

UNA EXPERIENCIA DE INTRODUCCIÓN TEMPRANA DEL PENSAMIENTO PRE-ALGEBRAICO CON NIÑOS DE 7 AÑOS.

Ismael Emhamed – M. Pilar Vélez
ierlive@live.com – pvelez@nebrija.es
Universidad Antonio de Nebrija (Madrid, España)

Núcleo temático: Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos.

Modalidad: CB

Nivel educativo: 2. Primario (6 a 11 años)

Palabras clave: Pensamiento algebraico, Algebra temprano, Educación primaria, Experimento de investigación

Resumen

Presentamos una experiencia de aula enfocada a despertar procesos característicos del pensamiento pre-algebraico en niños de 2º de Educación Primaria. Se parte de la hipótesis de que los niños son capaces de desarrollar métodos y pensamiento algebraicos más allá de los considerados meramente aritméticos. A tal efecto se han diseñado un conjunto de actividades que, sin sustituir materia, pueden ser incorporadas al currículo. El experimento ha sido realizado en dos centros educativos y a un total de 82 alumnos. Los resultados obtenidos se han analizado de forma cualitativa y cuantitativa a partir de elementos de medición previamente establecidos y de la observación en el aula.

Introducción

El desarrollo del pensamiento algebraico en educación matemática ha ocupado una posición predominante en las dos últimas décadas. Esa sí que las investigaciones acerca de su introducción temprana en el panorama escolar han ido aumentando paulatinamente. Socas (2011) mantiene que, a pesar de la gran presencia del álgebra desde la Secundaria Obligatoria hasta la Universidad, durante los últimos veinte años han surgido multitud de propuestas para incorporar aspectos del pensamiento algebraico en Educación Primaria. Como se expone en Hodgen, Oldenburg & Stromskag (2017), en los últimos años el tema álgebra temprano y la relación o transición entre aritmética y álgebra ha sido recurrente e incluso acaloradamente debatido.

Esta tendencia, denominada “algebrización del currículo” (Kaput J., 2000), se resalta la necesidad de que los alumnos exploren, modelicen, hagan predicciones, discutan y argumenten (Blanton & Kaput, 2005). El *National Council of Teachers of Mathematics* afirma que la necesidad de “construir una base sólida de aprendizaje y experiencia como preparación para un trabajo más sofisticado en el álgebra de los grados medio y superior” (National Council of Teachers of Mathematics, 2000).

Así, cada vez es mayor el número de educadores e investigadores que consideran que el pensamiento algebraico debería ser parte del currículo de la educación primaria (Carraher,

Schliemann, Brizuela, & Earnest, 2006), rompiendo con la consideración de que el álgebra está fuera del alcance de las capacidades cognitivas de los alumnos jóvenes (Molina, 2009). La legislación educativa española reclama explícitamente la necesidad de que el alumno, al acabar la Educación Primaria, sea capaz de describir y analizar situaciones de cambio, encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas en contextos numéricos, geométricos y funcionales, valorando su utilidad para hacer predicciones (Boletín Oficial del Estado, 2014).

La experiencia educativa que presentamos (Emhamed, 2016) ha estado guiada por la posibilidad de profundizar en el álgebra temprano, así como explorar de una manera amplia sus implicaciones educativas, dificultades, posibles modos de actuación y, como fin último, aportar un punto de vista adicional dentro de las grandes voces que sitúan este modo de entender el desarrollo matemático de la persona como prioritario a la hora promover incluso un cambio en nuestro actual currículo educativo. Se ha puesto el centro de atención en los niveles más elementales de la educación primaria, como búsqueda de un punto de partida apropiado para el comienzo del desarrollo del pensamiento algebraico.

Nuestra aportación ha perseguido un doble objetivo: por una parte, diseñar y verificar un experimento en el aula basado en el álgebra temprano, y por otra, poner a disposición de los educadores materiales previamente contrastados en el aula. A continuación, presentamos la metodología seguida y los objetivos, la descripción de las actividades junto con resultados a destacar y, finalmente, incluimos algunas conclusiones.

