# La enseñanza de la probabilidad y la geometría

*Graciela Chemello*, Graciela Fernández, Liliana Gysin*

## Resumen

Presentamos relaciones entre la enseñanza de la probabilidad y la geometría, a través del uso de un marco geométrico para calcular probabilidades teóricas en casos discretos y del cálculo de probabilidades geométricas. Mostramos cómo aparecen diferentes miradas sobre la noción de probabilidad según diferentes contextos y usos, proponiendo problemas para cada caso, y sugerimos algunas ideas para desarrollar propuestas de aula para los diferentes niveles de enseñanza.

## Introducción

Cuando trabajamos con los alumnos en la introducción del concepto de fracción, generalmente utilizamos una representación que podríamos llamar geométrica: trazamos un rectángulo que dividimos en partes, sombreamos alguna de ellas y buscamos una manera numérica de expresar la relación entre la parte sombreada y todo el rectángulo. ¿Por qué no usar una representación del mismo tipo cuando estamos calculando una probabilidad como la relación entre los casos favorables (como una parte) y los casos posibles (que son "todos")? A esto nos referimos cuando hablamos del uso del marco geométrico en las probabilidades discretas.

Esta idea de comparar las áreas involucradas es la que se utiliza en el cálculo de probabilidades geométricas, donde ya no podemos "contar" (casos favorables y casos posibles) sino que debemos "medir" (podríamos decir que las áreas, o la medida de los conjuntos geométricos involucrados, favorables en relación a las posibles). Estos contenidos se pueden trabajar con los alumnos en algunos ejemplos con áreas fáciles de calcular, o relaciones entre las áreas que sean sencillas de deducir. Después de todo, las probabilidades geométricas son casi tan antiguas como la probabilidad misma, y su desarrollo ha llegado a ser base de importantes avances científicos como por ejemplo la tomografía computada.

Consideramos que utilizar este tipo de trabajo en el cálculo de probabilidades puede ser beneficioso para la enseñanza de la probabilidad en la escuela, porque

* la inclusión de otra manera de calcular (u otro marco donde hacer un cálculo equivalente) les permitirá a algunos alumnos acceder al contenido por otro camino, a otros una profundización del mismo

* el conocimiento de probabilidades geométricas ampliará el tipo de problemas que puedan resolver, afianzando de este modo el concepto de probabilidad
* los alumnos, especialmente en el segundo ciclo, conocen propiedades sobre figuras como para lograr un análisis de este tipo (mientras que no disponen de herramientas de conteo, a veces complejas, que son necesarias en algunos problemas de interés)
* ello les permitirá conocer otra aplicación de aquellos contenidos geométricos estudiados

En este trabajo presentamos primero una distinción entre la probabilidad experimental y la teórica, restringiendo la propuesta para el cálculo de la última. Luego explicitamos a qué llamamos usar el marco geométrico en la enseñanza de la probabilidad, y a qué se conoce como probabilidad geométrica. Consideramos diferentes miradas sobre la noción de probabilidad, según cómo está funcionando en un problema o contexto particular y presentamos distintos contextos en que aparece la noción de probabilidad, con problemas asociados a cada una, sugerimos algunas ideas para desarrollar propuestas de aula y presentamos la bibliografía utilizada. Agregamos un anexo con una breve fundamentación sobre por qué enseñar probabilidad en la escuela, algunas referencias históricas y comentarios sobre las relaciones entre el pensamiento aleatorio, la cultura y las ideas previas de los alumnos.

## Probabilidad experimental y probabilidad teórica

La matemática provee modelos variados para analizar diferentes experiencias. Una posible clasificación de los modelos es la que distingue los modelos deterministas de los no deterministas. Los primeros son útiles en aquéllas experiencias en que el resultado es el mismo cuando lo son las condiciones en que se realiza la experiencia, es decir, cuando se puede predecir con exactitud cuál será el resultado, con sólo conocer las condiciones en que se efectúa la experiencia. Por ejemplo, la fórmula que permite calcular, para un móvil en movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, la velocidad final en función de la velocidad inicial, la aceleración y el tiempo, es un modelo determinista del movimiento citado.

Cuando una experiencia es tal que, no puede predecirse el resultado aún si las condiciones de la experiencia son conocidas, este tipo de modelos no es adecuado; la experiencia se llama aleatoria o estocástica, y necesitamos de otro tipo de modelos. Algunas experiencias sencillas de este tipo son:

- arrojar una vez una moneda y analizar si cae cara o ceca
- arrojar una vez un dado y contar qué número se obtiene

- extraer una bolilla de un bolillero con determinada cantidad de bolillas de dos colores y analizar el color de la bolilla extraída

otras experiencias más complejas pueden ser:
- arrojar un cierto número de veces una cierta cantidad de monedas o dados y analizar un resultado posible
- contar el número de artículos defectuosos en un determinado período de tiempo de fabricación en línea

Este tipo de experiencias tienen ciertas características en común; podemos
- repetir las experiencias indefinidamente sin cambiar esencialmente las condiciones,
- determinar los resultados posibles de cada experiencia particular,
- detectar, independientemente del resultado caprichoso de una experiencia particular, una regularidad en los resultados, que aparece si la experiencia se repite un número suficientemente grande de veces.

Esta regularidad, que puede detectarse cuando la experiencia se repite un número grande de veces, viene dada por la frecuencia relativa de cada uno de los resultados. El valor de la frecuencia relativa, cuando el número de experiencias se hace suficientemente grande, tiende a estabilizarse cerca de un número fijo. Recordemos que la *frecuencia relativa* de un suceso se calcula como el cociente entre el número de veces que el suceso ocurre y el número de veces que se realizó la experiencia. De esta definición, son inmediatas algunas propiedades de la frecuencia relativa, por ejemplo, que es un número entre 0 y 1, que vale 0 si el suceso *nunca* ocurre, y vale 1 si el suceso *siempre* ocurre. Que si analizamos dos sucesos mutuamente excluyentes (es decir, que no pueden ocurrir simultáneamente), la frecuencia relativa del suceso compuesto ($A \cup B$) es la suma de las frecuencias relativas de los sucesos A y B. Al valor de la frecuencia relativa para un número suficientemente grande de experiencias se lo suele llamar la *probabilidad experimental*. Este término se utiliza no sólo cuando el valor se calcula realizando la experiencia, sino también cuando se lo calcula simulando la experiencia (por ejemplo, con tablas de números al azar).

Para definir la *probabilidad teórica*, frente a un experimento dado, dijimos que podemos determinar todos los resultados posibles de la experiencia. Al conjunto de todos los resultados posibles lo llamamos espacio muestral, y los indicamos con $\Omega$. A un suceso particular A (que es cualquier subconjunto de $\Omega$), podemos asignarle un número real $p(A)$, llamado la probabilidad de A, que satisface:

* $0 \leq p(A) \leq 1$

* $p(\Omega) = 1$
* Si A y B son sucesos que se excluyen mutuamente, $p(A \cup B)=p(A)+p(B)$
* Si $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ son sucesos que se excluyen mutuamente de a 2, entonces

$$p(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} p(A_i)$$

Observemos aquí que la última propiedad, para cualquier número finito de sucesos, se deduce de la anterior. Sin embargo es necesaria para definir la probabilidad en un caso numerable infinito de sucesos. De todas maneras, como aquí nos ocuparemos de probabilidades para espacios muestrales finitos, podríamos obviarla.

