CONHECIMENTOS DE ALUNOS BRASILEIROS E FRANCESES RELACIONADOS AO CAMPO CONCEITUAL DOS NÚMEROS IRRACIONAIS

Veridiana Rezende[1] – Clélia Maria Ignatius Nogueira
rezendeveridiana@gmail.com – voclelia@gmail.com
Universidade Estadual do Paraná – Campo Mourão – Brasil
Centro de Estudos Superiores de Maringá – CESUMAR - Brasil

Tema: Pensamento numérico
Modalidad: CB
Nivel educativo: Não específico
Palabras clave: Educação Matemática. Números irracionais. Teoria dos Campos Conceituais.

Resumo

Esta pesquisa foi desenvolvida com vistas a analisar conhecimentos relacionados aos números irracionais mobilizados por alunos brasileiros, concluintes do Ensino Fundamental, Médio e Licenciatura em Matemática, e alunos franceses, concluintes de níveis correspondentes. Como procedimentos metodológicos, realizaram-se entrevistas individuais com resolução de atividades matemáticas. Os resultados apontam que o fato de os números irracionais estarem explícitos ou não nos currículos e livros didáticos não interfere no desempenho dos alunos em relação a esse conceito. Ao contrário, é a experiência escolar e a diversidade de situações matemáticas que eles vivenciam que vai influenciar e favorecer a aprendizagem dos números irracionais.

Introdução

Apresentamos neste trabalho um estudo relacionado ao Campo Conceitual dos números irracionais no processo de escolarização, considerando Campo Conceitual no sentido de Vergnaud (1990), como um conjunto de situações, conceitos, representações simbólicas e teoremas que permitem analisar essas situações como tarefas matemáticas.

A pesquisa foi realizada com 42 alunos, sendo 21 alunos brasileiros finalistas do Ensino Fundamental, Médio e Curso de Licenciatura em Matemática, e 21 alunos franceses finalistas de níveis correspondentes do sistema de ensino francês.

A finalidade de investigar alunos brasileiros e franceses decorre do fato de serem sujeitos de países com culturas e sistemas de ensino distintos, especialmente em relação ao ensino dos números irracionais. No sistema de ensino brasileiro, o estudo dos números irracionais é oficialmente explicitado nos Parâmetros Curriculares Nacionais para alunos de 8º e 9º anos do Ensino Fundamental e 1º ano do Ensino Médio (Brasil, 1998; Brasil, 1999). Já no sistema de ensino francês (France, 2009; France, 2008), o conceito número

[1] Líder do Grupo de Pesquisa em Educação Matemática de Campo Mourão – GPEMCAM.

irracional não é explicitado nos documentos curriculares oficiais (*Programmes*) da Educação Básica (*Collège* e *Lycée*), ficando a cargo do professor de Matemática e de autores de livros didáticos explicitarem ou não esse conteúdo.

No entanto, nota-se que embora não sejam explicitados, os números irracionais fazem parte da trajetória escolar dos alunos franceses desde a *Quatrièmme* – nível correspondente ao 8º ano brasileiro, durante o estudo de diversos conceitos matemáticos, como teorema de Pitágoras, raiz quadrada, figuras geométricas planas, sólidos geométricos, trigonometria, funções, entre outros.

Desse modo, diante de sistemas de ensino distintos, nossa pesquisa teve como objetivo geral analisar os conhecimentos relacionados aos números irracionais, mobilizados por alunos brasileiros e franceses, finalistas de cada nível de ensino investigado.

Como metodologia de pesquisa, foram realizadas entrevistas individuais semiestruturadas, sustentadas na resolução de atividades previamente elaboradas. As atividades que contemplaram o instrumento de investigação foram elaboradas considerando a diversidade de situações relacionadas ao Campo Conceitual dos números irracionais, as ideias base de números irracionais especificadas no quadro 1 a seguir, os diferentes significantes empregados e os possíveis teoremas em ação que poderiam emergir nas respostas dos alunos.

Para as análises, buscou-se identificar e comparar os conhecimentos mobilizados pelos alunos que finalizavam cada nível de ensino, com atenção especial aos teoremas em ação, – termo designado por Vergnaud (1990) para representar categorias de conhecimentos implícitos nas respostas dos sujeitos.

A Teoria dos Campos Conceituais e suas contribuições para a presente pesquisa

A Teoria dos Campos Conceituais é uma teoria cognitivista com vistas a compreender os processos cognitivos no decorrer do desenvolvimento de um sujeito. Para Vergnaud (1990), um sujeito aprende e se desenvolve em função das situações enfrentadas no decorrer do processo escolar.

Vergnaud (1990) defende que para o estudo de um conceito são necessários diversos outros conceitos, situações, símbolos, representações, propriedades e teoremas interligados, formando o que o pesquisador denomina por Campo Conceitual. Nessa perspectiva, e de acordo com nosso estudo, constatamos que a compreensão do conceito de números irracionais está relacionada ao conjunto das situações que envolvem equações algébricas de grau maior ou igual a 2, calculadora e a decimalização dos números, números racionais, conceitos de infinito, potências, raízes (quadradas, cúbicas, etc.), teorema de Pitágoras, medidas de segmentos, figuras geométricas (quadrado, círculo, etc.), entre outras.

Assim, levando em conta à complexidade do Campo Conceitual dos números irracionais, estruturamos as atividades do instrumento de pesquisa considerando algumas das situações acima mencionadas, juntamente com a diversidade de representações simbólicas, relacionadas a esse Campo Conceitual.

De acordo com Vergnaud (1990), dificilmente os sujeitos explicitam com palavras todos os seus conhecimentos, muitos deles permanecem implícitos. A estes conhecimentos implícitos Vergnaud (1990) os denomina de teoremas em ação. Na maioria das vezes, estes conhecimentos não são reconhecidos cientificamente, podendo ser conhecimentos falsos, os quais o pesquisador denomina de *teoremas em ação falsos*.

O conceito de teorema em ação foi essencial para as análises de nossa pesquisa, pois no decorrer das entrevistas, buscou-se perceber e modelar os conhecimentos dos sujeitos de diferentes níveis de ensino em forma de teoremas em ação.

Desse modo, a Teoria dos Campos Conceituais subsidiou tanto a elaboração das atividades do instrumento de pesquisa, ao indicar que para a compreensão de um conceito são necessárias diversas situações, símbolos e outros conceitos, quanto às análises das respostas dos sujeitos, favorecendo compreender o desempenho e os conhecimentos mobilizados pelos alunos de diferentes níveis de escolarização, com atenção especial aos conhecimentos implícitos, na forma de teoremas em ação.

Descrição das atividades e análises das respostas dos alunos

O instrumento de pesquisa consistiu de 9 atividades elaboradas com nível de dificuldade relativo ao 9º ano do Ensino Fundamental, que foram aplicadas a todos os sujeitos da pesquisa. Foi acrescentada uma questão sobre a demonstração da não racionalidade de $\sqrt{2}$ aos alunos brasileiros do Ensino Médio e Superior de Matemática, e aos alunos franceses de níveis correspondentes. Questões sobre as teorias que sustentam a construção dos números irracionais e reais também foram acrescentadas aos alunos do

Ensino Superior. Ademais, as atividades foram elaboradas buscando contemplar ideias base de números irracionais:

I.	Compreender sobre as infinitas casas decimais de um número.
II.	Compreender que alguns números podem ser representados como a razão entre dois números inteiros e outros números não podem.
III.	Diferenciar um número irracional de um número racional: saber que um número irracional não pode ser escrito como a razão entre dois números inteiros, e que um número irracional possui infinitas casas decimais não periódicas. Diferenciar um número irracional de um número racional: saber que um número irracional não pode ser escrito como a razão entre dois números inteiros, e que um número irracional possui infinitas casas decimais não periódicas.
IV.	Considerar a existência de números irracionais e perceber pra quê esses números servem.
V.	Saber aplicar o teorema de Pitágoras.
VI.	Aceitar a existência de segmentos de medidas $\sqrt{n}, \forall n \in N$.
VII.	Aceitar que a equação $x^2 = p$ tem solução real, para todo $p \in R_+$.
	Para alunos do ensino superior:
VIII.	Saber demonstrar que os números algébricos da forma $\sqrt{n}$, com *n* não quadrado perfeito, não são racionais.
IX.	Conhecer definições, propriedades e exemplos de conjuntos enumeráveis e não enumeráveis.
X.	Conhecer as teorias de Eudoxo, Dedekind e Cantor para a construção dos números reais.