Metodología

El punto de partida del experimento que presentamos es el diseño de un conjunto de actividades para el desarrollo del pensamiento pre-algebraico, que pueden ser incorporadas a las aulas de 2º de primaria enriqueciendo el actual currículo. Así mismo se ha provisto cada actividad de instrumentos de medición de los logros alcanzados por los alumnos. Las actividades diseñadas se basan en el descubrimiento como factor motivador y se sirven de objetos manipulables y del juego.

El experimento se ha realizado en dos centros diferentes, con 82 alumnos de 2º curso de Educación Primaria de capacidades variadas, no creando ningún sesgo particular para el estudio. Los alumnos pertenecen a un nivel socio económico medio y la metodología habitual dentro del aula es la tradicional. Las pruebas se han llevado a cabo en grupos reducidos con un máximo de 10 alumnos de tal forma que se pudo realizar una mejor observación y recogida de datos. Dichas pruebas se han realizado durante el horario escolar y dentro del centro escolar, siempre con autorización de la dirección de centro y bajo supervisión de sus respectivos tutores.

La herramienta fundamental donde se plasman los resultados de cada actividad es una encuesta creada ad hoc, de relleno fácil y donde se recogen los principales puntos a analizar en cada actividad.

Los objetivos generales de la investigación son:

- 1) Definir las estrategias utilizadas por los alumnos y sobre todo si estas pueden ser enseñadas y de qué manera.
- 2) Prestar atención al modo en el que usan dichas estrategias (su representación) pues puede ser indicativo de un lenguaje por el que podemos llegar a ellos de una forma más adecuada y mostrar un pensamiento lógico a través de este.
- 3) Hacer hincapié en la capacidad para entender un enunciado dado.

- 4) Observar resultados posteriores si se repiten las pruebas, sobre todo tras haberles mostrado cómo encontrar patrones.
- 5) Analizar cómo influye la colaboración entre compañeros.
- 6) Constatar, en los casos oportunos, la comprensión del signo igual.
- 7) Analizar las dificultades encontradas en la forma de enseñanza utilizada en estas pruebas.

Adicionalmente cada actividad cuenta con una serie de objetivos específicos propios. Todos ellos responden a la importancia que este estudio otorga al tema analizado, pues intentan poner en relieve el valor del álgebra temprano en la personalidad del alumnado y su desarrollo lógico matemático posterior.

La hipótesis de partida es que los alumnos en las primeras etapas de la Educación Primaria son capaces de poder desarrollar métodos y pensamiento considerados pre-algebraico más allá de los meramente aritméticos y basados en la rutina. Entre ellos se quiere constatar el reconocimiento de patrones y la generalización, y en algunos casos llegando incluso a la resolución de ecuaciones de primer grado en cursos de 2º de Primaria.

Así, evidenciamos el hecho de que los alumnos tienen herramientas suficientes para comenzar a trabajar el pre-álgebra a tales edades y que este trabajo no sustituye, sino que enriquece el que actualmente se está llevando a cabo en las aulas.

Actividades propuestas y resultados.

Presentamos aquí las 4 actividades llevadas a cabo en este estudio, así como los resultados más relevantes obtenidos. Dichos resultados han sido sometidos al factor estadístico Alpha de Cronbach a fin de comprobar la consistencia interna de los datos tomados. Las actividades se presentan en el orden en el que han sido realizadas. Cabe destacar que las actividades están a la vez formadas por tareas que van conduciendo al objetivo final.

ACTIVIDAD 1: “Cantidades ocultas”

Esta es la actividad principal del estudio y por ello la incluimos en primer lugar. La actividad se centra en despertar en el alumno la capacidad para averiguar cantidades desconocidas ocultas tras un elemento físico, el “plato ocultador”. A lo largo de las tareas se pasa de un problema manipulable en forma de juego a un problema de carácter pre-algebraico, es decir, mediante el uso de lenguaje matemático y la búsqueda de la incógnita asociada con lo desconocido en el juego previo del “plato ocultador”.

Resultados:

El número de muestras, es decir, de grupos heterogéneos en los que se dividió el total de alumnos, fue de 13. El resultado de la última tarea, “Resolución algebraica”, cuenta con un valor medio favorable de 90,2% de los alumnos. En ese apartado observamos el valor medio, pero éste pasa de tener en primera instancia una efectividad del 82,9% a tener más de un 97,6% en el último testeo. Reflejando dentro de este apartado un aumento palpable. Analizando el transcurso de la actividad completa podemos observar un descenso en el nivel de efectividad a lo largo de las tareas. Aunque cabe añadir que el nivel de dificultad de la actividad va en aumento progresivo.

Si establecemos un análisis más detallado observamos que una vez propuesto un método de resolución (penúltima tarea de la actividad), la efectividad a la hora de resolver adecuadamente los problemas supera en casi un 5% a la ejecución de los mismos de forma innata (es decir, sin dar pautas o métodos de resolución) y que, además, este valor prácticamente se mantiene en la última tarea.

ACTIVIDAD 2: “Pasos dentro de un pentágono.”

La idea de esta actividad es intentar que los niños reconozcan un patrón de número de vueltas y pasos alrededor de un pentágono con dos pasos en cada lado. Una vuelta equivale a diez pasos. Así, se proponen una serie de tareas cuyo fin último es, dado un número de pasos, identificar en qué lado del pentágono se encuentran y cuántas vueltas han dado.

Resultados:

El resultado de la última tarea de la actividad, “Reconocimiento de patrón”, cuenta con un valor favorable de 92,6% de los alumnos.

En cuanto a la efectividad de esta prueba podemos observar un descenso desde que se evalúa la comprensión del enunciado hasta que la última fase de control de comprensión y detección de reconocimiento de patrón implícito de la actividad. Los niños que entendieron a la primera el ejercicio y lo llevaron a buen término, prácticamente fueron los mismos que ejecutaron la actividad bien durante el resto de las pruebas.

Bien es cierto que se observa una disminución del 2,6%, entre los resultados de la tarea nº3 (penúltima tarea dentro de la actividad), con un valor del 95,1%, y el resultado de la última tarea “Reconocimiento del patrón”. Lo que nos lleva a pensar que el 97,4% de los alumnos encontraron un patrón para resolver el ejercicio y además fueron capaces de expresarlo de forma oral.

ACTIVIDAD 3: “Reparto Justo”

La idea de esta actividad es la de conseguir como fin último que los niños reconozcan un valor desconocido en una igualdad o desigualdad con sumas y restas de números naturales a ambos lados. El valor desconocido se representa una vez más con el “plato ocultador”.

Resultados:

El resultado de la tarea de “Comparación de cantidades con incógnitas” (último paso dentro de la actividad) cuenta con un valor favorable de 94,1% de los alumnos.

Como los datos revelan, existe un número de alumnos que no comprenden la introducción de una incógnita dentro de la comparación de cantidades, pero nos sorprende que este hecho no haya creado un bajón más pronunciado en los resultados.

ACTIVIDAD 4: “Creando sumas”

Haciendo uso de la nomenclatura, estructura y simbología de que disponen, se pretende hacerles partícipes de la creación de operaciones diferentes que representen el mismo valor, así como de despertar el pensamiento de carácter pre-algebraico.

Resultados:

El resultado de la tarea de “Validación grupal” (último paso dentro de la actividad) cuenta con un valor favorable de 93,1% de los alumnos.

Sin embargo, destacamos un descenso tanto en la creación y resolución de ejercicios (incluimos la validación grupal). Resaltamos que este hecho no se debe a la falta de comprensión o al grado de dificultad del mismo sino a una mala praxis de la aritmética. En cuanto a la comprensión destacar que no se detectaron dificultades por parte de los alumnos a la hora de crear sumas con el mismo resultado. Precisamente destacamos su participación e inmediata aportación para generar nuevas sumas con igual resultado.

Conclusiones.

A raíz de las experiencias vividas, parece más plausible la posibilidad de trabajar modos de pensar acorde a razonamientos y procedimientos de carácter pre-algebraico desde edades muy tempranas. Hemos presentado una experiencia en 2º curso de Educación Primaria,

pero se entrevé que puede plantearse en cursos anteriores si se planifican y desarrollan las estrategias adecuadas.

Los resultados cualitativos han estado por encima de lo esperado, estableciéndose estos normalmente por encima del 90% de sujetos con una presencia satisfactoria al final de cada prueba.

Ninguna de las actividades desarrolladas ha seguido un camino desacompasado con los conocimientos, capacidades y competencias alcanzadas hasta ese momento. Al revés, dichas actividades han buscado fomentar y explorar las capacidades del alumno en entornos relacionados con la simbología como sustitución de la realidad y la búsqueda de relaciones y patrones.

