

PRESENTACIÓN DE ALGUNOS MÉTODOS DE SOLUCIÓN EN ESTUDIANTES DE NIVEL SUPERIOR, DESDE LAS CUATRO DIMENSIONES DE SCHOENFELD: EL CASO DE ÁREA Y VOLUMEN.

Mayra Alejandra Jimenez Consuegra
mayjimenezc@gmail.com
Universidad Autónoma de Guerrero,
México

Diana Patiño Flores
anaid10_1@hotmail.com
Universidad Autónoma de Guerrero,
México

Catalina Navarro Sandoval
nasacamx@yahoo.com.mx
Universidad Autónoma de
Guerrero, México

Núcleo temático: II la Resolución de Problemas en Matemáticas

Modalidad: CB

Nivel educativo: Formación y actualización docente

Palabras clave: Solving Problem, área y volumen

Resumo. *Se presentan algunos métodos de solución desarrollados por estudiantes de primer semestre de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero, al enfrentarse a situaciones problema de la vida cotidiana. Para ello se plantearon tres problemas: uno fue formulado por los autores y los dos restantes retomados de dos trabajos de investigación. Los problemas propuestos involucran propiedades geométricas y otros conceptos matemáticos relacionados con el cálculo de área y volumen, pues interesó analizar las producciones de estudiantes con base en las cuatro dimensiones propuestas por Schoenfeld: los recursos, la heurística, el control y el sistema de creencias. La aplicación se desarrolló con seis estudiantes, en una sesión en dos etapas: la resolución escrita de los problemas de forma individual y la discusión grupal de los diferentes métodos empleados. En los resultados, se apreció que los estudiantes proceden ante una misma situación problema de maneras diferentes, y que dependerá de los conocimientos previos que éste posea, asimismo del método o estrategia que utilice y finalmente de su capacidad de controlar el camino elegido.*

1. Introducción

La resolución de problemas es un tema de gran interés en la educación matemática, dado que es considerada como un campo en el que aún hay mucho por explorar. Es así, que ha habido preocupaciones didácticas con respecto a ésta, pues se cree que el aprendizaje es una construcción social que involucra conjeturas, pruebas y refutaciones, y para llegar a una solución se requiere analizar, descubrir, elaborar hipótesis, confrontar, reflexionar, argumentar y comunicar ideas (del valle & Curotto, 2008). Esto implica, que la resolución de problemas sea un componente importante en las matemáticas, de hecho Halmos (Citado por Nieto, 2005) señala que “la principal razón de existir del matemático es resolver problemas, y por lo tanto, las matemáticas consisten en problemas y soluciones”

De esta manera, se han encontrado un gran número de estudios cuya atención está en la resolución de problemas, un ejemplo es el trabajo realizado por (Pifarré & Sanuy, 2001) en el que a través de un diseño de situaciones interpersonales de aula, donde el profesor modela el aprendizaje de estrategias de resolución de problemas mediante el diálogo y el diseño de diferentes ayudas pedagógicas. Los autores afirman que para tener mejores resultados tanto en el rendimiento como en el aprendizaje de estrategias de resolución de problemas se debe continuar con el diseño de propuestas didácticas, en otros contenidos matemáticos. También, (Santos-Trigo, 2008), realiza un estudio cuyo objetivo fue investigar las formas de razonamiento que construyen los estudiantes al trabajar actividades de resolución de problemas en ambientes de instrucción, las cuales fomentan el uso de herramientas digitales. Donde se dejó ver, que el empleo de estas herramientas computacionales ofrecen un potencial para que los estudiantes desarrollen un método inquisitivo que les permita involucrarse en actividades propias del quehacer matemático.