Quadro 1: Ideias base de números irracionais
Fonte: Rezende (2013, p. 98)

Sendo assim, a atividade 1 teve como objetivo conhecer as percepções dos alunos sobre números irracionais. Para isto, foram escolhidos dez entre números decimais, racionais, irracionais e complexos: $\sqrt{3}$, $\sqrt{9}$, π, $3{,}14$, $0{,}333\ldots$, $0{,}101001000\ldots$, $\frac{2}{3}$, -4, $\sqrt{-4}$, 0, que foram representados em cartões e exibidos aos alunos. Com os cartões em mãos, os alunos eram questionados sobre a existência ou não dos números representados, qual sua utilidade, e quais dentre estes os alunos classificariam como racional, irracional ou nem racional e nem irracional. A análise desta atividade, juntamente com os resultados de pesquisas (Soares *et al* (1999); Fichbein *et al* (1995)), nos permitiu modelar alguns teoremas em ação relacionados aos números irracionais que podem estar implícitos nas respostas dos alunos.

A partir da atividade 2, seguindo um padrão diferente da primeira, foram apresentadas aos alunos atividades individuais em fichas - folhas sulfite, as quais eles ficavam livres para desenvolvê-las nas fichas ou apenas explicitar a resposta oralmente.

Na atividade 2, tivemos como objetivo investigar se os alunos mobilizam com consciência o fato de que os números disponíveis no visor da calculadora são números decimais. Foi solicitado aos alunos teclarem $\sqrt{2}$ na calculadora, em seguida eles eram questionados se é possível afirmar que o número que aparece no visor da calculadora $1{,}414213562$ é igual ao número $\sqrt{2}$. Se os alunos afirmassem que a igualdade

$\sqrt{2} = 1{,}414213562$ era verdadeira, a pesquisadora pedia que eles calculassem os valores de ambos os membros da referida igualdade ao quadrado, e justificassem o resultado obtido (o resultado obtido com os cálculos é $2 = 1{,}999999999$). Para aqueles alunos que respondiam imediatamente que a igualdade $\sqrt{2} = 1{,}414213562$ não é verdadeira, a pesquisadora solicitava justificativa e lançava questões relacionadas à irracionalidade do número $\sqrt{2}$.

A atividade 3 teve como objetivo favorecer aos alunos mobilizarem conhecimentos relacionados ao fato que: *um número irracional não pode ser escrito como a razão entre dois números inteiros*. Para isto, considerando o número irracional $\sqrt{2}$, os alunos eram questionados sobre a possibilidade ou não de escrever este número como a razão entre dois números inteiros.

Elaboramos a atividade 4 com a intenção de investigar se os alunos consideram, ou não, a existência de solução para as equações da forma $x^2 = \mathrm{a}$, com $a \in R$, sobretudo quando *a* não é um número quadrado perfeito, isto é, quando a solução da referida equação trata-se de um número irracional algébrico.

As atividades 5(a), 5(b), 6, 7 e 8 dizem respeito à ideia base VI[2]. No entanto, particularmente, as atividades 5(a), 5(b) e 6 foram elaboradas com vistas a perceber se os alunos concebem a existência de um quadrado, cuja medida de lado é um número irracional algébrico.

Ao inserir a atividade 5(a) no instrumento de pesquisa, teve-se como hipótese, confirmada com as análises das respostas dos alunos, que eles poderiam apresentar indicativos de conhecimentos falsos, dizendo que não existe ou que existe um quadrado de medida de área aproximadamente igual a 13 cm^2. Apenas para esses alunos foi proposta a atividade 5(b), com a intenção de desestabilizar tais conhecimentos errôneos.

A atividade 7 foi inserida no instrumento de pesquisa, com o objetivo de perceber se os alunos reconhecem a possibilidade de se representar um número irracional algébrico, tais como $\sqrt{2}$ ou $\sqrt{5}$, na reta numérica.

