Un nuevo enfoque de la noción de límite

Omar R. Faure, Roberto A. Macías

1. Introducción

Los profesores de cálculo tienen en la ensañanza de la noción de límite una de las pruebas más rigurosas de su capacidad docente. La experiencia muestra que no sólo es difícil lograr una primera comprensión de la definición sino que llegar a una relativa confianza en su empleo lleva todo el curso y conseguir una comprensión cabal de esta idea lleva varios años a los aprendices de cálculo.

La definición clásica del límite de una función, como puede ser encontrada en un libro matemáticamente correcto y no pretencioso como puede ser el *Calculus* de S. Salas y E. Hille [3], dice:

Límite de una función: Sea f una función definida al menos en algún conjunto de la forma $(c-p,c)\cup(c,c+p)$ entonces

$$\lim_{x\to c} f(x) = \ell$$

si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-c| < \delta$ entonces $|f(x)-\ell| < \epsilon$.

Indiscutiblemente esto es un verdadero galimatías para una persona que recibe esta información por primera vez.

El propósito de este trabajo es poner a disposición de los profesores un método eficiente para la transmisión del concepto de límite. Esta idea no es un resultado original sino que es debida a R. Redheffer [2] y apareció publicada en el Mathematics Magazine en 1989.

Los presentes autores experimentaron esta modalidad durante los años 2003 y 2004. En estos ensayos se evidenció que los alumnos fueron capaces de realizar cálculos rápidamente y se sintieron cómodos con el concepto en pocas semanas. En contraposición, el resultado usual de impartir la definición clásica es que aún los alumnos destacados, que consiguen dominar el concepto, presenten grandes dificultades para ordenar sus ideas como para expresar en forma escrita sus conclusiones.

Con la utilización de esta nueva manera de presentar límite la demostración de resultados abstractos se simplifica muchísimo. En cuanto al cálculo directo de límites, se logra mayor simplificación cuando se procuran resultados negativos, cuando el límite existe, aunque las cuentas son parecidas a las del esquema clásico, el nuevo enfoque produce un ordenamiento de las ideas muy clarificador.

2. Límite

Definición 1. *Diremos que una condición C se cumple para "x* ***cerca de*** *b" si existe un $\delta > 0$ tal que C se cumple para los x tales que*

$$0 < |x - b| < \delta.$$

Observemos que decir que la condición C se cumple cerca de b, es equivalente a decir que podemos encontrar un δ positivo de manera que C se verifica para todos los x distintos de b que están a una distancia de b menor que δ.

FIGURA 1

Definición 2. *Diremos que* $\lim_{x\to b} f(x) = \ell$ *si para cualquier $\epsilon > 0$, la condición:*

$$|f(x) - \ell| < \epsilon,$$

se cumple para x cerca de b.

Notemos que para la existencia de $\lim_{x\to b} f(x)$ no hace falta que f esté definida en b y, aún cuando f esté definida en ese punto, el valor de $f(b)$ no tiene relevancia para el cálculo del límite.

Ejemplo 3. *Sea* $f(x) = x + 3$ *y* $b = 7$. *Demostrar que*

$$\lim_{x\to 7} f(x) = 10.$$

Consideremos un $\epsilon > 0$ *dado, se tiene la siguiente cadena de equivalencias*

$$\begin{aligned} |f(x) - 10| < \epsilon \quad &\iff \quad |x + 3 - 10| < \epsilon \\ &\iff \quad |x - 7| < \epsilon. \end{aligned}$$

Entonces, si tomamos

$$\delta = \epsilon,$$

para todo x *que verifique* $0 < |x - 7| < \delta$ *se cumple que*

$$|f(x) - 10| < \epsilon.$$

Es decir la condición $|f(x) - 10| < \epsilon$ *se cumple cerca de* 7.

Esta situación puede ilustrarse gráficamente considerando dos rectas numéricas paralelas. En una representamos la variable independiente x y en la otra la función $f(x)$.

