagem e representação*. Trad. Cabral, A. Oiticica, C. M. (3ª ed.) Rio de Janeiro: LTC.

Vergnaud, G. (2009). *A criança, a Matemática e a Realidade: problemas do ensino da matemática na escolar elementar*. Trad. Moro, M. L. F. Curitiba: UFPR Press.

Anexo 1

TESTE DIAGNÓSTICO

Nome: ____ Data: __/__/ __

1) Você tem a sua disposição embalagens tradicionais de ovos e de bombom FERRERO. Observe-as atentamente.

a) Agora imagine que você quer desenhar as embalagens para 5 dúzias de ovos. Como ficará o desenho? E a sentença?

Desenho
Sentença:

b) E se você quiser desenhar 4 embalagens de bombom FERRERO. Como ficará o desenho? E a sentença?

Desenho
Sentença:

2) A quantidade de bichinhos de pelúcia que Bruna tem é menor que 50. Separando-os em grupos de 5, sobram 3 e separando-os em grupos de 9, sobram 2. Quantos bichinhos de pelúcia Bruna tem?

Cálculo Sentença

Resposta: ____

3) João multiplicou dois números naturais e encontrou 36. Complete os espaços abaixo com os números que ele pode ter multiplicado:

______x ______= 36 ou _____x______ = 36 ou ______x______ = 36 ou

______x ______= 36 ou _____x_____ = 36 ou _____x______ = 36

4) Se João tivesse multiplicado dois números e encontrado 15 poderia ter escrito 3 x 5 = 15. Dizemos que o 3 e o 5 são fatores do 15. Agora responda: o número 36 possui quantos fatores? Quais são eles?

____

5) O número 7 possui quantos fatores? Quais são eles?

____

6) Além do número 7, você conhece outros números que só possuam como fatores o 1 e si mesmo? Dê, pelo menos, três exemplos.

____

7) Os números que só possuem como fator o 1 e si são chamados <u>***números primos***</u>. Agora tente escrever o 36 como um produto envolvendo apenas <u>***números primos***</u>. Mas, atenção: você pode repeti-los quantas vezes precisar!

____

8) Complete os espaços em branco. Não deixe de fazer os cálculos no papel!

a) João dividiu 2 x 3 x 5 x 11 por 2 x 3 x 5 e encontrou ....

b) Gabriela dividiu 2x 3 x5 x 11 por 3 x 11 e encontrou ......

c) Ana dividiu 2x 3 x5 x 11 por 2 x 5 e encontrou ......

d) Gabriela dividiu 2x 3 x5 x 11 por um certo número e encontrou 55. O número é...

9) Resolva a questão abaixo:

a) Dividi 50 por 5. Dividi o cociente encontrado por 2 e encontrei como resultado o cociente igual a ___________.
Agora observe atentamente o que você fez e, em seguida, complete os outros itens.

Não deixe de explicar o que você fez ou pensou para completar:

b) Dividi __________ por 3. Dividi o cociente encontrado por 2 e encontrei como resultado o cociente igual a 8.

Explicação:

c) Dividi 36 por _____________. Dividi o cociente encontrado por 2 e encontrei como resultado o cociente igual a 2.

Explicação: