CB-528

LIMITE NO INFINITO: do contexto ao descontexto

Jéssica Meyer Sabatke – Elisandra Bar de Figueiredo –
Ivanete Zuchi Siple – Eliane Bihuna de Azevedo
jessicasabatke@gmail.com – elis.b.figueiredo@gmail.com –
ivazuchi@gmail.com – eliane.bihuna@gmail.com
Universidade do Estado de Santa Catarina, Brasil

Núcleo temático: II. A resolução de problemas em matemática.
Modalidade: CB.
Nível educativo: Terciário – Universitário.
Palavras chave: Ensino de Cálculo. Metodologia de Resolução de Problemas. Limite no infinito. Ensino Superior.

Resumo

A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) faz parte do currículo de vários cursos das Ciências Exatas e tem um papel importante nas primeiras fases da estrutura curricular desses, pois fornece ferramentas fundamentais para a interpretação e resolução de problemas. Por outro lado, sabemos que os processos de ensino e aprendizagem dessa disciplina não são uma tarefa fácil, constituindo-se um grande desafio para a maioria dos docentes e alunos envolvidos, em especial na compreensão do conceito de limite. Com o intuito de envolver o aluno nesse processo foi elaborada uma atividade baseada na metodologia de Resolução de Problemas que foi aplicada em uma turma de CDI, na Universidade do Estado de Santa Catarina. O objetivo da atividade era que os alunos compreendessem as ideias que envolvem o limite tendendo ao infinito. Aqui, apresentamos uma análise qualitativa das resoluções da atividade, pela qual identificamos as dificuldades apresentadas pelos alunos relacionadas tanto a matemática básica, quanto àquelas de abstração e generalizações dos resultados - etapas importantes na formalização do conceito de limite.

Introdução

A compreensão de ideias abstratas do conceito de limite não é uma simples habilidade, porém, é importante que os alunos desenvolvam um entendimento sobre esse conceito. Swinyard e Larsen (2012) dizem que à medida que os alunos avançam para uma matemática mais formal e rigorosa, a definição formal de limite é fundamental, pois, conceitos de continuidade, derivadas e integrais são alguns dos tópicos, para os quais essa definição é indispensável.

ISBN 978-84-945722-3-4

No conteúdo de limite a abordagem do infinito se faz presente, Juter e Grevholm (2007) dizem que os conceitos envolvendo infinito são complexos, porém, necessários para os estudos de matemática. Essas mesmas autoras afirmam que esses conceitos devem ser introduzidos e tratados com mais cuidado por professores, além disso, os "professores nas universidades devem estar cientes de como os alunos criam suas concepções iniciais sobre limites e sobre o infinito, tentando oferecer oportunidades para os alunos desenvolvê-las (...)" (Juter & Grevholm, 2007, p.347). Corroborando com essas ideias, optamos pela metodologia de Resolução de Problemas (RP), visando com que o aluno seja mais comprometido com a sua aprendizagem, pois ele deverá assumir um papel mais ativo e o professor passará a ser um mediador do conhecimento. De acordo com Onuchic e Ribeiro (2011) trabalhar com a metodologia de RP é:

> Uma forma de desafiar os alunos diante de uma situação-problema, uma forma de levá-los a pensar matematicamente e de serem capazes de chegar à resolução com recursos próprios, sob a direção do professor. Essa metodologia permite modificar o ambiente da sala de aula, onde o professor deixa de ser o "transmissor do conhecimento" e transforma o aluno em co-construtor do novo conhecimento. (Onuchic, & Ribeiro, 2011, p.2).

Portanto, temos o pressuposto que os processos de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral (CDI) podem ser enriquecidos utilizando a metodologia de RP. Assim, nesse artigo vamos relatar a proposição de uma atividade que visava explorar as ideias envolvidas no conceito de limite no infinito baseada nessa metodologia. Essa atividade foi experimentada numa turma de CDI, com alunos de Engenharia e Licenciatura, do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC-Joinville).

Limite no Infinito e a Resolução de Problemas

O limite no infinito faz parte do conteúdo programático do ensino de Cálculo na maioria dos cursos de Graduação da Ciências Exatas. Deste modo, trazemos aqui, como é apresentada a definição desse conceito presente no livro Cálculo (Stewart, 2013), que é adotado em nossa instituição como uma referência bibliográfica.

Esse autor apresenta duas definições para o limite no infinito a primeira numa linguagem mais intuitiva, utilizando-se das ideias do infinitamente grande e dos infinitésimos “Seja f uma função definida em algum intervalo (a, ∞). Então $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ significa que os valores de $f(x)$ ficam arbitrariamente próximos de L tomando x suficientemente grande.” (Stewart, 2013, p.120) e, a segunda, na linguagem formal, pelo viés dos intervalos “Seja f uma função definida em algum intervalo (a, ∞). Então $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ significa que para todo $\epsilon > 0$ existe um correspondente número N tal que se $x > N$ então $|f(x) - L| < \epsilon$.” (Stewart, 2013, p.126).

A abstração envolvida na compreensão dessa definição não é, com certeza, tarefa fácil para os alunos, assim, o foco é mais no processo de manipulação algébrica do que na compreensão dessa definição. Então, não é raro que os alunos efetuem tais manipulações sem estabelecerem as conexões com outras representações e aplicações.

Logo, pensamos em introduzir essa definição baseada na metodologia de Resolução de Problemas (RP) em sala (Onuchic, 2013), visando estabelecer a compreensão das variáveis presentes nessa definição, bem como a transição entre os diferentes registros de representação (Duval, 2003).

Onuchic (2013) propõe nove etapas para o uso da RP no ensino: preparação do problema, leitura individual, leitura em conjunto, resolução do problema, observação e incentivo, registro das resoluções na lousa, plenária, busca do consenso e formalização do conteúdo. Enfatizamos que por meio dessas etapas busca-se ensinar *através*[9]da metodologia de RP, por isso os problemas são propostos aos alunos antes de lhes ter sido apresentado formalmente o conteúdo que é pretendido pelo professor, pois dessa forma, o ensino aprendizagem de um tópico começa com o problema, que expressa aspectos-chave desse tópico e técnicas matemáticas à serem desenvolvidas na busca de respostas ao problema dado (Costa & Allevato, 2011).

Tomando como base as ideias até agora apresentadas, na próxima seção iremos descrever a atividade realizada, como foi o desenvolvimento em sala e a análise qualitativa dos dados.

A Situação Problema: Apresentação, aplicação e análise

A situação didática proposta abordou o conteúdo de limite no infinito, no seguinte problema, adaptado de Gomes (2016) e Vieira, A. Clemente, Passini e L. T. Clemente (2014): Em uma indústria, um funcionário recém-contratado produz menos que um operário experiente. A função que descreve o número de peças produzidas diariamente por

[9] Há três formas de conceber a metodologia de RP: ensinar *para* resolver problemas, ensinar *sobre* resolução de problemas e ensinar *através* da RP (Schroeder & Lester, 1989).

ISBN 978-84-945722-3-4

um trabalhador da metalúrgica é $p(t) = 180 - 110 \cdot (2^{-0,5t})$, em que t é o tempo de experiência no serviço, em semanas. Esse problema aborda uma análise gráfica e algébrica da função dada com o intuito de explorar a produção mínima e a reta assíntota ao gráfico de $p(t)$, bem como, determinar uma relação entre o mínimo de tempo de serviço para chegar numa produção mínima de peças para um nível satisfatório de rentabilidade, para que no final o aluno pudesse conjecturar a definição de limite no infinito[10].

A aplicação da atividade aconteceu no primeiro semestre letivo de 2016 em uma turma de CDI, com 40 alunos[11], da UDESC – Joinville, no horário regular de aula. Este experimento foi realizado após ter sido aplicada uma sequência didática para trabalhar a definição de limite de função num ponto, cuja abordagem metodológica adotada também foi a RP.

O problema descrito acima, envolvia os conhecimentos de equação exponencial e logarítmica e construção de gráficos – já vistos no Ensino Básico e também na própria disciplina de CDI.

A análise das atividades foi realizada sobre os registros escritos de quinze grupos (duplas/trios/quartetos), contemplando trinta e seis alunos que estavam presentes em sala de aula. A análise será qualitativa (Bogdan e Biklen, 1994), nos interessando mais os processos do que simplesmente os resultados, desse modo, analisando os dados de forma descritiva.

No desenvolvimento da atividade foi utilizado o roteiro de Onuchic (2013). Assim, inicialmente foi feita a leitura do problema, depois, enquanto os grupos resolviam o problema, a professora circulava na sala observando e mediando as discussões. A etapa que previa o registro das resoluções na lousa não foi cumprida da forma como previa o roteiro, pois os alunos estavam tímidos e não queriam ir até a lousa mostrar suas resoluções. Entretanto, eles explicavam o método que tinham utilizado para resolver cada item e a professora fazia o registro na lousa para socializar com a turma. Após as resoluções terem sido discutidas em conjunto, a professora formalizou o conteúdo.

Na sequência, exibimos as descrições apresentadas pelos alunos na situação problema.

---

[10] A apresentação, na íntegra, desse problema pode ser encontrado no anexo.

[11] A maioria destes alunos já havia cursado a disciplina ao menos uma vez.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Na letra a o intuito era que os alunos encontrassem, através de substituição de *t* por zero na função dada, o número de peças, igual a 70, produzidas numa indústria. Três grupos não chegaram a esta conclusão, e os motivos de erro foram a interpretação do problema, na qual ficou evidente a confusão entre domínio e imagem; o tempo inicial e erros de matemática básica.

A letra *b*, consistia em esboçar o gráfico da função. Dez equipes, obtiveram êxito. Três grupos, atribuíram poucos valores para o tempo, então, não conseguiram identificar a assíntota horizontal. E dois grupos desenharam outros tipos de curvas. A Figura 1 ilustra cada um desses casos.

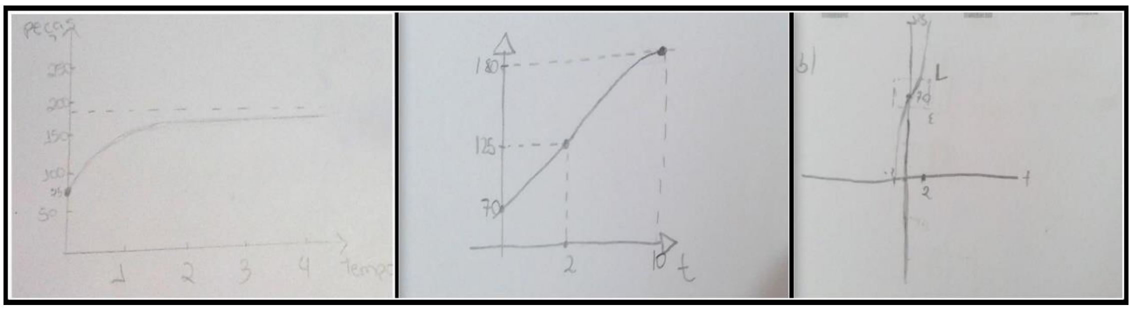


Figura 1 –Representações de gráficos da questão *b* que surgiram, feito por três das equipes.
Fonte: Produção dos grupos.

Na letra *c* as equipes deveriam determinar a assíntota do gráfico e explicar o que ela representava. Todas as equipes que desenharam o gráfico corretamente na letra *b*, deram uma explicação plausível do que significava a assíntota, conforme os extratos: "*Assíntota em 180 peças, pois é o limite de peças produzidas no dia*", "*Representa a quantidade de peças limite que o funcionário pode produzir independente do tempo de experiência*". Uma equipe confundiu a assíntota com o mínimo da função; três equipes não finalizaram a tarefa e uma não respondeu.

Na questão *d*, os alunos precisariam encontrar o valor de *M* substituindo o valor de 160 na equação $p(t)$. Nessa questão surgiram muitas dúvidas, quando os estudantes chegavam a resolução da equação $\frac{20}{110} = 2^{-0,5 \cdot t}$ eles não sabiam como determinar a variável t. Um aluno começou a simular valores para *t* na calculadora chegando, por heurística a "4,64", questionando à professora se sua resposta estava certa, aí ele foi instigado a pensar como ele poderia validar aquele processo heurístico. Esse item gerou muitas dúvidas para as equipes, que observaram que era necessário utilizar logaritmos, mas

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

não lembravam as propriedades. Assim, foi necessária a intervenção da professora, que utilizou o quadro, para revisar algumas das propriedades de logaritmos. Após ser feita a análise das respostas, onze equipes chegaram ao resultado correto, que era aproximadamente igual a 5. Duas equipes não chegaram a resposta correta e duas deixaram em branco.

A tarefa da letra e consistia em representar no gráfico as variáveis $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{\varepsilon}$ e $\boldsymbol{L}$**,** com o objetivo que os alunos interpretassem geometricamente a definição do limite no infinito. Porém, apenas quatro equipes conseguiram interpretar e colocar no gráfico corretamente todas as variáveis, como ilustrado na Figura 2.

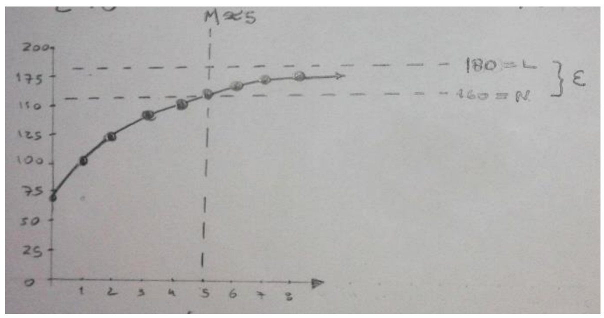


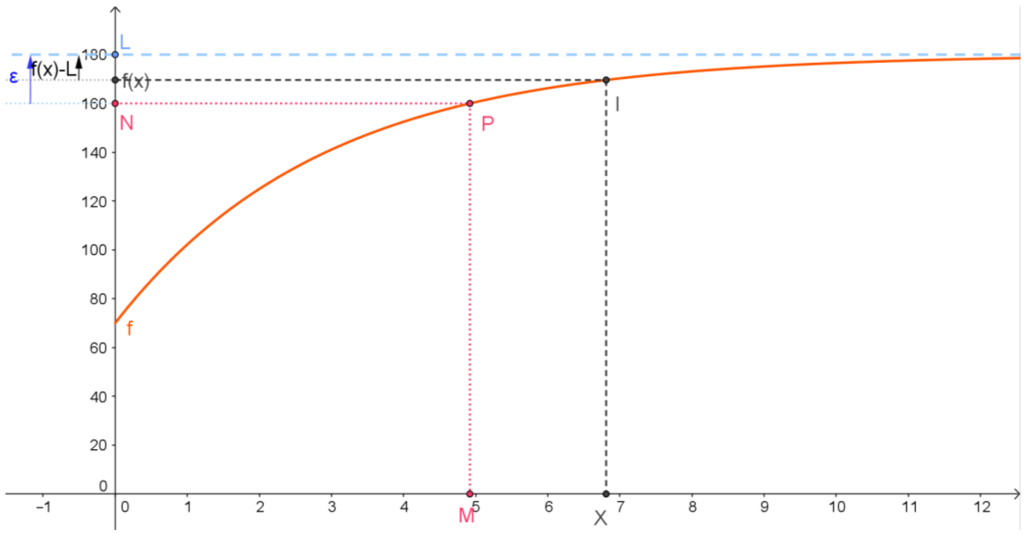
Figura 2. Interpretação das variáveis feita por um grupo da questão *e*.
Fonte: Produção de um grupo.

Na última questão, gostaríamos que os alunos, baseados na interpretação das questões anteriores, conseguissem entender o significado de cada variável no limite pela definição quando t tendia ao infinito. No entanto, como já mencionamos, na questão d, apenas quatro equipes conseguiram colocar as variáveis no gráfico, e dessas, três conseguiram descrever algebricamente sua solução. Nove equipes cometeram erros na interpretação algébrica, e, acreditamos que como eles não conseguiram analisar graficamente, isso dificultou a sua resolução.

ISBN 978-84-945722-3-4

Durante a formalização do conteúdo, foram usados recursos do software GeoGebra para mostrar a função e as variáveis para os alunos no gráfico, como ilustra a Figura 3:

Figura 3. Tela do GeoGebra da representação geométrica da atividade.



Fonte: Produção das autoras.

Considerações Finais

Com essa experimentação, constatamos que a maior parte das equipes conseguiram interpretar corretamente o problema, encontrando a produção mínima, a produção máxima e a quantidade mínima de semanas de trabalho para um operário contribuir para o lucro da empresa. Porém, nas questões para interpretarem geometricamente e algebricamente o significado das variáveis $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{\varepsilon}$ *e* $\boldsymbol{L}$, ocorreram erros, pois o reconhecimento dessas variáveis envolvia a generalização do conceito. Na questão *f* apareceu algumas vezes a variável δ, mesmo não sendo citada em nenhum momento da atividade. Acreditamos que os alunos provavelmente devem ter relacionado com a definição formal do limite de função tendendo a um ponto, que já tinha sido trabalhada anteriormente em sala, e que geralmente, tanto nos livros didáticos, quanto na prática do professor são símbolos e definição muito utilizados. Outra dificuldade apresentada foi em relação ao conhecimento de matemática básica necessária para o desenvolvimento da resolução do problema, fazendo que o tempo de resolução fosse maior do que o esperado.

Trabalhar com RP foi um desafio, tanto para a professora quanto para os alunos, haja vista que essa metodologia envolve muitas etapas diferenciadas da metodologia

ISBN 978-84-945722-3-4

comumente utilizada nas aulas de Cálculo, a tradicional. Kilpatrick (2014, p.7), em uma entrevista, comentou que com relação a RP, "os alunos precisam de muitas, muitas oportunidades, tanto para ver as perguntas e sugestões heurísticas utilizadas na resolução de problemas desafiantes, como para praticar usando, eles próprios, essas perguntas e sugestões". Logo, é importante proporcionar mais oportunidades para os alunos praticarem a RP e se adaptarem a essa forma de trabalho.

Como professoras, consideramos que esta atividade foi enriquecedora, pois foi possível observar tanto as concepções prévias dos alunos como as dificuldades e estratégias de soluções. Além disso, os resultados oriundos dessa experimentação serviram para a evolução dessa situação problema, a qual já foi adaptada e aplicada em outras turmas.

Agradecimentos

Agradecemos o apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa e Inovação do Estado de Santa Catarina (FAPESC) e dos grupos de pesquisa PEMSA e NEPesTEEM.

Referências bibliográficas

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos* (M. J. Alvarez, S. B. Santos & T. M. Baptista, Trad.) Portugal: Porto Editora.

Costa, M. S., & Allevato, N. S. G. (2011). Metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas: opiniões e reflexões de futuros professores de matemática. *Anais do Congresso Brasileiro de Matemática*, São Paulo, SP, Brasil, 8.

Duval, R. (2003). Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão da matemática. In S. D. A. Machado (Org.). *Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica*. Campinas, SP: Papirus.

Gomes, F. M. (2016). *Matemática básica: operações, equações, funções e sequências* [Livro-texto do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas]. Campinas: IMECC – UNICAMP.

Juter, K., & Grevholm, B. (2007). Limits and infinity- A study of university students' performance. In C. Bergsten, B. Grevholm, H, Måsøval, & F. Rønning (Eds.), *Relating practice and research in mathematics education*. Proceedings of Norma05, Fourth Nordic Conference on Mathematics Education, Trondheim: Tapir Akademisk Forlag, 337-348.

