CB-532

CONECTAR REPRESENTACIONES PARA ENSEÑAR A USAR EL LENGUAJE ALGEBRAICO EN UN AMBIENTE DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Abraham de la Fuente – Jordi Deulofeu
abrahamfp@gmail.com – jordi.deulofeu@uab.cat
Universitat Autònoma de Barcelona

Núcleo temático: Formación del profesorado de Matemáticas
Modalidad: CB
Nivel educativo: Medio o secundario
Palabras clave: álgebra, resolución de problemas, knowledge quartet, conexiones

Resumen

Realizar conexiones es una competencia importante para aprender matemáticas. Para que los alumnos tengan posibilidades de desarrollarla es preciso que los profesores hagan lo propio. En esta comunicación presentamos una secuencia de problemas que, con una gestión del aula adecuada, permite a los profesores promover la realización de conexiones entre procedimientos y representaciones que ayudan a los alumnos a construir las habilidades necesarias para usar de manera efectiva el álgebra para resolverlos. Las evidencias empíricas de la investigación, realizada con alumnos de secundaria (13 años), en la que se enmarca dicha comunicación, permiten concluir que la gran mayoría de los alumnos fueron capaces de resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas sin haber sido instruidos para ello, estableciendo conexiones con problemas previos similares, presentados y resueltos a través del uso de métodos prealgebraicos.

Introducción

Es muy importante que los profesores establezcan conexiones y que lo hagan correctamente, pero todavía es más importante que en sus implementaciones brinden a los alumnos oportunidades para conectar lo que están aprendiendo con lo que ya saben, de manera que se facilite el proceso de construcción y reconstrucción para que se pueda producir aprendizaje. Cuando el ambiente del aula es de resolución de problemas y centramos el protagonismo en los alumnos, la habilidad del profesor para conectar y hacer que los alumnos realicen

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

conexiones es primordial, si nuestro objetivo es que la resolución de problemas sirva para aprender a pensar matemáticamente y también para aprender conceptos y procedimientos matemáticos.

A continuación, presentaremos una secuencia de problemas fruto de una tesis doctoral que, con una gestión adecuada, permite a los profesores realizar conexiones entre procedimientos y representaciones que ayudan a los alumnos a construir las habilidades necesarias para usar el álgebra para resolver problemas. También mostraremos evidencias de cómo los alumnos son capaces de establecer estas conexiones y utilizarlas para resolver estos problemas.

Presentamos parte de una investigación realizada en el marco de una tesis doctoral llevada a cabo por el primero de los autores y tutorizada por el segundo. Hemos escogido para esta comunicación los datos obtenidos de las implementaciones de uno de los tres profesores analizados en la tesis y las producciones de su grupo-clase.

Diseño de una secuencia y descripción de las tareas

Presentaremos tres tareas de la secuencia. Las tres tienen por objetivo que los alumnos utilicen los métodos aritméticos que ya conocen para interpretar una condición dada y deducir nueva información a partir de esta con la intención de que acaben usando estos conocimientos previos para dotar de significado al lenguaje algebraico y para aprender métodos de resolución aritméticos que puedan transferirse a métodos de resolución algebraicos. De la primera de las tareas solo describiremos lo que hace el profesor, para poner en contexto al lector, mientras que de la segunda y tercera tarea analizaremos tanto las acciones del profesor como las producciones de algunos alumnos.

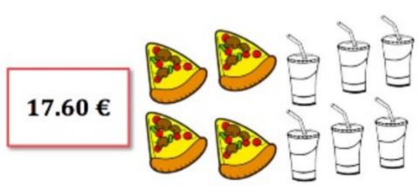


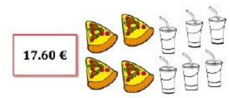
Ilustración 1: Tarea 1, ¿qué se puede decir del precio de una pizza y una bebida?

Durante la implementación de la primera tarea, el profesor presenta a los alumnos la información que se muestra en la ilustración 1. En esta tarea el profesor hace preguntas a los alumnos: ¿puedo saber el precio de uno de estos productos?, ¿de qué otras maneras podría representar la

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

información que tengo aquí escrita?, ¿podría hacerlo mediante un gráfico?, ¿podría calcular el precio de una bebida en función del precio de una pizza?