Es preciso señalar, que los problemas que se diseñan para la clase de matemáticas deben relacionarse con la realidad, de manera que el estudiante encuentre sentido y aplicación con la vida cotidiana, como se refleja en el trabajo de (D'Amore & Martini, 1997) donde se retoma un problema de Schoenfeld “un autobús del ejército transporta 36 soldados. Si se tiene que llevar a 1128 soldados al campo de entrenamiento, ¿Cuántos autobuses son necesarios? ” Se evidencia que los estudiantes resuelven la división y obtienen como resultado 31.33... pero solo los estudiantes que son capaces de relacionar el resultado con la realidad responden que se necesitan 32 autobuses, es decir, que en este problema los cálculos numéricos son correctos pero no coinciden con la realidad.

Como se ha venido mencionando, el diseño de las tareas juega un papel importante para propiciar un aprendizaje significativo de las matemáticas, esto se puede apreciar en el trabajo de (Sepúlveda , Medina , & Sepúlveda , 2009) donde afirman que para promover el aprendizaje de las matemáticas utilizaron tareas diseñadas bajo ciertos principios: atractivas y fáciles de entender, con contenidos fundamentales del currículo, con el fin de recuperar los procesos de pensamiento utilizados por los estudiantes en sus intentos de solución.

En el presente trabajo se plantearon tres problemas de la vida cotidiana a estudiantes de nivel superior, involucrando los conceptos de área y volumen, con el objetivo de analizar la manera en que utilizan las diferentes propiedades y conceptos para dar solución a los mismos. En el

marco de los resultados, se hizo un análisis teniendo en cuenta cuatro dimensiones que señala Schoenfeld, los recursos, las heurísticas, el control y el sistema de creencias.

2. Marco teórico

En matemáticas la resolución de problemas resulta esencial en los procesos de enseñanza-aprendizaje, (Gros, 1990) señaló que “es una importante actividad cognitiva que ha sido reconocida desde hace tiempo por la teoría y las prácticas educativas” sin embargo, cuando se hace referencia a la resolución de problemas se puede ver desde diferentes perspectivas, desde el punto de vista de las matemáticas, desde la parte significativa del currículo, entre otros.

Por otra parte, la resolución de problemas es vista como una actividad que requiere practica por parte de los estudiantes, al respecto George Pólya expone lo siguiente:

El resolver problemas es una cuestión de habilidad práctica, como, el nada. La habilidad práctica se adquiere mediante la imitación y la práctica. Al tratar de nadar imitamos movimientos de pies y manos que hacen las personas que logran así mantenerse a flote y finalmente aprendemos a nadar practicando la natación. Al tratar de resolver problemas, hay que observar e imitar lo que otras personas hacen en casos semejantes, y así aprendemos problemas ejercitándolos al resolverlos. (Pólya, 1989, pp. 27).

De esta manera, es tarea del profesor generar los espacios en el que los estudiantes observen cómo se resuelve un problema, se interesen por ellos, y finalmente sean capaces de encontrar diferentes métodos de solución.

Uno de los modelos que surgen a partir de las ideas de Pólya es el de Schoenfeld (1985) que propone “que en la resolución de problemas se identifican cuatro factores relevantes: recursos cognitivos, la heurística, control o metacognición y el sistema de creencias” que en efecto, son relevantes debido a que Schoenfeld es uno de los matemáticos que más ha estudiado las estrategias heurísticas que propone Pólya. Con sus experimentos, llegó a la conclusión de que cuando se tiene o se quiere trabajar con la resolución de problemas como estrategia didáctica se deben considerar situaciones más allá de las puras heurísticas; puesto que de lo contrario no funciona, no tanto porque éstas no sirvan, sino porque se deben considerar otros factores (Barrantes, 2006).

Barrantes (2006), define cada una de las dimensiones propuestas por Schoenfeld, asumiendo que “**los recursos** son los conocimientos previos que posee el individuo; se refiere, entre

otros, a conceptos, fórmulas, algoritmos, y, en general, todas las nociones que se considere necesario saber para enfrentarse a un determinado problema” esto implica, que cuando se propone un problema se debe conocer qué herramientas se necesitan para resolverlo y cuales posee el estudiante, de lo contrario no se alcanza el objetivo del mismo.