Las propiedades que definen una probabilidad son, en esencia, las propiedades de la frecuencia relativa que analizamos antes. Esta idea nos provee entonces, para aquellas experiencias en que los resultados son equiprobables, una manera de calcular la probabilidad teórica para espacios muestrales finitos como

$$\frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}}$$

Así, si la experiencia que nos ocupa es arrojar una moneda una vez, $\Omega$ = {cara, ceca}, es decir, el *número de casos posibles* es 2; si analizamos el suceso A = {cara}, la probabilidad de A, es decir, la probabilidad de obtener una cara al arrojar una vez una moneda, será un medio.

## Marco geométrico en las probabilidades discretas

Hablamos de probabilidades discretas cuando, para las experiencias que nos ocupan, el espacio muestral es finito. En estos casos, esencialmente "contamos" el número de casos favorables y el número de casos posibles, para hacer luego el cociente entre ambos números. Sin embargo, este cociente si bien referido a números concretos, es decir, en esencia una fracción, tiene características particulares: es una fracción de las que en la escuela suelen llamarse propias (menores que uno), excepto en los casos extremos en que puede valer 0 o 1. Retomando de alguna manera el significado de las fracciones como relación parte/todo, y su representación gráfica con figuras geométricas (en general rectángulos que representan el todo), proponemos utilizar aquí este significado de fracción que aparece muy relacionado con la noción de probabilidad como tal, es decir, con la idea de probabilidad como relación entre los resultados favorables como parte de los resultados posibles (que son todos).

La propuesta es entonces, representar el espacio muestral como una figura geométrica (por ejemplo un rectángulo), asignando a cada uno de los sucesos elementales (equiprobables) una parte de la misma.

Si consideramos la experiencia "arrojar un dado una vez", como los resultados posibles son los 6 valores de las 6 caras del dado, representaremos el espacio muestral como

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 |
| 2 | 4 | 6 |

donde el hecho que los sucesos sean equiprobables se traduce en que las áreas asignadas a cada uno coinciden. Para buscar la probabilidad de un suceso, lo que hacemos es buscar la fracción que queda representada en la figura. Por ejemplo, la probabilidad de obtener un 6 será la fracción representada por la parte sombreada en el rectángulo, que es 1/6.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 |
| 2 | 4 | 6 |

La probabilidad de obtener un número par, será la fracción representada por la parte sombreada en el siguiente rectángulo, que es 1/2.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 |
| 2 | 4 | 6 |

La probabilidad de obtener un número menor que 3, será la fracción representada por la parte sombreada en este último rectángulo, que es 1/3.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 |
| 2 | 4 | 6 |

Este tipo de representación para las probabilidades, permite también calcular probabilidades en los casos en que el alumno aún no tiene acceso al cálculo de las áreas involucradas, ya que lo que debe establecer es la relación entre las áreas.

Así por ejemplo, aún cuando los alumnos no sepan calcular el área de un círculo, pueden determinar que en el caso de una rueda con cada cuadrante pintado de un color (por ejemplo rojo, verde, azul y amarillo), la probabilidad de que al girar la rueda la aguja quede marcando el color amarillo es 1/4.

## Probabilidades geométricas

En el siglo XVIII se encuentra el origen de las probabilidades geométricas, en el problema de la aguja de Buffon. Éste consiste en arrojar al azar una aguja de longitud L sobre una alfombra con líneas paralelas a distancia d una de otra, d > L. Se quiere calcular la probabilidad de que la aguja caiga sobre una de las líneas. Si consideramos aquí que "al azar" significa que el punto medio de la aguja puede caer en cualquier posición y que la aguja puede tener cualquier orientación, todas con la misma probabilidad e independientes una de las otras. En este caso, a diferencia de los anteriores, el espacio muestral -que sería el conjunto de todos los pares de puntos y direcciones en los que puede caer la aguja- no es un conjunto finito. Ya no nos sirve contar para determinar el número de casos posibles o el de casos favorables. ¿Qué hacemos en este caso?

Analicemos otra situación, análoga a ésta, pero que nos es más conocida. Supongamos que tenemos un rectángulo. Si analizamos este rectángulo como un conjunto de puntos, y queremos contar el número de puntos que lo forman, esto también es infinito. ¿Cómo podemos decir algo de este conjunto de puntos que nos sirva para, por ejemplo, comparar tamaños? Lo que hacemos es medir su superficie. Primero medimos la longitud de cada uno de los lados, y luego calculamos la medida de la superficie, es decir el área. En geometría no contamos; medimos.

Esto es exactamente lo que hacemos para calcular probabilidades geométricas; en lugar de contar el número de casos favorables y el número de casos posibles, medimos los conjuntos correspondientes, o directamente comparamos las medidas de ambos conjuntos.

Así, por ejemplo, si tenemos un rectángulo dividido al medio por una de sus diagonales, y queremos calcular la probabilidad de que un punto del rectángulo pertenezca al triángulo que está por encima de la diagonal, basta con hacer el siguiente análisis:
Los puntos posibles son los del rectángulo, y los favorables son los que están en el triángulo superior. Como la diagonal divide al rectángulo en dos triángulos congruentes, la probabilidad buscada es ½, que es la razón entre el área del triángulo que contiene a los puntos favorables y el área del rectángulo (que contiene a los puntos posibles).

Consideramos que la inclusión de este tipo de trabajo en el cálculo de probabilidades puede ser beneficiosa para la enseñanza de la probabilidad en la escuela. En primer lugar, porque históricamente es casi tan antigua como la cuestión de conteo. En segundo lugar, porque los alumnos, especialmente en el segundo ciclo, conocen las suficientes propiedades sobre figuras como para lograr un análisis de este tipo (mientras que no disponen de herramientas de conteo, a veces complejas, que son necesarias en algunos problemas de interés) y además porque ello les permitirá conocer otra aplicación de aquellos contenidos geométricos estudiados. En tercer lugar, porque la inclusión de otra manera de calcular (u otro marco donde hacer un cálculo equivalente) les permitirá a algunos un acceso al contenido por otro camino, a otros una profundización del mismo.

Cabe mencionar aquí que la situación ideal será utilizar, de manera espiralada, diferentes marcos, y distintas miradas sobre las probabilidades.

## Diferentes miradas sobre la noción de probabilidad

Retomando algunos de los aspectos mencionados hasta aquí, podemos detectar diferentes miradas sobre la noción de probabilidad:

Frente a una toma de decisión, hacemos alguna asignación informal de probabilidades a las maneras en que esperamos que se desarrollen los sucesos futuros. En esta asignación estamos midiendo de alguna forma nuestra expectativa. La probabilidad funciona, en este caso, **como una medida** (recordemos que medir es comparar). Es una medida con ciertas propiedades que la caracterizan (que la suma de todas las probabilidades debe ser 1, y que la probabilidad de un suceso imposible es 0).

Por otro lado, les contamos que el origen de la teoría de probabilidades se atribuye a la correspondencia mantenida entre Pascal y Fermat sobre un problema propuesto al primero por el Caballero de Méré en 1654, donde éste pedía a Pascal que le explicara por qué era más ventajoso sacar por lo menos un 6 en cuatro tiradas de un dado que sacar por lo menos un doble 6 en 24 tiradas de 2 dados (a pesar- decía el caballero de Méré- que 4 es a 6 como 24 es a 36). ¿Cómo había llegado el Caballero de Méré a su conclusión, por cierto correcta, ya que la primera vale .517 y la segunda .491, si no la podía explicar? Lo había deducido a partir de la experiencia, a pesar de que la relación entre ambas probabilidades es de casi 95 entre 100. Había hecho funcionar la probabilidad **como el límite de la frecuencia relativa**, analizando un número suficientemente grande de casos.

¿Y qué tipo de análisis hicieron Pascal y Fermat, o incluso Galileo al analizar el pasadiez (juego de azar que retomamos en los problemas dados en contextos de uso, en "juegos de azar")? Ellos buscaron los sucesos elementales que fueran equiprobables, y calcularon la probabilidad como la razón entre el número de casos favorables y el número de casos posibles. En estos casos, hicieron funcionar la probabilidad **como una relación parte todo.** En este último caso, además, podemos representar esta relación de maneras distintas:

* **como razón numérica**, cuando la experiencia nos permite "contar" los casos favorables y los posibles, como en el ejemplo.
* **como porcentaje** (donde lo máximo es el 100%). Así utilizamos la probabilidad en nuestro entorno cotidiano. Si nos dicen que hay un 90% de probabilidad de lluvia, saldremos con paraguas o piloto; no así si la probabilidad es del 2% o del 5%.¿por qué actuamos de este modo? De alguna manera sabemos que la probabilidad puede variar entre el 0% y el 100%, y 90% está cerca del máximo mientras que 2% está cerca del mínimo.
* **como relación entre medidas de magnitudes asociadas a figuras geométricas.** Es el caso en que aparece el marco geométrico en juego, ya sea para la representación o para el cálculo de probabilidades geométricas. Para el nivel escolar usamos perímetro, área o volumen.

Consideramos que estas son las 3 miradas posibles sobre la probabilidad, de acuerdo a cómo funciona: como medida, como resultado de una experiencia y como relación parte/todo. Tradicionalmente se trabajan las probabilidades en un marco numérico y como razón (o a lo sumo como porcentaje). La probabilidad como resultado de una experiencia está fuertemente relacionada con cuestiones estadísticas, ya que exige algún tipo de recopilación de datos (en este caso, de los resultados de experiencias sucesivas), y es utilizada en algunos casos – especialmente ligada a los juegos de azar y al uso de tablas para simular experiencias reiteradas. Pero también en estos casos el marco es numérico y los juegos están armados de manera que basta el conteo del número de casos favorables y posibles, para calcular las probabilidades involucradas (juegos con monedas, dados, cartas, etc., es decir, donde el espacio muestral es finito). La probabilidad como medida se usa de manera intuitiva pero no se llega a trabajar explícitamente, quedando esta mirada para los estudios superiores.

Apelando en parte a las ideas de Piaget e Inhelder que suponen que los alumnos poseen *a priori* un concepto de probabilidad, en tanto ya entre los 7 y los 11 años muestran una comprensión creciente de los conceptos de "coincidencia", "chance", "muestra" y "ley de los grandes números" [citado en 6, p.61], aunque el desarrollo de una noción objetiva de probabilidad debe esperar hasta la aparición de las operaciones formales, después de esta edad. Fischbein agrega que [citado en 6] la enseñanza de cuestiones probabilísticas puede desarrollarse desde edades tempranas a partir de las estructuras intuitivas, desarrollando experiencias en que la probabilidad y la estadística están fuertemente ligadas.

## Los contextos de uso

El cálculo de probabilidades y el pensamiento aleatorio se han ido incorporando paulatinamente a ámbitos cada vez más amplios. Hoy en día los medios masivos de comunicación utilizan el lenguaje probabilístico en diferentes cuestiones, que van desde el pronóstico del tiempo hasta el análisis del comportamiento de los parámetros de la economía. Las transformaciones curriculares en marcha a nivel mundial se han hecho eco de ello, incorporando desde edades tempranas contenidos relacionados con la probabilidad y la estadística en la escuela, con el objetivo de que los alumnos incorporen un tipo de pensamiento aleatorio como herramienta de análisis. Presentamos aquí algunos contextos de uso accesibles a los alumnos en edad escolar que permiten diferentes miradas sobre esta importante noción.

Entre los posibles contextos elegimos la vida cotidiana, los juegos de azar y las diferentes disciplinas, aunque resulta difícil encontrar problemas que no las combinen de una u otra manera. Incluimos también en este apartado las tablas de números al azar y la estadística que, aunque no son contextos de uso en un sentido tradicional, permiten una manera de trabajo o un uso de la probabilidad que aportan de manera particular al contenido. Muchos de los problemas presentados han sido tomados de [3] y [7], incluimos en al anexo algunas de las resoluciones.

### *La vida cotidiana*

Tomamos tres aspectos posibles:

* la expresión como porcentaje, especialmente en los pronósticos, de la relación parte-todo y las interpretaciones posibles a partir de ello

  *Decidan si es verdadera o falsa la siguiente afirmación y expliquen por qué: "Este fin de semana lloverá, ya que hay una probabilidad del 50% de que llueva el sábado y una del 50% de que llueva el domingo".*

* la probabilidad experimental que aparece en los medios masivos de comunicación en que hay involucrados datos estadísticos

  *En una ciudad se publican los periódicos A, B y C. Una encuesta reciente de lectores indica lo siguiente: 30 % lee A, 26 % lee B, 24 % lee C, 8 % lee A y B, 5 % lee A y C, 7% lee B y C, y 2 % lee A, B y C. Para un habitante de la ciudad escogido al azar, calcular la probabilidad de que:*

  *a) no lea ninguno de los periódicos*

*b) lea exactamente uno de los periódicos*

*c) lea al menos A y B si se sabe que lee al menos uno de los periódicos publicados*

* La probabilidad como relación parte-todo para relaciones aparentemente paradójicas

***Como el año tiene 365 días (las personas nacidas en 29 de febrero se anotan el día anterior o el siguiente) tendríamos que reunir 366 personas para estar seguros de que por lo menos dos personas cumplan años el mismo día.***

*Queremos ver cuántas personas deben formar un grupo para que la probabilidad de que dos de ellas cumplan años el mismo día sea mayor que 1/2.*

*a) Hallar la probabilidad de que en un grupo de 10 personas, todas cumplan años en días distintos.*

*b) ¿Cuál es la probabilidad de que en un grupo de 10 personas al menos dos de ellas cumplan años el mismo día?*

*c) Verificar que si el grupo es de 23 personas la probabilidad de que al menos dos de ellas cumplan años el mismo día es mayor que 1/2.*

## *Los juegos de azar*

Los juegos de azar han sido uno de los contextos privilegiados por la escuela para el trabajo con probabilidades. Los juegos en que se arrojan dados o se reparten cartas proveen de diferentes experiencias interesantes, tanto para el cálculo de probabilidades como para exhibir contraejemplos a concepciones. En estos casos, la mirada sobre la probabilidad es como relación parte-todo, pudiendo utilizarse cualquiera de las representaciones. Aquí también, como en el ejemplo histórico presentado, puede incluirse la probabilidad experimental. También resulta interesante hacer el cálculo de probabilidades de los juegos como el Quini6, Loto u otro similar donde aparece la necesidad del cálculo combinatorio para poder contar el número de casos.

*El* pasadiez *es un antiguo juego que consiste en arrojar simultáneamente 3 dados y sumar los puntos obtenidos en cada uno. Quien arroja los dados gana si la suma es mayor que diez. Se trata de probar que este juego es equitativo, es decir, la probabilidad de ganar y la de perder es la misma.*

*a) Calcular la probabilidad de obtener 10 ó más puntos al arrojar 2 dados y sumar sus resultados.*

*b) De la misma forma calcular la probabilidad de obtener 9, 8, 7, 6 y 5.*

*c) Analizar el caso del pasadiez considerando las posibilidades para el dado que se agrega a los dados arrojados en a) y b).*

*Las distintas disciplinas*

Éstas nos proveen de contextos interesantes y cercanos a los alumnos donde las probabilidades entran en juego. Es interesante analizar especialmente las diferencias en cuanto al uso e interpretación que cada disciplina hace de ella.

**[Física]** *Un conjunto electrónico consta de 2 subsistemas A y B. A partir de una serie de pruebas previas, se presuponen las siguientes probabilidades:*
*P(A falle) = 0.2 P(sólo B falle) = 0.15 P(A y B fallen) = 0.15*
*Con estos datos calcular:*
*a) P(A falle / B haya fallado)*
*b) P(sólo A falle)*

**[Biología]** *Un grupo de investigadores está probando si dosis suplementarias de vitamina C reducen la frecuencia del resfrío común y de la gripe. El análisis de un grupo de personas que recibió dosis suplementarias arrojó los siguientes resultados: el 35 % tuvo uno o más resfríos; el 10 % tuvo gripe y el 8 % resfrío y gripe a la vez.*
*a) ¿Qué probabilidad hay de que una persona haya sufrido uno o más resfríos, pero no gripe?*
*b) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona no haya sufrido ninguna de las dos enfermedades?*

**[Geometría]** *Se tiene un rectángulo de 8 cm de base por 6 cm de altura, en el que se trazaron las bases medias y el rombo que queda determinado por los puntos medios de los lados del rectángulo. Se puntea uno de los 4 triángulos en que queda dividido el rombo (a los alumnos se les puede presentar el esquema).*
*a) Hallar la probabilidad de que un punto del rectángulo, pertenezca al rombo.*
*b) Hallar la probabilidad de que un punto del rectángulo pertenezca a la zona punteada.*
*c) ¿Son realmente necesarias las medidas del rectángulo para hallar estas probabilidades? ¿Por qué?*

*Las tablas de números al azar*

Cuando se utilizan tablas de números al azar, se trabaja con probabilidades experimentales, y se pueden analizar aportes tanto desde **la generación de tablas,** como desde su uso para **simular experiencias.**

*Separar a los alumnos en grupos y pedirles que generen una tabla de 500 números al azar de 0 a 9, sugerimos algunos métodos:*

*i) Tomar una guía telefónica y anotar la última cifra del primer número que aparece en cada página ( o cualquier elección semejante ).*
*ii) Colocar en una bolsa 10 bolillas numeradas del 0 al 9 y extraer las bolillas con reposición anotando los resultados.*
*iii) Tomar un dado y una moneda, numerar 5 caras del dado del 0 al 4 y dejar una sin numerar y asignar 0 a una cara de la moneda y 5 a la otra. Arrojar simultáneamente el dado y la moneda y sumar los resultados (si sale la cara sin numerar del dado el resultado no se tiene en cuenta).*
*iv) Algunas calculadoras tienen una función que permite generar números al azar.*
*v) Elegir un mazo de 40 cartas y asignar a las cartas de cada palo los valores de 0 a 9. Extraer las cartas con reposición anotando los resultados.*
*Luego se les pide a los grupos que se intercambien las tablas y simulen las experiencias* ***ii, iii y v,*** *y que utilicen estas tablas para calcular probabilidades experimentalmente (y que las comparen con las probabilidades teóricas), por ejemplo:*
*- En un bolillero hay bolillas numeradas del 0 al 9; se sacan al azar 5 bolillas, con reposición, hallar la probabilidad experimental de que en cada lista de 5 números haya exactamente 2 iguales.*
*- En un juego de azar se sortean todas las semanas, el lunes y el viernes 3 números (del 0 al 9, que en principio pueden salir repetidos). Simulando esta experiencia con la tabla anterior calcular la probabilidad de que al menos un número salga dos veces consecutivas en el mismo lugar.*

*La estadística*

La estadística aparece involucrada no sólo en **la mirada experimental**, sino también en el cálculo de **los intervalos de confianza**, como una nueva manera de utilizar la medida de probabilidad.

- *En la siguiente tabla se clasifica una muestra de 200 adultos, de acuerdo a su sexo y nivel de educación*

| Educación | Varones | Mujeres |
|---|---|---|
| Primaria | 38 | 45 |
| Secundaria | 28 | 50 |
| Universitaria | 22 | 17 |

*Se elige al azar una persona de este grupo, encontrar la probabilidad de que:*
*a) sea varón sabiendo que tiene educación secundaria*
*b) no tenga educación universitaria sabiendo que es mujer*

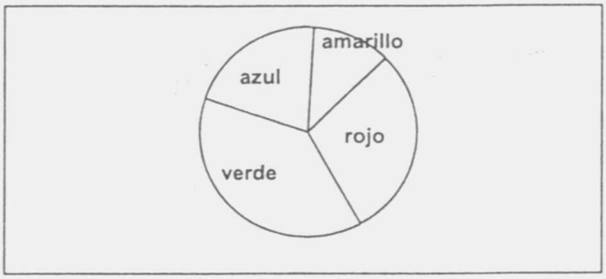
- [Para los alumnos que conocen la distribución de Gauss] *La estatura de los hombres adultos de una ciudad tiene una distribución normal de media 1,70m y desviavión estándar 5cm. Qué probabilidad tiene un hombre adulto elegido al azar de esa ciudad de medir menos de 1,60m?*

## Algunas ideas para desarrollar propuestas de aula

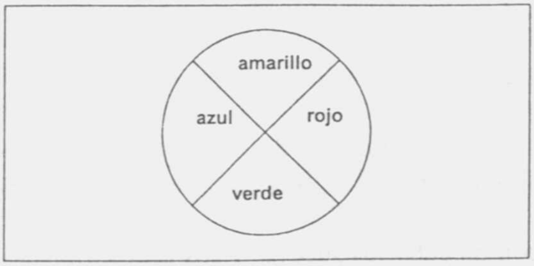
Para EGB2:
Les pedimos a los alumnos que discutan sobre la siguiente situación:

En la organización de la Kermesse de la escuela les pidieron a los alumnos de 5to año que armaran y pintaran una rueda de 4 colores (amarillo, verde, azul y rojo), que coincidían con los colores de los números vendidos. La idea era vender 20 números de cada uno de los cuatro colores, sortear primero el número (con lo que habría 4 posibles ganadores) y luego determinar el ganador con la ruleta de colores.