A través de estas preguntas el profesor consigue que los alumnos conecten diversas representaciones de la información (Ilustración 2): icónica, algebraica, tabla de valores y gráfica. Además, consigue que se planteen condiciones equivalentes a las proporcionadas icónicamente. Por ejemplo: 8 pizzas y 12 bebidas cuestan el 35.20€.



$$P_{drink} = \frac{17.6 - 4 \cdot P_{slice}}{6}$$

0,5	2,60
1	2,27
1,5	1,93
2	1,60
2,5	1,27
3	0,93
3,5	0,60
4	0,27

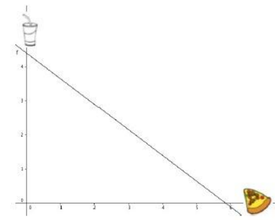


Ilustración 2: Algunas representaciones de la información en situaciones funcionales

La segunda tarea que el profesor decide implementar (Ilustración 3) consiste en presentar dos informaciones de forma icónica. En esta tarea el profesor pregunta si con la información proporcionada se podría calcular el precio de una pizza y el de una bebida. Este problema así planteado se podría resolver utilizando los clásicos métodos de resolución de sistemas de ecuaciones, pero hay que tener en cuenta que a los alumnos todavía no se les han enseñado formalmente. En cambio, los alumnos sí han trabajado anteriormente en el aula usando el lenguaje algebraico de otras maneras, por ejemplo para generalizar. Lo que pretende el profesor es que para resolver estos problemas los alumnos utilicen razonamientos aritméticos o propios del *Early Algebra* en el sentido de Kieran (2004) y Kaput (2008), apoyados en el lenguaje icónico con el que se muestran.

Ilustración 3: Tarea 2, ¿cuál es el precio de una pizza? ¿Y de una bebida?

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Después de proponer algunos problemas similares, siempre expresados en forma icónica, se pide a los alumnos que respondan una serie de preguntas de forma individual y por escrito. En esta tercera tarea (Ilustración 4), que consta de tres problemas, los alumnos se encuentran por primera vez con un sistema de ecuaciones planteado de forma algebraica. Consideramos que, dado que estos alumnos no han recibido enseñanza explícita en la resolución de sistemas de ecuaciones, para ellos estas tareas son auténticos problemas en el sentido de Schoenfeld (1985) y Vila (2004). El segundo problema es equivalente al primero y sólo difiere en su representación.

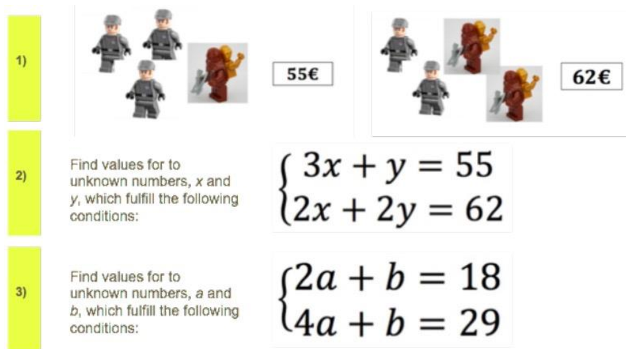


Ilustración 4: Tarea 3

A continuación, analizaremos las producciones de algunos alumnos cuando resuelven la segunda y la tercera tarea. Cabe fijarse no sólo en cómo los alumnos aprenden sino también en cómo las actuaciones del profesor y las preguntas que hemos explicado que realiza facilitan que estos establezcan las conexiones necesarias para solucionar los problemas.