Ao elaborar a atividade 7, teve - se como hipótese, confirmada com respectivas análises, que alguns alunos poderiam alegar de modo incorreto que não seria possível representar

[2] Ideia base VI: aceitar a existência de segmentos de medidas $\sqrt{n}, \forall n \in N$.

o número $\sqrt{2}$ (ou $\sqrt{5}$) na reta numérica, ou, ainda, que eles poderiam representar uma aproximação do número $\sqrt{2}$, por meio de um número decimal. Por isso, elaboramos a atividade 8 destinada a estes alunos, visando à possível desestabilização, ou pelo menos perturbação local, desses conhecimentos falsos.

A atividade 8 apresentava aos alunos à construção do caracol pitagórico, mostrando uma possibilidade de se construir segmentos de medidas irracionais da forma $\sqrt{n}, n \in Z_+^*$, quando *n* não se trata de um número quadrado perfeito. Após apresentar aos alunos esse método de construção de segmentos, a pesquisadora os questionava se, diante do referido método, eles representariam o número $\sqrt{2}$ (ou $\sqrt{5}$) de um modo diferente do que eles haviam representado na atividade 7.

As análises das entrevistas permitiram identificar onze teoremas em ação falsos possíveis de serem mobilizados nas falas dos alunos, e oito teoremas em ação verdadeiros. Na atividade 5(a), por exemplo, dentre os 14 alunos do Ensino Fundamental e *Collège* entrevistados, 11 alunos alegaram que não existe o quadrado de medida de área 13 cm^2 porque não existe um número cujo quadrado resulta em 13, conforme ilustra a fala do aluno francês C4: *Não... porque não existe 13 na tábua de multiplicação... nós não podemos encontrar um número que vezes ele mesmo resulte em 13.* Assim, para falas como esta, juntamente com as análises das demais atividades, pode-se indicar a mobilização de dois teoremas em ação falsos, TAF1*: Seja* $a \in R_+$, $\sqrt{a}$ *existe se e somente se* a *é quadrado perfeito*, e TAF2: *Se* $p \in R_+$ *não é quadrado perfeito então não existe* $x \in R$ *tal que* $x^2 = p$.

Nessa mesma atividade, dentre os 16 alunos do Ensino Médio e *Lycée* entrevistados, apenas 2 alunos de TS responderam corretamente dizendo que o quadrado de medida de área igual a 13 cm^2 existe, cuja medida de seu lado é $\sqrt{13}\ cm$. Entretanto, embora tenham respondido corretamente a esta atividade, as análises das atividades 6 e 7 mostram que esses alunos não apresentavam conhecimentos estabilizados em relação à existência de segmentos de medidas irracionais. Pois, na atividade 6 o aluno S3 argumentou sobre a existência de um quadrado de medida de área aproximadamente igual a 24 cm^2: *É preciso representar... nós podemos aproximar...* $\sqrt{24}$, *que é* $2\sqrt{6}$ *... nós podemos representar aproximadamente*. E na atividade 7 o aluno S2 representa um valor aproximado de $\sqrt{2}$ na reta, segundo ilustra sua fala: *Não, é possível representar apenas um valor aproximado 1,4.*

Quanto às respostas dos alunos brasileiros do Ensino Superior, foram indicadas respostas relacionadas aos teoremas em ação falsos TAF1 e TAF2 (1 aluno), dois alunos disseram que existe um quadrado de medida de área aproximadamente igual a 13 cm^2 e quatro alunos responderam corretamente indicando mobilizar os teoremas em ação verdadeiros TAV1: Seja $b \in R_+$ então existe um quadrado de área $A = b\ cm^2$, cuja medida dos lados é $\sqrt{b}\ cm$, e TAV2: Se $a \in R_+$, então existe $\sqrt{a}$.