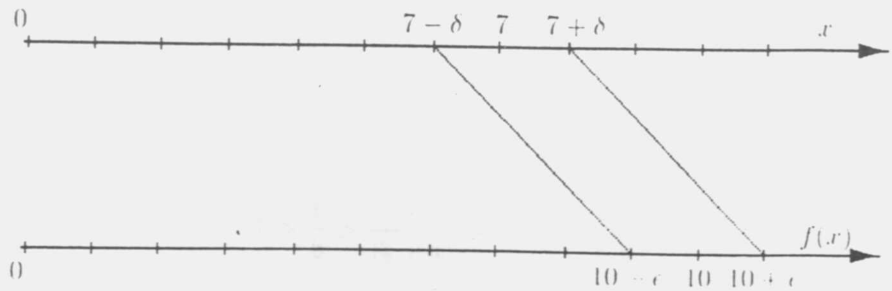

FIGURA 2

Ejemplo 4. *Sea $f(x) = 2 - 4x$ y $b = 3$. Veamos que*

$$\lim_{x \to 3} f(x) = -10.$$

Consideremos $\epsilon > 0$ dado, se tiene

$$\begin{aligned} |f(x) - (-10)| < \epsilon &\iff |2 - 4x + 10| < \epsilon \\ &\iff |-4x + 12| < \epsilon \\ &\iff |-4(x-3)| < \epsilon \\ &\iff |x - 3| < \epsilon/4 \end{aligned}$$

Entonces si tomamos $\delta = \epsilon/4$ la condición $|f(x) - (-10)| < \epsilon$ se cumple cerca de 3.

Ejemplo 5. *Sea f la función definida por*

$$f(x) = \frac{1}{x+3}$$

y sea $b = 7$. Veamos que $\lim_{x \to 7} f(x) = 1/10$.

Sea $\epsilon > 0$ dado, entonces se tiene

$$\left| f(x) - \frac{1}{10} \right| = \left| \frac{1}{x+3} - \frac{1}{10} \right| < \epsilon \iff \left| \frac{10 - (x+3)}{10\,(x+3)} \right| < \epsilon \iff \frac{|7 - x|}{|x+3|} < 10\epsilon. \tag{1}$$

Para $x > 5$ se tiene

$$0 < \frac{1}{x+3} < \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{1}{|x+3|} < \frac{1}{8} < 1.$$

Tomemos $\delta = 10\epsilon$, entonces para $x > 5$ y $0 < |x - 7| < \delta$ tenemos

$$\frac{|x-7|}{|x+3|} < \frac{\delta}{|x+3|} < \delta = 10\epsilon,$$

entonces, como suponer que x está a una distancia menor que 2 de 7 asegura que $x > 5$, tomando $\delta = \min\{10\epsilon, 2\}$ y usando (1) estamos seguros de que

$$\left| f(x) - \frac{1}{10} \right| < \epsilon,$$

para x cerca de 7.

Ejemplo 6. *Consideremos la función* $\operatorname{signo}(x) = x/|x|$, *definida para todo $x \neq 0$. Mostremos que no existe ningún ℓ tal que* $\lim_{x\to 0} \operatorname{signo}(x) = \ell$. *Efectivamente, si suponemos que un tal ℓ existe se sigue que dado ϵ positivo, para x cerca de 0 debe ser*

$$\left| \frac{x}{|x|} - \ell \right| < \epsilon.$$

Para $x > 0$, cerca de 0, se tiene $|1-\ell| < \epsilon$ y para $x < 0$,cerca de 0, $|-1-\ell| < \epsilon$. Por lo tanto

$$2 = |(-1) - 1| = |(-1) - \ell + \ell - 1| < |-1-\ell| + |\ell - 1| < 2\epsilon.$$

Basta con tomar cualquier $\epsilon < 1$ para obtener un absurdo.

Ejemplo 7. *Sea f la función definida por*

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0, \\ 1 - x & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

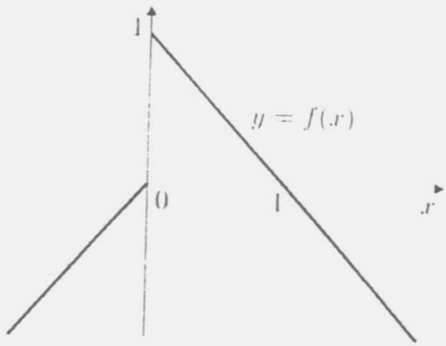

FIGURA 3

Supongamos que $\lim_{x\to 0} f(x) = \ell$. *Es decir, dado cualquier* ϵ *positivo, la condición*

$$|f(x) - \ell| < \epsilon \text{ se verifica cerca de } 0.$$

Tomemos $x < 0$ *cerca de* 0 *y también* $0 < y < \frac{1}{4}$ *cerca de* 0. *Entonces*

$$|f(x) - \ell| = |x - \ell| < \epsilon \quad y \quad |f(y) - \ell| = |1 - y - \ell| < \epsilon.$$