Incluimos a continuación algunas conclusiones desde diferentes perspectivas:

- *Semiótica*: el uso de símbolos para asociar cantidades ocultas ha sido asumido con naturalidad por los sujetos sometidos a estudio, pero no solo eso, sino que en actividades posteriores han continuado entendiendo la función que ha desempeñado dicha simbología y han mostrado capacidad para aplicarlo a contextos de trabajo diferentes. Además, se ha constatado que esta simbología ha quedado muy alejada de la problemática que supone asociar lo oculto con una letra al mostrarla como transición desde un elemento físico.

- *Generalización*: hemos podido además trabajar formas de generalización que no han requerido en ningún momento de una notación formal para poder trabajar aspectos algebraicos. Luego podemos trabajar de una forma informal con niños a estas edades y a la vez ir asentando modos de pensamiento pre-algebraico.

- *Operadores*: estas actividades permiten integrar y resolver problemas de operaciones que ya se suponen conocidas a estas edades, como son la suma o la resta, así como las relaciones fundamentales entre ellas. A pesar de que no se buscaba la implicación de otros operadores como la multiplicación o la división, vemos que se puede generar un buen preámbulo para ellas.

- *Nivel de algebrización*: podríamos decir que se ha alcanzado en algún momento un grado de algebrización 2 según la escala propuesta por Aké, Godino, & Gonzato (2013). Aunque bien es cierto que es muy complicado establecer unos límites claros entre ellos y requeriría de más trabajo con estos alumnos para que la afirmación tuviese un peso relevante más allá de este documento y esta experiencia.

- *Aritmética-Álgebra*: se entiende esta dualidad de álgebra y aritmética como indisoluble, inherente a la necesidad de contar y generalizar como medio para medir, estimar y resolver. Así se ha constatado el papel de ambos en estas pruebas, pudiéndose trabajar en ambas “direcciones” sin que se experimente ningún tipo de obstáculo o disminución en las competencias o capacidades.

- *Maestro*: es la figura clave y por tanto se hace necesaria una buena formación y preparación de los profesionales de la educación. Esta visión no pretende que sea algo estanco, pero si ofrecer la oportunidad para la reflexión por parte de los docentes sobre una forma de trabajar enfocando las matemáticas de un modo diferente.

- *Tener un fin*: la estructura de las actividades en tareas revela la comodidad de trabajar con los alumnos cuando se tiene un fin para lo que se está haciendo. Y este fin no es solo encontrar un resultado, es crear, es participar del contenido, es aprender colaborativamente y es descubrir cómo piensan los otros.

- *Pensamiento pre-algebraico*: asumir plenamente la capacidad de abstracción de los niños en estas edades sería algo osado e iría en contra de lo que muchos autores han afirmado

científicamente al respecto, por otro lado, no es el foco de este trabajo. Hemos partido de algo que sabemos que el niño domina y lo hemos usado a nuestro favor, hemos modelizado o generalizado desde lo que el niño comprende. Crear escenarios del dominio intelectual de los alumnos, se puede y se debe hacer.

-*Recursos*: destacamos que no hay mejor escenario para empezar que nuestra propia realidad que nuestro propio entorno. El uso de materiales bien planificados ha de ser prioritario.

En definitiva, quedan muchos frentes abiertos y aspectos por tratar, pero que mayor reto que poder emprender una empresa encaminada a arrojar luz sobre el Álgebra Temprano, sobre la posibilidad de dotar a los alumnos con las herramientas adecuadas para afrontar los retos de un futuro que cambia a gran velocidad, los retos de avanzar en la construcción de un mundo mejor.