Por otro lado, Nieto (2004) asegura que “**la heurística** es el conjunto de estrategias y técnicas para resolver problemas que conocemos y estamos en capacidad de aplicar” esto quiere decir, que un problema puede abordarse de diferentes maneras, pero el estudiantes debe poder identificar las estrategias que sean convenientes para la resolución del problema, saber usarlas y tener habilidad para hacerlo.

En cuanto a la tercera dimensión, Barrantes (2006) dice que **el control** se refiere a “cómo un estudiante controla su trabajo. Si ante un determinado problema puede ver una serie de caminos posibles para su solución, el estudiante tiene que ser capaz de darse cuenta si el que seleccionó en determinado momento está funcionando”, lo cual implica, que el estudiante debe que ser capaz de darse cuenta que su método no lo lleva a la solución y por tanto, de poder retroceder e intentar un nuevo camino.

Así mismo, este autor menciona que **las creencias sobre la matemática** “inciden notablemente en la forma en que los estudiantes, e incluso los profesores, abordan la resolución de algún problema. Esto afecta, por ejemplo, cuando un estudiante toma un problema y a los cinco minutos lo abandona o no” esto quiere decir, que las creencias de un estudiante influye en gran medida en el tiempo que dedica al resolverlo, así como sus nociones previas, que muchas veces pueden ser equivocadas.

Estas cuatro dimensiones, son las que en este trabajo se toman de referencia para el diseño de los problemas y el análisis de los resultados presentados por los estudiantes.

3. Metodología

Esta investigación es de enfoque cualitativo, puesto que se preocupa por describir los recursos, las heurísticas, el control y el sistema de creencias que poseen los estudiantes en la resolución de un determinado problema. El experimento se realizó orientado bajo la teoría de Solving Problem de Schoenfeld. Para llevar a cabo el experimento se dieron cinco etapas que se describen a continuación:

1. Elección de los problemas: se propusieron tres problemas, el primero de ellos fue diseñado por los autores de este trabajo. El segundo, fue adaptado del trabajo de maestría Cetina-

Vázquez (2015). El tercero, fue una adaptación de un problema propuesto por Santos-Trigo (2008) en su trabajo sobre la resolución de problemas matemáticos.

2. La validación: una vez elegidos los problemas, se validaron con un grupo de 12 estudiantes de la Maestría en Matemática Educativa de la UAGro, donde aparecieron algunas observaciones respecto a la redacción y las representaciones gráficas.

3. Adecuación de los problemas: Teniendo en cuenta las sugerencias de los maestros se replantearon los problemas de la actividad propuesta.

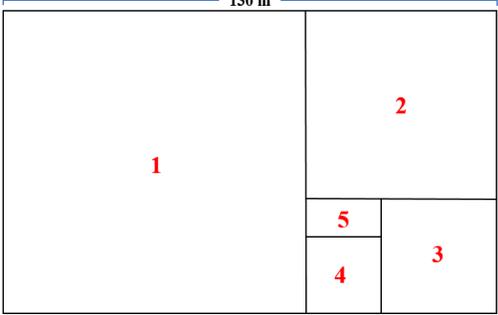
4. La aplicación: se eligió como población a estudiantes de primer semestre de licenciatura en matemáticas de la UAGro, con una muestra de 6 estudiantes (3 mujeres y 3 hombres). La aplicación constó de dos momentos: la realización de la actividad de manera escrita, de manera individual, con duración de tres horas aproximadamente. Y la discusión grupal sobre los métodos empleados para la resolución de la actividad, así como las dificultades presentadas durante la actividad.

5. El análisis: teniendo en cuenta las cuatro dimensiones propuestas por Schoenfeld se presenta un cuadro comparativo de cada uno de los problemas propuestos, donde se relacionan a los recursos, las heurísticas, el control y el sistema de creencias que se evidenciaron en el desarrollo de la actividad realizada por los estudiantes.