Los alumnos resuelven problemas icónicos (tarea 2)

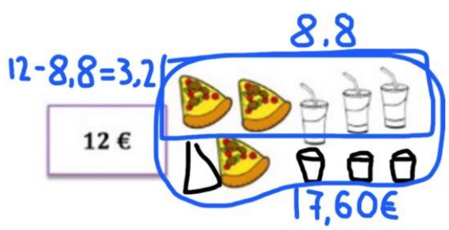


Ilustración 5: Producción de la alumna 1

Nos centraremos primero en tres producciones paradigmáticas de alumnos que resolvieron la segunda tarea. La primera alumna (Ilustración 5) empieza completando la representación icónica de una de las condiciones para convertirla en la otra condición, es decir, utiliza que sabe que cuatro pizzas y seis bebidas cuestan 17.6€. A continuación, utiliza lo que aprendió en la tarea 1: dividiendo entre dos las cantidades de pizzas y bebidas, deduce que dos pizzas y tres bebidas cuestan 8.8€. Como tres pizzas y tres bebidas cuestan 12€, restando deduce que una pizza cuesta 3.2€, de donde resulta fácil calcular el precio de una bebida.

ISBN 978-84-945722-3-4

El segundo alumno, en cambio, decide dividir entre tres la primera condición, de donde deduce que una bebida y una pizza cuestan 4€. Haciendo packs de bebida y pizza en la otra condición, llega a la conclusión de que dos bebidas cuestan 1.60€ y que por lo tanto una costará 0.8€. De nuevo de aquí resulta fácil obtener el precio de una porción de pizza.

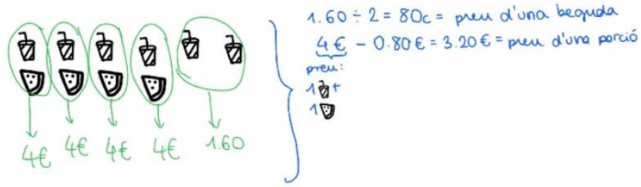


Ilustración 6: Producción del alumno 2

La tercera alumna hace unos cálculos muy parecidos al segundo, pero escribe sus razonamientos utilizando un lenguaje a medio camino entre el lenguaje algebraico y el lenguaje natural, que conocemos como álgebra sincopada.

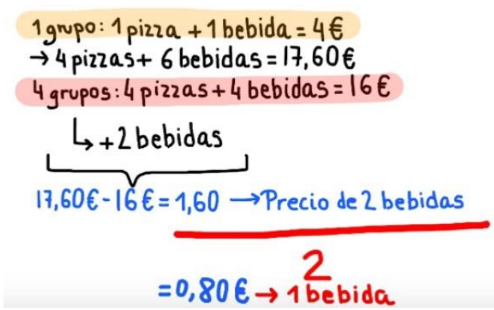


Ilustración 7: Producción de la alumna 3

Se puede ver como en todos los casos los alumnos están conectando esta tarea con la primera cuando buscan condiciones equivalentes para resolver el problema. Recordemos que después de esta tarea, el profesor propuso otros problemas similares, que forman parte de la secuencia y, al resolverlos, los alumnos siguieron utilizando estas estrategias. El profesor aprovechó las diferentes resoluciones para discutirlas con todo el grupo, permitiendo así que los alumnos tuvieran oportunidad de ver cómo sus compañeros resolvían el mismo problema de diferentes maneras y ayudándoles a consolidar las diferentes maneras de resolver estos problemas, tal y como veremos en el siguiente análisis.

Los alumnos establecen conexiones (tarea 3)

La tercera tarea se les propuso a los alumnos inmediatamente después de las sesiones que ya hemos explicado y debían resolverla por escrito y de manera individual. Las producciones que mostramos son las que se produjeron antes de la discusión con el grupo de las estrategias utilizadas. Era la primera vez que los alumnos veían escrito un sistema de ecuaciones en

ISBN 978-84-945722-3-4

forma algebraica aunque sí que tenían cierta experiencia utilizando el lenguaje algebraico para escribir generalizaciones.

El primer problema estaba planteado utilizando lenguaje icónico y la mayoría de los alumnos supieron resolverlo utilizando las estrategias que habían aprendido en las tareas anteriores. Como los iconos de esta tarea eran difíciles de dibujar, algunos alumnos recurrieron a símbolos de forma espontánea para escribir sus argumentaciones. Por ejemplo, sustituían un soldado por un círculo o un cuadrado o les asignaban alguna letra a los precios.