Referencias

- Blanton, M. L., & Kaput., J. J. (2005). Characterizing a Classroom Practice That Promotes Algebraic Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 412-446.
- Boletín Oficial del Estado. (1 de Marzo de 1 de Marzo de 2014). Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. 52, 19387.
- Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M., & Ernest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*(37 (2)), 130-140.
- Emhamed, I. (2016). *Introducción temprana del pensamiento algebraico*. Trabajo fin de master. Universidad Antonio de Nebrija.
- Hodgen, J., Oldenburg, R., & Stromskag, H. (2017). *Algebraic thinking*. Dublin: CERME 10. Obtenido de http://cerme10.org/wp-content/uploads/2017/01/TWG3_ERME_Book_Ch03_AlThink_Draft.pdf
- Kaput, J. (2000). *Transforming Algebra from an Engine of Inequity to an Engine of Mathematical Power by "Algebrafying" the K-12 Curriculum*. Darmouth: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.
- Molina, M. (2009). *Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria*. Granada: Universidad de Granada.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números*, 77, 5-34.

ANEXOS

Descripción Actividad 1: “Cantidades ocultas”

Al ser la actividad principal del estudio se ha considerado pertinente una explicación más detallada de la misma para la entrega de este documento en extenso. Así ofrecemos una visión sobre los materiales, objetivos, mecánica e instrumentos para la recogida de datos.

Materiales necesarios

- Mesas
- Signo “=” (se proporciona)
- Pizarra individual, folios en blanco o pantalla digital tipo Tablet donde poder escribir.
- Elementos para realizar cuentas físicas (estilo regletas de Cuisenaire tamaño 1 unidad o placas multibase).
- Plato ocultador (se proporciona)

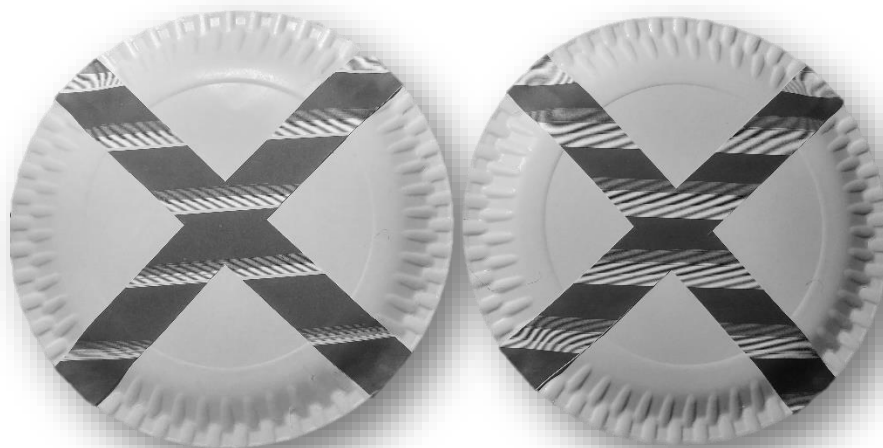


Ilustración 1 Platos Ocultadores

Objetivo

La actividad se centra en despertar en el alumno la capacidad para averiguar cantidades desconocidas ocultas tras un elemento físico. Su fin último es pasar de un problema manipulable a un problema de carácter algebraico, es decir, mediante el uso de un lenguaje abstracto pero que va a ser asociado con el juego previamente manipulable.

De esta forma se busca:

- Asumir un nuevo significado del signo “=”, distinto al que ahora tienen, es decir, como propuesta de actividad de cálculo y como operador.
- Expresar una cantidad de distintas formas.
- Establecer una simbología algebraica como objeto manipulable, es decir, que la incógnita no se vea como una letra sino como un objeto palpable.
- Comprobar si existe cierta capacidad innata para la resolución de planteamientos algebraicos.

- Comprobar que son capaces de asumir nuevos roles de cálculo o estrategias lógicas para la resolución de problemas algebraicos.
- Comprobar que son capaces de trabajar de forma abstracta sobre pizarra con un grado de comprensión alto en lo que hacen y por qué lo hacen.
- Analizar el uso de símbolos adecuados que utilizan para ello.
- Comprobar que pueden ir más allá de lo que se esperaba con esta actividad.

Mecánica

En primer lugar, destacamos que el juego va a estar siempre condicionado al signo igual. Así, bajo ningún concepto se va a jugar fuera de esta premisa y esta es la razón de usar el signo “=”.

Tras esto, pasamos a comparar las cantidades que tenemos en ambas mesas, comprobando que efectivamente tenemos la misma cantidad. Y la escribiremos.

Además, les hemos de hacer notar que podemos formar grupos de elementos que sigan manteniendo dicha igualdad. Lo escribimos como igualdad de sumas. Veamos un ejemplo.