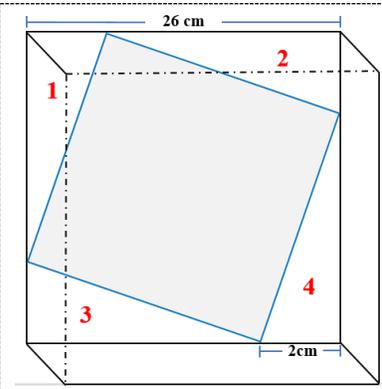
Actividades propuestas

Los problemas y los objetivos propuestos en los mismos se muestran a continuación:

El problema 1: El objetivo fue que el estudiante utilizara su razonamiento geométrico para calcular el área de distintas regiones de un terreno dado, involucrando el cálculo de áreas de cuadriláteros y ecuaciones lineales con una incógnita.

	<p>Problema 1: Una Institución Educativa destinó una región rectangular de su terreno para promover un proyecto ambiental. Este consistía en que un grupo de estudiantes de cada nivel debían poner a germinar semillas de plantas en vía de extinción. La distribución fue de la siguiente manera: al nivel superior le correspondió la región 1, al nivel medio superior la región 2, al secundaria la región 3, a la primaria la región 4 y al jardín de niños la región 5. Como se muestra en la figura.</p> <p>Teniendo en cuenta que las regiones 1, 2, 3 y 4 son cuadradas y que el área total del terreno destinado al proyecto es de 10400 m^2, ¿Cuál es el área que le corresponde a cada grupo de estudiantes?</p>
---	---

El problema 2: Tuvo un doble objetivo, en primera instancia favorecer el aprendizaje de estrategias de resolución de problemas, involucrando el concepto de volumen; y por otro lado, la utilización de los conocimientos previos en su resolución. En este caso, el problema está planteado para que se resuelva mediante varios caminos, se consideraron métodos numéricos y analíticos que implican el teorema de Pitágoras, el concepto de derivada y ecuaciones de segundo orden, pero también métodos geométricos como el punto medio.



Problema 2: Pedro por motivo de su cumpleaños llevó a la escuela un pastel cuadrado de 26 cm de lados y una altura de 10cm. Pretendía compartirlo en el receso con 4 de sus amigos, dándole rebanadas iguales a cada uno de ellos. Inicialmente consideró partirlo como se muestra en la imagen.

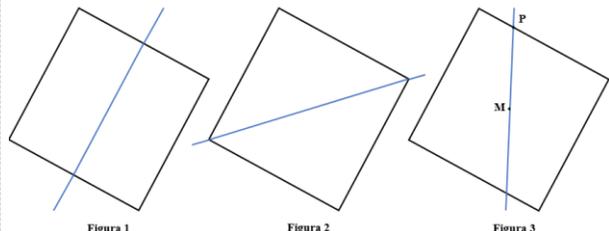
A. ¿Cuánto volumen del pastel le queda a Pedro si comparte con sus amigos como se muestra en la imagen?

B. Si Pedro considera partir el pastel de manera que no sea 2 cm la base del triángulo de la rebanada sino 5cm, ¿Cuánto volumen de dicho pastel será para él?

C. ¿Cuál es el volumen mínimo de la porción con forma cuadrada que le puede quedar al niño, partiendo porciones triangulares iguales para sus 4 amigos?

El problema 3: El objetivo fue conseguir que los estudiantes proporcionaran argumentos geométricos y analíticos a partir de las figuras para justificar las afirmaciones acerca de las áreas de las regiones que se plantearon. Involucrando los conceptos de recta, paralelismo, punto medio y diagonal.