Analizamos ahora distintas producciones de alumnos resolviendo el segundo problema de esta tarea. Algunos enseguida se dieron cuenta de que no hacía falta que lo volviesen a resolver ya que las soluciones serían las mismas porque los problemas eran equivalentes (Ilustración 8).

Sin embargo, muchos alumnos lo volvieron a resolver utilizando el lenguaje algebraico. El hecho de que volviesen a resolver el problema no significa que no hubieran identificado su equivalencia con el problema anterior: algunos pensaban que lo estaban haciendo mal si no lo volvían a resolver (decían que les parecía demasiado fácil).

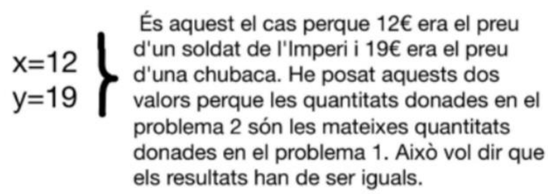


Ilustración 8: Producción de un alumno resolviendo el problema 2 de la tarea 1

En la Ilustración 9 vemos dos resoluciones: en la de izquierda, una alumna utiliza el álgebra sincopada para resolver el problema mientras que la otra llega a resolverlo mediante un lenguaje algebraico formal. Resultó que la mayoría de los alumnos fueron capaces de transferir las estrategias de resolución icónicas a estrategias algebraicas sin la necesidad de una enseñanza formal en técnicas de resolución de sistemas de ecuaciones.

ISBN 978-84-945722-3-4

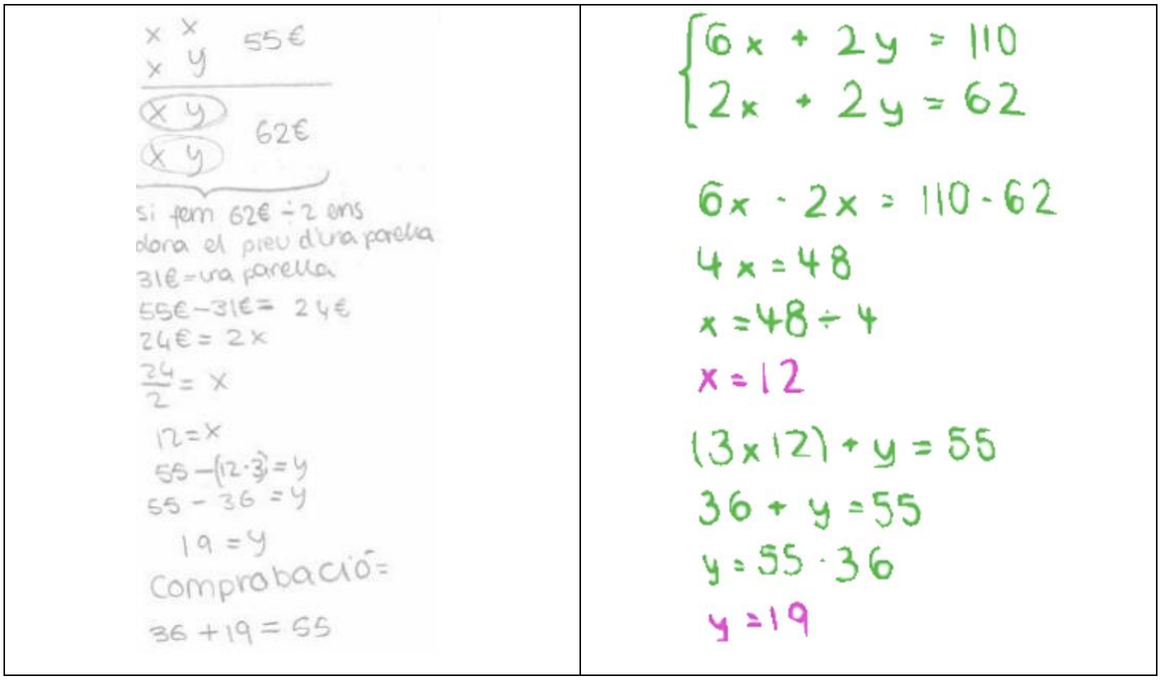


Ilustración 9: Producción de una alumna resolviendo el problema 2 de la tarea 3

Conclusiones

A partir del análisis cualitativo de las producciones de los alumnos y de las actuaciones de los profesores, podemos concluir que:

1. De acuerdo con Espinoza, Barbé y Gálvez (2009), los alumnos son capaces de resolver problemas algebraicos que están representados icónicamente utilizando únicamente los conocimientos propios del "Early Algebra".
2. Gracias a una determinada secuencia de enseñanza, la mayoría de los alumnos son capaces de resolver sistemas de ecuaciones representados algebraicamente sin enseñanza formal, transfiriendo las estrategias aprendidas del lenguaje icónico (de la Fuente, 2016).
3. Los alumnos resuelven sistemas de ecuaciones (representados algebraica o icónicamente), utilizando en su mayoría una versión del método de reducción, combinado con la sustitución (de la Fuente, Deulofeu y Rowland 2016). Esto es porque tienen práctica en encontrar ecuaciones equivalentes a través de manipulaciones icónicas o algebraicas.

ISBN 978-84-945722-3-4

4. Cuando los alumnos aprenden a resolver sistemas de ecuaciones a través de una secuencia como esta, no se olvidan de encontrar el valor de la segunda variable, ya que de esta manera las dos variables tienen significado y el proceso que siguen para encontrar sus valores también (de la Fuente, Deulofeu y Rowland 2016).
5. Los alumnos son capaces de construir sus propios métodos de resolución de sistemas de ecuaciones porque los profesores han conseguido crear un ambiente de resolución de problemas en el aula, donde lo importante no es la solución de los problemas sino la discusión de diferentes estrategias para llegar a la solución y porque los profesores proponen tareas que dan importancia a las conexiones entre las diferentes representaciones de las expresiones y de los conceptos en general, dando siempre significado a todo lo que hacen los alumnos.
6. Nuestra investigación estaba centrada también en analizar el conocimiento de los profesores en su práctica docente, usando para el marco teórico conocido como *Knowledge Quartet* (Rowland, 2014). En la investigación concluimos que era necesario añadir un nuevo código a los ítems que se estudiaban sobre el conocimiento del profesor, que etiquetamos como "Conexiones entre representaciones". Ya hemos visto cómo las conexiones entre representaciones que realizan los profesores ayudan a los alumnos a que se produzca una transferencia de conocimiento entre los lenguajes icónico y algebraico.

Referencias bibliográficas

de la Fuente; A. (2016). *Construcción del lenguaje algebraico en un entorno de resolución de problemas*. *El rol del conocimiento del profesor.* Tesis Doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

de la Fuente, A., Rowland, T., Deulofeu, J. (2016). Developing algebraic language in a problem solving environment: the role of teacher knowledge. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics,* vol 36 (1).

de la Fuente, A., Deulofeu, J., Rowland, T. (2016). Conectar lenguajes para resolver ecuaciones. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas,* 74, 68-74.

Espinoza, L., Barbé, J., Gálvez, G. (2009). Estudio de fenómenos didácticos vinculados a la enseñanza de la aritmética en la educación básica chilena. *Enseñanza de las Ciencias*, 27(2), 157-168.

ISBN 978-84-945722-3-4

Kaput, J. (2008). What is Algebra? What is Algebraic Reasoning? En Kaput, J.; Carraher, D.W. y Blanton, M.L. (2008), *Algebra in the Early Grades* (pp. 5-18). Lawrence Erlbaum Associates: New York.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the Early grades: what it is? *The mathematics educator*, 8(1), 139-151.

Schoenfeld, A.H. (1985). *Mathematical Problem Solving.* Academic Press, Orlando.

Vila, A.; Callejo, M.L. (2004). *Matemáticas para aprender a pensar: el papel de las creencias en la resolución de problemas.* Editorial Narcea, Madrid.

Este trabajo se ha desarrollado en el marco del proyecto de investigación: Matemáticas para maestros, EDU2013-4683-R. I+D, de la Dirección General de Investigación Científica y Técnica, del Ministerio de Economía y Competitividad, que se ha desarrollado en el Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad Autónoma de Barcelona, del cual los autores forman parte.

ISBN 978-84-945722-3-4