Kilpatrick, J. (2014, dezembro). Como vamos de resolução de problemas? Uma conversa com escrita com Jeremy Kilpatrick. *Revista Educação e Matemática.* Lisboa, pp 3-9.

ISBN 978-84-945722-3-4

Onuchic, L. R. (2013). A resolução de problemas na educação matemática: onde estamos? E para onde iremos? *Espaço Pedagógico*. *20*(1), 88-104.

Onuchic, L. R., & Ribeiro, M. V. (2011). A resolução de problemas no ensino superior para o ensino do conceito de integrais. *Anais do II Seminário em resolução de problemas* (SERP), UNESP, Rio Claro, SP, Brasil.

Schroeder, T. L., & Lester, F. K, Jr. (1989). Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving. In: P. R. Trafton (Ed.). *New Directions for Elementary Schol Mathematics*, Yearbook (pp. 31-42), Reston, VA: NCTM.

Stewart. J. (2013). *Cálculo* (Vol. 1, 7a ed.). São Paulo, SP: Cengage Learning.

Swinyard, C., & Larsen, S. (2012). Coming to understand the formal definition of limit: insights gained from engaging students in reinvention. *Journal for Research in Mathematics Education 43*(4), 465-493.

Vieira, A. A. N., Clemente, A., Passini, M. M., & Clemente, L. T. (2014, setembro). O ensino da teoria dos limites nas engenharias como uma estrutura de controle de erros. *Anais do Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia* (*COBENGE)*, Juiz de Fora, MG, Brasil, 12.

Anexo – Atividade realizada em sala sobre limite no infinito

Adaptado de *Matemática básica: operações, equações, funções e sequências* (Gomes, 2016, p. 411) e *o ensino da teoria dos limites nas engenharias como uma estrutura de controle de erros* (Vieira *et al*, 2014, p.5).

1. Em uma indústria, um funcionário recém-contratado produz menos que um operário experiente. A função que descreve o número de peças produzidas diariamente por um trabalhador da metalúrgica é $p(t) = 180 - 110 \cdot (2^{-0,5t})$, em que t é o tempo de experiência no serviço, em semanas.

a. Determine quantas peças um operário recém-contratado produz diariamente.

b. Desenhe o gráfico de $p(t)$.

c. Determine a assíntota horizontal no gráfico e explique o que ela representa.

ISBN 978-84-945722-3-4

d. Matemáticos avisaram de que somente com um volume de produção das peças superior a $\boldsymbol{N}$ a rentabilidade do processo seria satisfatória. Assim, se o mínimo satisfatório economicamente para o desenvolvimento lucrativo da produção for a produção de **160** peças determine a quantidade mínima de tempo, $\boldsymbol{M}$, de experiência de serviço do funcionário para atingir essa produção mínima.

e. Quando o funcionário tem experiência maior do que "M", então a produção ficará sob controle de uma garantia de uma produção mínima de peças que será superior ao valor "N" fornecido como o mínimo de produção aceitável. *Dito em outras palavras: a distância entre o máximo de produção "L", que pode produzir o funcionário e o mínimo "N" aceitável pelos matemáticos é "ε" (L - N = ε). Portanto, mesmo se os matemáticos variassem o valor de N ou ε (sendo relativo à produção, εé sempre positivo), sempre seria possível determinar um novo valor M de tal forma a controlar a produção pelo tempo de experiência.*
Como citado acima, as variáveis $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}\ \boldsymbol{\varepsilon}\ e\ \boldsymbol{L}$ podem controlar a produção de peças. Represente no gráfico que você desenhou no item **b.** essas variáveis.

f. Com relação a definição formal de limite, como ficaria a sentença abaixo? Substitua os espaços em branco pelas informações encontradas nas questões anteriores, utilizando, conforme necessário,$\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{\varepsilon}$ *ou* $\boldsymbol{L}$**.**

$$\lim_{t\to\infty} p(t) = L \iff \forall \_\_\_ > 0, \exists \_\_\_ > 0 \ \ tal\ que\ t > \_\_\_ \to |p(t) - \_\_\_| < \_\_\_$$

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4