Problema 3: A dos jóvenes, Dan y Homero, les encargaron podar el césped de un jardín con forma cuadrada y deciden repartirse el terreno en dos partes de tal manera que a cada uno le corresponda la misma área. Las figuras 1 y 2 representan las dos formas que inicialmente consideraron para dividir el terreno. Otro estudiante, Jonás, les sugiere seleccionar cualquier punto sobre cualquier lado del cuadrado y trazar una recta que pase por ese punto y el centro del cuadrado, Jonás les afirma que esta recta divide el cuadrado en dos regiones que tienen la misma área (Figura 3).



A. ¿Es cierta la afirmación de Jonás? Justifica tus respuesta con argumentos matemáticos

B. ¿Siempre funciona ese método de dividir el terreno propuesto por Jonás?

C. ¿Existe alguna relación entre el método original de Dan y Homero con el procedimiento que propone Jonás?

4. Resultados y conclusiones

En esta investigación se trabajó con una muestra de seis estudiantes, en este apartado se presentará el análisis de lo realizado por tres de ellos, considerando la notable diferencia en

sus métodos de solución. Se nombrará a los estudiantes como E1, E2 y E3. En el primer problema, los tres estudiantes llegaron a una solución correcta, donde se esperaba la utilización de un razonamiento geométrico. Sin embargo, E2 mostró aspectos que se deben resaltar, en primer lugar, con base a sus creencias de que la mayoría de los problemas se resuelven de manera abstracta, utilizó un método más largo y complejo, razón por la cual, se afectó el tiempo para resolver el resto de los problemas propuestos en la actividad. En segunda instancia, el hecho de dedicarle mucho tiempo a este problema, lo condujo a perder el control en ciertos momentos, debido a que mencionó su intención de abandonar la estrategia que empleo. Mientras que E1 y E3 respondieron a este problema con argumentos geométricos tal y como se esperaba.

En el segundo problema, los estudiantes E1 y E3 mostraron que en efecto un problema puede resolverse de diversas formas, ya que emplearon diferentes conceptos, propiedades y estrategias para llegar a la solución. Uno de los incisos que se planteó, estaba diseñado para solucionarse a través de la derivada, pero ninguno de ellos lo hizo de esa manera. Cabe resaltar que E2 no alcanzó a resolver este inciso, debido al tiempo que utilizó en el primer problema.

En el tercer problema, cada estudiante dejó ver que pueden usar distintos argumentos a la hora de justificar las afirmaciones que se presentaron, en el caso de **E1** consideró necesario incluir cálculos numéricos en sus argumentos, mientras que **E2** no resolvió y **E3** realizó un análisis de manera escrita, sin mayor veracidad.

Schoenfeld propone que en la solución de un problema intervienen cuatro dimensiones, se presenta una discusión teniendo en cuenta éstas.

Los recursos: se pudo notar, que los seis estudiantes participantes en la actividad tenían conocimientos previos relacionados con el cálculo de áreas de figuras geométricas, así como de ecuaciones de primer y segundo grado para resolver el problema 1. En cuanto al problema 2, fue necesario utilizar las fórmulas del volumen y área, recurrir a algunas propiedades de los triángulos y los cuadrados, y en algunos casos al teorema de Pitágoras. En el último problema, mostraron conocer las propiedades del cuadrado, involucrando la definición de diagonales, punto medio, rectas paralelas, entre otras. Y todos estos conocimientos previos fueron usados para dar solución a los problemas propuestos.

Las heurísticas: se observó que cada estudiante puso su sello en la solución de los problemas, usando cada uno sus propias estrategias, algunos usaron el razonamiento geométrico y en brevedad dieron solución acertada, otros fueron más numéricos y se plantearon expresiones algebraicas, teniendo que trabajar en la simplificación de las mismas y encontrar los valores para la incógnitas desconocidas, y por supuesto hubo quienes combinaron sus procedimientos utilizando análisis geométricos y numéricos. Cabe resaltar, que no todos los resultados fueron correctos, pero son los estudiantes quienes deben poder identificar las estrategias convenientes para la resolución del problema, saber usarlas y tener habilidad para hacerlo (Nieto, 2004).