No entanto, no decorrer das entrevistas dos alunos que mobilizaram conhecimentos em ação falsos, foi possível perceber em suas falas a desestabilização, ou pelo menos perturbação local de conhecimentos falsos, indicando, portanto, momentos de aprendizagens. Para exemplificar, citamos que nas atividades precedentes o aluno G2 havia mobilizado os teoremas em ação falsos TAF3: *Se* $n \in N$ *não é quadrado perfeito, então não é possível representar* $\sqrt{n}$ *na reta numérica*, e TAF3: *Se* $b \in R_+$ *não é quadrado perfeito, então não existe um quadrado de área* $A = b\ cm^2$. No entanto, nesta última atividade, após conhecer um método de construção de medidas irracionais, o aluno representou o segmento de medida $\sqrt{5}\ u.c$ na reta numérica e argumentou: *Então, a partir disto eu posso construir o quadrilátero com esta medida de lado?* Indicando, portanto, desestabilização dos conhecimentos falsos mobilizados nas atividades precedentes.

Conclusões

A presente pesquisa permite afirmar que os alunos do Ensino Fundamental e *Collège* mobilizam conhecimentos relacionados ao Campo Conceitual dos números irracionais de modo correspondente, não sendo possível apontar diferenças significativas entre suas respostas, mesmo em se tratando de sistemas de ensino distintos, e de os currículos explicitarem ou não estes números.

Em relação aos alunos do Ensino Médio e *Lycée* – TES - *Terminale Economique et Social* e TS - *Terminale Scientifique*, é possível afirmar que existe avanço no desempenho dos alunos de TS, diante de situações relacionadas aos números irracionais, no que diz respeito a respostas mais precisas, menor mobilização de teoremas em ação falsos e agilidade em desestabilizar tais conhecimentos. Este fato não nos surpreende, pois os alunos de TS são preparados para ingressar em cursos universitários de Ciências Exatas, recebendo maior ênfase nas disciplinas de Matemática, com carga horária mais ampla do que os alunos dos demais *Lycée* e Ensino Médio. Por consequência, os alunos franceses do Curso de Licenciatura em Matemática também apresentaram respostas mais precisas com menores indicativos de teoremas em ação falsos, sobretudo em relação às atividades 3, 4, 5, 6 e 7.

Entretanto, com relação às situações presentes no Campo Conceitual dos números irracionais, e considerando os sistemas de ensino brasileiro e francês, constatou-se que, independente do sistema de ensino em que os alunos estejam inseridos, seu desempenho avança conforme avança o nível de escolarização. Ademais, no estágio de desenvolvimento cognitivo em que os alunos se encontram ao finalizar o nível semelhante ao Ensino Fundamental, o desempenho e os conhecimentos mobilizados por esses alunos sobre os números irracionais são correspondentes. Este fato também foi observado no desempenho dos alunos d o Ensino Médio e TES, ou seja, apenas em um ensino com maior ênfase matemática, assim como TS, foi possível constatar avanço significativo em seus desempenhos em relação aos demais sujeitos de nível de ensino correspondente. Ou seja, a experiência escolar e a diversidade de situações que os alunos vivenciam no decorrer da escolarização que vai favorecer a apropriação do conceito de número irracional.

Referencias bibliográficas

Brasil (1999). Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio.* Brasília.

Brasil (1998). Ministério da Educação. Secretaria de Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.* Brasília.

Fischbein, E., Jehian, R. & Cohen, D. (1995). The concept of irrational number in High-School Students and Prospective Teachers. *Educational Studies in Mathematics.* pp. 29 – 44.

France (2009). Bulletin Officiel (B. O.) nº 30 du 23 du juillet 2009. *Programmes des Mathématiques. Classe de Seconde.*

France (2008). Bulletin Officiel spécial (B. O.) nº 6 du 28 du août 2008. Programmes du Collège. *Programmes de l'enseignement de Mathématiques.*

Rezende, V. (2013). *Conhecimentos sobre números irracionais mobilizados por alunos brasileiros e franceses: um estudo com alunos concluintes de três níveis de ensino.* (Tese de doutorado). Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2013.

Soares, E.; Ferreira, M. C. C. & Moreira, P. C. (1999). Números Reais: Concepções dos Licenciandos e Formação Matemática na Licenciatura. *Revista Zetetikè,* v. 7 (n. 12), pp. 95 – 117.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des Champs Conceituais. *Recherche en Didactique des Mathématiques* (vol. 10, n. 2.3, p. 133-170). Grenoble: La Pensée Sauvage.