Martín propuso pintar así




◊ Sandra propuso hacerlo así?



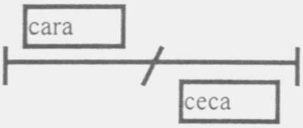

◊ Si se eligiera la primera, ¿a qué color me convendría apostar y por qué?
◊ Si se eligiera la segunda, ¿a qué color me convendría apostar y por qué?

◊ ¿Sería justo el sorteo con cualquiera de las 2 y por qué?
◊ ¿Cuál es la chance de ganar de cada color? (con la segunda)
◊ ¿Cuál es la probabilidad de que salga rojo? (con la segunda)
◊ ¿Qué maneras se les ocurren para sortear un número de entre 20?
◊ ¿Cuál sería la probabilidad de que salga 5?

Luego realizamos una puesta en común para institucionalizar la noción de equiprobabilidad.

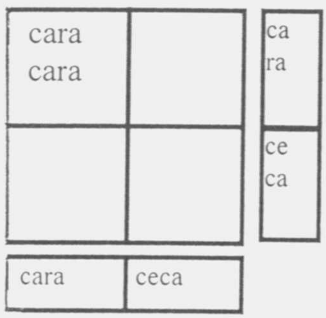
Para EGB2 o para EGB3:

Se tira una moneda una vez, representamos los resultados posibles en un segmento, como indica la figura:




Los dos sucesos son equiprobables (los dos segmentos miden lo mismo), la probabilidad de cada uno de ellos es un medio.

Si tiramos dos monedas, podemos representar la situación a partir de la anterior (la figura es un cuadrado, dividido en 4 cuadrados de la misma área):




◊ Completen el cuadro y analicen las probabilidades de que salgan, respectivamente, dos caras, dos cecas, una cara y una ceca. ¿Son equiprobables los tres sucesos? ¿Por qué?
◊ Analicen de manera similar, ahora con un cubo los sucesos y sus probabilidades para la experiencia de arrojar tres monedas.

Para EGB3 o Polimodal (desarrollado en [3]):

Tomamos un ejemplo que tenga un número pequeño de casos posibles, todos equiprobables y representemos el espacio muestral por un rectángulo que dividimos en tantas partes iguales como sucesos elementales tenemos. Por ejemplo en 6 si estamos analizando una tirada de un dado.
Guiamos a los alumnos a observar que la probabilidad de cada suceso elemental se puede calcular, con este modelo, como relación entre las áreas. Luego les hacemos calcular la probabilidad de algún suceso compuesto (sombreando el área que le corresponde), por ejemplo, que sea múltiplo de 3. Les hacemos ver que la probabilidad de la unión es la suma de la probabilidades (en este caso).
Luego les pedimos que analicen la probabilidad de la unión de dos sucesos compuestos con intersección no vacía, también sombreando en el modelo, llevándolos a deducir que

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C)$$

Un desarrollo análogo puede hacerse para la unión de tres sucesos, utilizando como modelo un cubo. En este nivel también se pueden tomar varios de los problemas enunciados antes.

Para Polimodal (desarrollado en [3])

Este tipo de trabajo nos permite analizar problemas interesantes de variables con distribución normal (como las alturas de los individuos de una población, como en el problemas presentado en el punto "La estadística" del apartado anterior.), calculando las probabilidades de que un individuo se encuentre entre la media menos y más una desviación estándar, etc. Los alumnos pueden calcular las áreas aproximadas o utilizar una tabla de la distribución normal y trabajar intervalos de confianza y aplicaciones, por ejemplo en finanzas. En este nivel pueden darse los problemas enunciados en "Los contextos de uso".

## Conclusiones

Hemos tratado de acercar, a lo largo de todo el trabajo (incluidos los anexos), diferentes aspectos que hacen a la noción de probabilidad. Las formas de calcularla y las diferentes miradas sobre la noción que surgen de ella; sus posibles representaciones y contextos de uso y aplicación; su evolución histórica y su relación con la cultura. Cada uno de estos aspectos aporta al contenido en cuestión.

Creemos que, como ocurre también con los demás temas de matemática que se enseñan en la escuela, el trabajarlos con posibles significados, diferentes representaciones y variados contextos facilita a los alumnos incorporar el contenido en cuestión de una manera dinámica a su red de relaciones conceptuales, permitiéndoles hacer uso del mismo cada vez que lo vean como necesario o adecuado para enfrentar y resolver una situación particular.

Destacamos la representación geométrica, y asociada con ella la idea de probabilidades geométricas no sólo por considerarla tan importante como otras formas de representación u otros significados, sino especialmente por ser un aspecto de la probabilidad poco conocido y poco trabajado en el aula. Como mencionamos en la Introducción, son varias las ventajas de esta forma de trabajo, especialmente con los alumnos de menor edad.

Esperamos que resulte un insumo apropiado para la toma de decisiones del docente a la hora de planificar su trabajo de aula en relación al tema.

## Bibliografía


1. Howard Eves, *An Introduction to the History of Mathematics*, Saunders College Pub,, Stony Brook,1983.
2. Martin Gardner, *Paradojas ¡ajá!*
3. Liliana Gysin, Graciela Fernández, *Una mirada numérica*, AZ, Buenos Aires, 1999.
4. Morris Kline, *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días , I-II-III,* Alianza Universidad, Madrid, 1972.
5. George Polya, *Métodos Matemáticos de la Ciencia*, DLS-EULER, Madrid, 1994.
6. Luis A. Santaló, *Las probabilidades en la educación secundaria*, en *Enseñanza de las Matemáticas en la Educación Secundaria*, Rialp, Madrid, 1995.
7. Trabajo realizado sobre el apartado del libro [3]-Probabilidades, con subsidio de la Fundación Antorchas, varios autores, en preparación.

## Anexo

### ¿Por qué enseñar probabilidad en la escuela?

Entre los cambios que se introducen a partir de la transformación curricular, y en la enseñanza de la matemática en particular, encontramos acercar a los alumnos a conocimientos disciplinares cada vez más próximos a su realidad cotidiana, que los capaciten en la comprensión de su entorno y en la toma de decisiones con autonomía y pensamiento crítico. Dentro de esta tendencia vemos aparecer la introducción de nociones de probabilidad desde los primeros años de la EGB. Ello pretende también corregir una falencia de la enseñanza tradicional, en la que el pensamiento aleatorio está prácticamente ausente.

Este hecho no es ajeno al desarrollo histórico de las probabilidades dentro de la disciplina. Como dice Santaló [6], "Los problemas que no se podían resolver exactamente, como son aquéllos en los que interviene el azar, se consideraron ajenos al tratamiento de la matemática, con lo cual se conformó una especial formación intelectual sesgada hacia el determinismo". Cuando las probabilidades se hacen parte de los conocimientos disciplinares, también se introducen en la enseñanza, pero desde los niveles superiores, primero universitario, y luego en los últimos años de la escuela media.

Este hecho también está relacionado con el número cada vez mayor de aplicaciones del cálculo de probabilidades. Las teorías más modernas de la física, por ejemplo, son aleatorias. Ya no se predice con exactitud el estado de un sistema en un momento futuro, sino con una cierta probabilidad. Si bien las leyes generales de la física siguen siendo deterministas, los casos particulares son esencialmente aleatorios.

Se plantean entonces preguntas como: ¿En qué momento los alumnos pueden acceder a nociones probabilísticas? ¿Cuáles son los conceptos e intuiciones que manejan respecto del tema? ¿Existe una intuición probabilística natural en los niños? ¿Cuál es la mejor manera de acercar a los alumnos al pensamiento aleatorio? ¿Existen diferentes significados de la probabilidad que los alumnos pueden manejar o conocer? ¿Se pueden calcular probabilidades en diferentes marcos y distintos contextos? ¿Cuándo usamos probabilidades?
Algunas de estas preguntas han sido y están siendo estudiadas por especialistas tanto de la matemática como de la didáctica y la psicología. En el artículo de Santaló [6] podemos encontrar algunas referencias a las 4 primeras preguntas. En este trabajo nos ocupamos especialmente de las tres últimas, en relación a la enseñanza

de las probabilidades, destacando como una alternativa válida el uso de las probabilidades geométricas.

## El pensamiento aleatorio y la cultura

Desde tiempos remotos, el hombre ha estado enfrentado a la toma de decisiones. Para tomar decisiones nos apoyamos fuertemente en nuestra expectativa respecto del futuro. La pregunta sería entonces, ¿cómo medimos esta expectativa? Analizamos las opciones, algunos posibles cursos de acción y sus resultados y pesamos cuál de ellos es el que nos parece que va a ocurrir. Al hacer esto, estamos asignando una probabilidad de manera informal. El éxito que tengamos dependerá, en gran medida, de cuán acertadamente pesamos los posibles resultados de uno u otro curso de acción, es decir, de cuán acertadamente asignamos las probabilidades.

¿Y de qué depende esta asignación informal (o formal) de un número? ¿En qué basamos nuestra expectativa respecto del futuro? Esto tiene mucho que ver con nuestra experiencia previa, con nuestra formación y con nuestra cultura; y esto a su vez está relacionado con los desarrollos científicos, sociales y tecnológicos de la época.

Tomemos, por ejemplo, la época de Aristóteles, cuando el pensamiento científico se apoyaba en las hipótesis de "no hay efecto sin causa" y de "hipótesis iguales conducen a consecuencias iguales". La pregunta esencial de los científicos era ¿por qué? Desde la idea preconcebida de que no hay efecto sin causa, lo que se buscaba eran las causas de los fenómenos. Cuando aparece en escena Galileo (1564-1642 ), cambia la pregunta. Dice Polya [5]: "¿Por qué? ¿Por qué esto? ¿Por qué aquello? Éstas eran las preguntas hechas por el buen pastor Aristóteles y baladas por sus ovejas a lo largo de los siglos. ¿Por qué los cuerpos pesados caen? 'Porque', dice Aristóteles, 'cada cuerpo busca su lugar natural'. Él razona como si un objeto inanimado fuera un animal que busca a su compañero. ¿Te sirve de aclaración este razonamiento? No, porque has nacido en tiempos modernos. Galileo no. Él tenía que discutir este punto en el clima intelectual de su época. Galileo, increíblemente moderno, hizo una pregunta mejor: no '¿Por qué?', sino '¿Cómo?' . Su pregunta exigía una descripción exacta del fenómeno que se estaba estudiando." Galileo hizo la pregunta adecuada y fundó, a partir de la respuesta que halló, una nueva ciencia. Después de él vendría Newton a confirmarla y desarrollarla. Pero la predominancia de la filosofía natural de Galileo y el cálculo de Newton, no hicieron más que afianzar la idea de la matemática como una ciencia exacta, dejando todavía fuera de la disciplina al cálculo de probabilidades. Hasta P.S. de Laplace (1749-1827) quien consagra en su *Ensayo filosófico sobre las probabilidades (1820)* la idea determinista al decir [citado en 6]: "Una inteligencia que en un determinado instante pudiera conocer todas las fuerzas que impulsan la naturaleza y la respectiva posición de los seres que la componen y que, además, tuviera la suficiente amplitud para someter esos datos al análisis, incluiría en una sola fórmula los movimientos de los mayores cuerpos del universo y los más ínfimos átomos; nada le escaparía y tanto el pasado como el futuro estarían en su presencia." La física debió esperar hasta nuestro siglo para incluir el cálculo de probabilidades en sus teorías. Hoy podemos decir que la ley general sigue siendo determinista, pero el acontecimiento particular es esencialmente aleatorio.

## Un poco de historia

Galileo -como dice Polya [5]- "inquietó los sueños dogmáticos de muchos de sus contemporáneos. ... era pendenciero a la vez que discutidor, e ingenioso a la vez que lógico." Se cansó de estudiar medicina y se dedicó a la física, inventó y fabricó instrumentos: telescopios, termómetros, y los que necesitaba para hacer sus estudios de dinámica, por ejemplo, como necesitaba medir el tiempo, y no existían relojes lo suficientemente precisos, pegó pequeñas tablitas a lo largo de un plano inclinado, lo suficientemente grandes para que el cuerpo que se deslizaba fuera audible cuando se golpearan, pero lo suficientemente pequeñas para que no impidieran el movimiento de modo apreciable. Fue Galileo el primer científico de fama que se ocupó de un problema de probabilidades, al analizar un juego de dados llamado el pasadiez [citado en 6]. Tengamos en cuenta que el cálculo de probabilidades aparece ligado fuertemente a los juegos de azar y era, como dice Santaló[6] "considerado censurable desde el punto de vista moral. Así, el naturalista francés George Louis Leclerc, conde de Buffon (1707-1788), en su *Ensayo de Aritmética Moral (1777)* decía: 'los juegos de azar, por su naturaleza misma, son un contrato vicioso desde su origen, contrato perjudicial a cada contractante en particular y al bien común de toda la sociedad'."

Otro problema, el de cómo dividir las ganancias entre dos jugadores cuando éstas corresponden al primer jugador que obtenga n puntos, y el juego resulta interrumpido cuando el primero lleva ganados p puntos y el segundo q, aparece en la *Summa* de Luca Paccioli (1445-1514) y en libros de Cardano (1501-76, jugador empedernido que publicó un manual del jugador), Tartaglia y otros.

Sin embargo, el origen de la teoría de probabilidades se atribuye a la correspondencia mantenida entre Blaise Pascal (1623-62) y Pierre de Fermat (1601-65) sobre un problema propuesto a Pascal por Antoine Gombaud, Chevalier de Méré (1610-85), en 1654. Éste pedía a Pascal que le explicara por qué era más ventajoso sacar por lo menos un 6 en cuatro tiradas de un dado que sacar por lo menos un doble 6 en 24 tiradas de 2 dados (a pesar-decía el caballero de Méré- que

4 es a 6 como 24 es a 36). Las aplicaciones en el siglo XVII a cuestiones de seguros, atrajo a matemáticos a la teoría de probabilidades subyacente. Abraham De Moivre (1667-1754) utilizó probabilidades en su *Doctrine of Chances*. Se buscaron nuevos campos de aplicación. El mismo Buffon, director del "Paris Jardin du Roi"dio el primer ejemplo de probabilidades geométricas, también en relación a un juego de azar conocido como el problema de la aguja de Buffon.

Se trató de calcular, por ejemplo, la probabilidad de que un tribunal acierte el juicio, suponiendo que se puede asignar a cada juez un número que mida la probabilidad de que diga o entienda la verdad. Esta "probabilité des jugements" aparece desarrollada en el trabajo de Antoine Nicolas Caritat, Marquis du Condorcet (1743-1794), una de las víctimas de los excesos de la revolución francesa. Una de sus conclusiones fue que la pena de muerte debía abolirse, porque no importaba cuán grande fuera la probabilidad de acertar una decisión, hay una alta probabilidad de que en el transcurso de varias decisiones, alguna persona inocente sea condenada equivocadamente [1].

En 1713, 8 años después de la muerte de su autor, se publicó el libro *Ars Conjectandi*, de Jacobo Bernoulli (nacido en Suiza, en 1700), donde propone su modelo binomial para el cálculo de probabilidades de pruebas repetidas. En honor a su autor también se conoce el modelo como de las "pruebas de Bernoulli". Este fue el primer libro significativo sobre teoría de probabilidades. En 1812, un siglo más tarde, se publicó la *Théorie Analitique des* Probabilités de P.S. de Laplace, que fue la base de los desarrollos en la teoría de los siglos XIX y XX.

## Probabilidad e intuición

El mismo P.S. de Laplace nos dice que "en el análisis final, la teoría de probabilidades sólo es el sentido común expresado con números". Sin embargo, el pensamiento aleatorio muchas veces parece contrario a la intuición del hombre común. Es en parte por ello que, en una sociedad en que los usos de la probabilidad son cada vez más comunes, se hace necesario incluir este tema en la escuela. Veamos algunos ejemplos en que la probabilidad parece contradecir la intuición:

- Propongamos a un grupo de n alumnos un juego que consiste en elegir una de las n llaves, y llevarse el premio que hay dentro de un cofre si la llave elegida abre el cofre. Preguntemos a los alumnos si quieren ser los primeros en elegir, o los últimos, o si les da igual. Muchos querrán ser los primeros, argumentando que en ese caso, están seguros de que la llave correcta todavía no ha sido elegida. Muchos otros elegirán ser últimos, argumentando que su probabilidad de elegir la llave correcta aumenta a medida que los anteriores eligen la llave equivocada. Es necesario poseer cierta formación en probabilidades para comprender que el orden de extracción es indistinto, ya que todos poseen la misma probabilidad de elegir la llave correcta, independientemente del orden de extracción.

- Otro ejemplo aparentemente contradictorio, pero por cierto bastante común, es el de quien apuesta en la quiniela al número que menos ha salido últimamente, apoyándose en que el azar tiene algún tipo de memoria.

Algunos ejemplos poco intuitivos son los que cita Santaló[6]:
- El número de personas necesarias para que la probabilididad de que dos de ellas cumplan años el mismo día sea un medio son 23.
- La probabilidad de que un hijo sea varón y la de que sea mujer son ambas 0.5, sin embargo la probabilidad de que una familia que tiene 6 hijos tenga 3 varones y 3 mujeres es 0.313.

Se pueden encontrar otros ejemplos interesantes en el libro de Gardner[2].

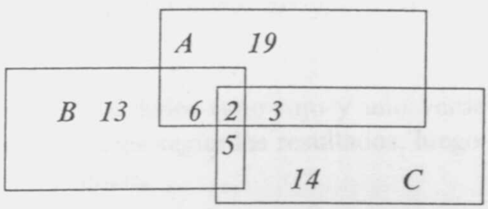
**Resolución de algunos ejemplos presentados en el apartado "Los contextos de uso":**

** Decidan si es verdadera o falsa la siguiente afirmación y expliquen por qué:*
*"Este fin de semana lloverá, ya que hay una probabilidad del 50% de que llueva el sábado y una del 50% de que llueva el domingo".*

La afirmación es falsa, lo que suceda el sábado no incide sobre lo que suceda el domingo, y en ambos casos la probabilidad de que no llueva es mayor que 0.

** En una ciudad se publican los periódicos A, B y C. Una encuesta reciente de lectores indica lo siguiente: 30 % lee A, 26 % lee B, 24 % lee C, 8 % lee A y B, 5 % lee A y C, 7% lee B y C, y 2 % lee A, B y C. Para un habitante de la ciudad escogido al azar, calcular la probabilidad de que:*

*a) no lea ninguno de los periódicos*
*b) lea exactamente uno de los periódicos*
*c) lea al menos A y B si se sabe que lee al menos uno de los periódicos publicados*



Total lectores:(19+13+6+2+3+5+14)%=62%

a) 100%-62% = 38%

b) (19+13+14)%=46%

*c)* los que leen al menos uno son el 62% . Los que leen A y B son (6+2)%=8%. Hacemos (8/62)=0.129%

** Como el año tiene 365 días (las personas nacidas en 29 de febrero se anotan el día anterior o el siguiente) tendríamos que reunir 366 personas para estar seguros de que por lo menos dos personas cumplan años el mismo día.*
*Queremos ver cuántas personas deben formar un grupo para que la probabilidad de que dos de ellas cumplan años el mismo día sea mayor que 1/2.*

*a) Hallar la probabilidad de que en un grupo de 10 personas,todas cumplan años en días distintos.*
*b) ¿Cuál es la probabilidad de que en un grupo de 10 personas al menos dos de ellas cumplan años el mismo día?*
*c) Verificar que si el grupo es de 23 personas la probabilidad de que al menos dos de ellas cumplan años el mismo día es mayor que 1/2.*

a) casos posibles: es como tener 10 casilleros, en cada uno puedo poner uno de los 365 días, es decir hay $365^{10}$ casos posibles.
casos favorables: de cuántas manera elijo 10 de entre 365 si deben ser todos distintos, pero sí me importa el orden, es 365!/(365-10)!=365!/355!
El cociente da .88, es decir hay una probabilidad del 88% de que en un grupo de 10 personas, todas cumplan años en días distintos.

b) es el complemento, es decir 11.7%

c) para ver esto, armamos una tablita, donde efectuamos la misma cuenta que en los incisos a) y b), para grupos de respectivamente 1, 2, 3, ... personas. Podemos ver que la probabilidad buscada es mayor al 50% para 23 personas

| | | | PROB.a) | PROB.b) | PERS. |
|---|---|---|---|---|---|
| 365 | 365 | 1 | 100.00% | 0.00% | 1 |
| 364 | 365 | 0.997260274 | 99.73% | 0.27% | 2 |
| 363 | 365 | 0.994520548 | 99.18% | 0.82% | 3 |
| 362 | 365 | 0.991780822 | 98.36% | 1.64% | 4 |
| 361 | 365 | 0.989041096 | 97.29% | 2.71% | 5 |
| 360 | 365 | 0.98630137 | 95.95% | 4.05% | 6 |
| 359 | 365 | 0.983561644 | 94.38% | 5.62% | 7 |
| 358 | 365 | 0.980821918 | 92.57% | 7.43% | 8 |
| 357 | 365 | 0.978082192 | 90.54% | 9.46% | 9 |
| 356 | 365 | 0.975342466 | 88.31% | 11.69% | 10 |
| 355 | 365 | 0.97260274 | 85.89% | 14.11% | 11 |
| 354 | 365 | 0.969863014 | 83.30% | 16.70% | 12 |
| 353 | 365 | 0.967123288 | 80.56% | 19.44% | 13 |
| 352 | 365 | 0.964383562 | 77.69% | 22.31% | 14 |
| 351 | 365 | 0.961643836 | 74.71% | 25.29% | 15 |
| 350 | 365 | 0.95890411 | 71.64% | 28.36% | 16 |
| 349 | 365 | 0.956164384 | 68.50% | 31.50% | 17 |
| 348 | 365 | 0.953424658 | 65.31% | 34.69% | 18 |
| 347 | 365 | 0.950684932 | 62.09% | 37.91% | 19 |
| 346 | 365 | 0.947945205 | 58.86% | 41.14% | 20 |
| 345 | 365 | 0.945205479 | 55.63% | 44.37% | 21 |
| 344 | 365 | 0.942465753 | 52.43% | 47.57% | 22 |
| 343 | 365 | 0.939726027 | 49.27% | 50.73% | 23 |

* *El* pasadiez *es un antiguo juego que consiste en arrojar simultáneamente 3 dados y sumar los puntos obtenidos en cada uno. Quien arroja los dados gana si la suma es mayor que diez Se trata de probar que este juego es equitativo, es decir, la probabilidad de ganar y la de perder es la misma.*

*a) Calcular la probabilidad de obtener 10 ó más puntos al arrojar 2 dados y sumar sus resultados.*

*b) De la misma forma calcular la probabilidad de obtener 9, 8, 7, 6 y 5.*

*c) Analizar el caso del pasadiez considerando las posibilidades para el dado que se agrega a los dados arrojados en a) y b).*

a) Tiramos dos dados (uno rojo y uno verde) y anotamos en una matriz las posibles sumas según los resultados, luego armamos la tabla de frecuencias para las sumas.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

| **Suma** | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Frecuencia** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

Sobre 36 resultados posibles, hay 6 favorables, la probabilidad es 1/6.

b) Las probabilidades son:(observar que se calculan las probabilidades para exactamente 9, exactamente 8, etc)

9 (4/36), 8 (5/36), 7 (6/36), 6 (5/36), 5 (4/36)

c) Armamos una matriz, con las sumas de los anteriores en una entrada y los valores del tercer dado en la otra, con las sumas de los tres.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |

Hay 33 casos favorables y 33 que no lo son, de modo que la probabilidad de ganar y de perder es la misma, se trata de un juego limpio.

** Un conjunto electrónico consta de 2 subsistemas A y B. A partir de una serie de pruebas previas, se presuponen las siguientes probabilidades:*

*P(A falle) = 0.2    P(sólo B falle) = 0.15    P(A y B fallen) = 0.15*

*Con estos datos calcular:*

*a) P(A falle / B haya fallado)*

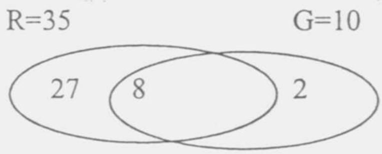
*b) P(sólo A falle)*

a) P(B falle)=P(sólo B falle)+P(AyB fallen) , la probabilidad buscada es : P(AyB fallen)/P(B falle) = 50%
b) P(sólo A falle)=P(A falle) – P(AyB fallen) = 0.2-0.15=5%

** Un grupo de investigadores está probando si dosis suplementarias de vitamina C reducen la frecuencia del resfrío común y de la gripe. El análisis de un grupo de personas que recibió dosis suplementarias arrojó los siguientes resultados: el 35 % tuvo uno o más resfríos; el 10 % tuvo gripe y el 8 % resfrío y gripe a la vez.*

*a) ¿Qué probabilidad hay de que una persona haya sufrido uno o más resfríos, pero no gripe?*

*b) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona no haya sufrido ninguna de las dos enfermedades?*



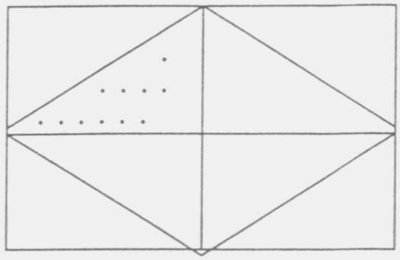

a) 27%
b) 1-0.37=63%

** Se tiene un rectángulo de 8 cm de base por 6 cm de altura, en el que se trazaron las bases medias y el rombo que queda determinado por los puntos medios de los lados del rectángulo. Se puntea uno de los 4 triángulos en que queda dividido el rombo (a los alumnos se les puede presentar el esquema).*

*a) Hallar la probabilidad de que un punto del rectángulo, pertenezca al rombo.*

*b) Hallar la probabilidad de que un punto del rectángulo pertenezca a la zona punteada.*

*c)¿Son realmente necesarias las medidas del rectángulo para hallar estas probabilidades? ¿Por qué?*



El rectángulo queda dividido en 8 triángulos congruentes, 4 de ellos forman el rombo.

a) favorables:4, posibles:8, probabilidad 50%
b) favorables:1, posibles:8, probabilidad 12.5%
c) No, porque siempre habrá 8 triángulos congruentes (no usamos las medidas para el cálculo)

- *En la siguiente tabla se clasifica una muestra de 200 adultos, de acuerdo a su sexo y nivel de educación*

| Educación | Varones | Mujeres |
|---|---|---|
| Primaria | 38 | 45 |
| Secundaria | 28 | 50 |
| Universitaria | 22 | 17 |

*Se elige al azar una persona de este grupo, encontrar la probabilidad de que:*
*a) sea varón sabiendo que tiene educación secundaria*
*b) no tenga educación universitaria sabiendo que es mujer*

a) hay 78 personas que tienen educación secundaria, 28 son varones, P=28/78=35.9%
b) el total de mujeres es 112, de éstas 95 no tienen educación universitaria, P=95/112=84.8%

* *La estatura de los hombres adultos de una ciudad tiene una distribución normal de media 1,70m y desviavión estándar 5cm. Qué probabilidad tiene un hombre adulto elegido al azar de esa ciudad de medir menos de 1,60m?*

Primero calculamos cuántas desviaciones estándar a la izquierda de la media está 1.60m.

$$1.60=1.70 - k*0.05$$
$$k=2$$

Los que miden menos de 1.60m son los que están a la izquierda de la media menos 2 desviaciones estándar, esto (buscando en tablas) corresponde al (1-.9772) del área total bajo la campana de Gauss, la probabilidad es del 2.28%.

U.B.A. Fac.de Cs. Exactas y Naturales.Dpto. de Matemática
Ciudad Universitaria-Pab. I
(1428) Ciudad de Buenos Aires
gfernand@dm.uba.ar
(*) D.G.I.D.E.
Ministerio de Cultura y Educación de la Nación