El control: los estudiantes mostraron dominio en los procedimientos que estaban llevando a cabo para resolver los problemas, no obstante, en el caso del estudiante 3, en su reflexión final comentó que no observó que el primer problema resultaba más fácil si lo hacía a través de un análisis geométrico, por lo que optó por una solución algebraica, la cual hizo que tardara mucho más tiempo del que debía en este problema. Como consecuencia, no terminó toda la actividad.

Las creencias: se pudo notar que los estudiantes cuando se enfrentan a situaciones problemas, creen que llegaran a las soluciones de manera abstracta, lo cual no les permite ver los métodos más sencillos de solución, este no solo fue el caso del estudiante 3, sino también del estudiante 5, que plantearon ecuaciones a partir de los enunciados de cada problema y tardaron más debido a la cantidad de procesos que debieron desarrollar. Esta dimensión es muy importante porque según Barrantes (2006) las creencias de un estudiante influyen en gran medida en el tiempo que éste dedica a resolverlo.

Algunos aspectos generales, es que independientemente de que las respuestas fueran acertadas o no, los estudiantes razonaron y procedieron de formas diferentes ante los problemas, lo cual, depende de los conocimientos previos que poseen, sus creencias, las estrategias que se utilizaron en la resolución y finalmente de su capacidad de controlar el camino que eligieron. Al respecto, Santos-Trigo (2008) asegura que la actividad de resolver problemas es una forma de pensar, donde una comunidad de aprendizaje (los estudiantes y el profesor) buscan diversas maneras de resolver la situación y reconocen la relevancia de justificar sus respuestas con distintos tipos de argumentos.

Referencias bibliográficas

Barrantes , H. (2006). Resolución de Problemas. El Trabajo de Allan Schoenfeld. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática* , 1 (1), 1-9.

Cetina-Vázquez, M (2015). *Proceso de matematización de situaciones de variación en el marco de la función cuadrática. Un estudio de caso en bachillerato* (Tesis de maestría). Universidad Autónoma de Guerrero, México.

D'Amore , B., & Martini, B. (1997). Contrato Didáctico, Modelos Mentales y Modelos Intuitivos en la Resolución de problemas Escolares Típicos. *Números* , 1 (32), 26-42.

Del valle, M., & Curotto, M. (2008). La resolución de problemas como estrategia de enseñanza y aprendizaje . *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias* , 7 (2), 463-479.

Gros, B. (1990). La enseñanza de Estrategias de Resolución de Problemas Mal Estructurados. *Revista de Educación* , 415-433.

Juidías , J., & Rodríguez, I. (2007). Dificultades de Aprendizaje e Intervención Psicopedagógica en la Resolución de Problemas Matemáticos. *Revista de Educación*, 342 , 257- 286.

Nieto, J. (2004). *Resolución de Problemas Matemáticos*. Maracaibo : Taller de Formación Matemática.

Nieto, J. (2005). Resolución de problemas, Matemática y Computación. *Enl@ce: Revista Venezolana de Información, Tecnología y Conocimiento* , 2 (2), 37-45.

Pifarré, M., & Sanuy , J. (2001). la Enseñanza de Estrategias de Resolución de Problemas Matemáticos en la ESO: Un Ejemplo Concreto. *Enseñanza de las Ciencias* , 19 (2), 297-308.

Pólya, G. (1989). *Cómo Plantear y Resolver Problemas*. México: Trillas.

Schoenfeld , A. (1985). *Mathematical Problem Solving* . Orlando : Academic Press, INC.

Santos-Trigo, M. (2008). *La Resolución de Problemas Matemáticos: Avances y Perspectivas en la Construcción de una Agenda de Investigación y Práctica*. México: Cinvestav-IPN.

Sepúlveda , A., Medina , C., & Sepúlveda , D. (2009). La Resolución de Problemas y el Uso de Tareas en la Enseñanza de las Matemáticas. *Educación Matemática* , 21 (2), 79-115.