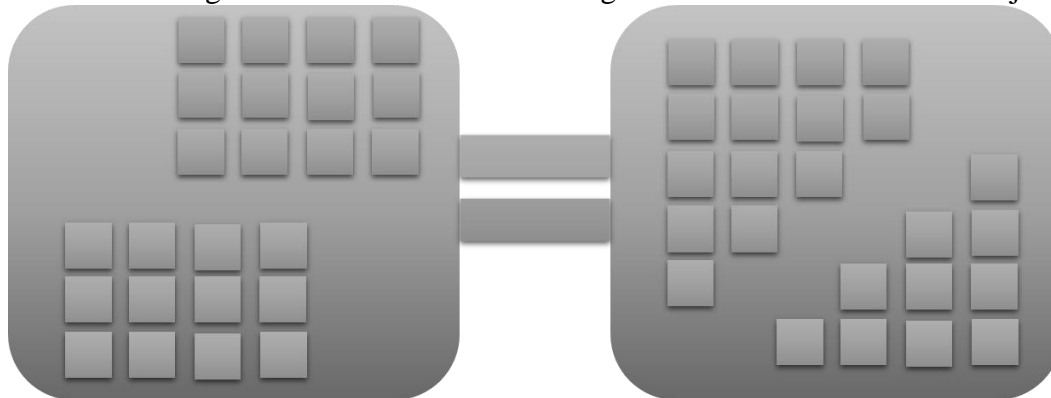


Ilustración 2 Formación de grupos menores que mantienen una igualdad

Antes de continuar, se ruega mostrar dos ejemplos más siguiendo las mismas pautas. Ahora llega el núcleo de la actividad, les mostramos una cantidad determinada que vamos a ocultar bajo un “plato”. En este caso 9. Y razonamos a partir de aquí. Les decimos que vamos a hacer como antes, que vamos a repartir en un grupo de 15 y otro de 9, pero que una de las cantidades la vamos a ocultar y que es precisamente esto lo que les vamos a pedir: una cantidad oculta.

MOSTRAR+OCULTAR+PENSAR

Ilustración 3 Pautas recomendadas para actividad 1

Una vez hechos los ejemplos significativos en los que ellos han tenido que adivinar el valor bajo el plato ocultador (3 en total) vamos a revelarles un “secreto”. Nuestro camino rápido a la solución: quitar las piezas que están fuera del plato en ambas mesas.

Ahora han de ser ellos los que con el truco descubran la cantidad que se halla oculta tras el plato.

Se ruega hacer 3 ejercicios.

El fin último es que intenten realizar mediante la pizarra el problema que hemos estado manipulando. Así, les convencemos de que es muy aburrido estar manejando piezas “para arriba y para abajo”, que es mejor jugar directamente en la pizarra. Pondremos, al menos, tres ejercicios para que los intenten resolver gracias al “secreto” que les hemos contado.

The illustration shows two individual blackboards. The top blackboard has the equation $13 + \text{X} = 24$ and $\text{X} = 11$. A grey box next to it says: "A donde tienen que llegar: 'a 24 le tengo que restar 13'". The bottom blackboard has the equation $8 + \text{X} = 24$ and $\text{X} = 16$. A grey box next to it says: "A donde tienen que llegar: 'a 24 le tengo que restar 8'". To the right of the blackboards is a dark grey box with the text "¡ÁLGEBRA!".

Ilustración 4 Ejemplos de uso de pizarra individual como paso del juego manipulable al simbolismo

Toma de datos

Finalmente, para la toma de datos se utiliza una tabla siguiendo el siguiente esquema.

Tabla 1 Toma de datos para Actividad 1

Alumno	IGUALDAD DE CANTIDADES ¿Comprende la igualdad de cantidades en ambas mesas?	DIVISIÓN GRUPOS MENORES ¿Comprende la igualdad de haber separado en dos cantidades	RESOLUCIÓN ¿Resuelve de forma innata las cantidades ocultas?	RESOLUCIÓN (mediante algoritmo mostrado, "secreto")			RESOLUCIÓN (ALGEBRA)					
				EJ.1	EJ. 2	EJ. 3	EJ.1	EJ. 2	EJ. 3			
1												
2												
3												
4												
5												
6												