Por lo tanto con esa elección de x *e* y *tenemos*

$$\frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4} < 1 - y - x \le |(1 - y) - x| \le |(1 - y) - \ell| + |\ell - x| < 2\epsilon.$$

Esto contradice que sea posible elegir cualquier valor de ϵ *positivo.*

Para entender el significado de la definición de límite es importante analizar sus consecuencias. A continuación vemos como la noción de cercanía nos permite presentar en forma clara algunas de las propiedades más útiles del límite.

Necesitamos primeramente introducir el concepto de acotación.

Definición 8. *Diremos que* $f(x)$ *es acotada en un conjunto* E *si para algún* M *se verifica* $|f(x)| \le M$ *para todo* x *en* E.

Proposición 9. *Si* $\lim_{x\to b} f(x) = \ell$, *entonces* $f(x)$ *es acotada para* x *cerca de* b.

Prueba. Consideremos $\epsilon = 1$ en la Definición 2. Utilizando la desigualdad triangular tenemos

$$|f(x)| = |f(x) - \ell + \ell| \leq |\ell| + |f(x) - \ell|$$

y de la Definición 2 se deduce $|f(x)| \leq |\ell| + \epsilon$, para x cerca de b. Entonces

$$|f(x)| \leq |\ell| + 1 = M,$$

para x cerca de b. $\square$

En el caso en que $\ell \neq 0$ vale una acotación análoga para el recíproco de $f(x)$, esto es

Proposición 10. *Si* $\lim_{x \to b} f(x) = \ell \neq 0$, *entonces* $\dfrac{1}{f(x)}$ *es acotada cerca de* b.

Prueba. Consideremos $\epsilon = \dfrac{|\ell|}{2}$ en la Definición 2. Utilizando la desigualdad triangular tenemos

$$|f(x)| = |f(x) - \ell + \ell| \geq |\ell| - |f(x) - \ell|,$$

y de la Definición 2 resulta

$$|f(x)| \geq |\ell| - \epsilon = \frac{|\ell|}{2}.$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{|f(x)|} \leq \frac{2}{|\ell|} = M,$$

para x cerca de b. $\square$

Las mayores dificultades en la teoría de límite se presentan cuando se debe manejar en forma simultánea dos o más límites. Para tratar con estos casos el siguiente teorema es el resultado apropiado:

Teorema 11. *Si* $\mathcal{C}_1$ *y* $\mathcal{C}_2$ *se cumplen cada una cerca de* b, *la propiedad conjunta* $[\mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_2]$ *se verifica cerca de* b. *Es decir* $\mathcal{C}_1$ *y* $\mathcal{C}_2$ *se cumplen simultáneamente cerca de* b.

Prueba. Como $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ se cumplen cada una cerca de b, para $i = 1, 2$ existen $\delta_i > 0$ tales que cada condición $\mathcal{C}_i$ es cierta para todos los x que verifican

$$0 < |x - b| < \delta_i,$$

respectivamente. Tomemos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, entonces dado un $x \neq b$ con la propiedad $|x - b| < \delta$, es claro que también

$$0 < |x - b| < \delta_1 \quad \text{y} \quad 0 < |x - b| < \delta_2$$

entonces $[\mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_2]$ vale para ese x □.

Estamos en condiciones de verificar la unicidad del límite

Proposición 12. [Unicidad] Si

i) $\lim_{x \to b} f(x) = \ell_1$ y

ii) $\lim_{x \to b} f(x) = \ell_2$

entonces

$$\ell_1 = \ell_2.$$

Prueba. Por el teorema anterior *i)* y *ii)* se cumplen simultáneamente cerca de b. Entonces dado $\epsilon > 0$

$$|\ell_1 - \ell_2| \leq |\ell_1 - f(x)| + |f(x) - \ell_2| < 2\epsilon,$$

cerca de b. Como esto es válido para todo ϵ positivo, concluimos que $\ell_1 - \ell_2 = 0$. □

Proposición 13. *Si* $\lim_{x \to b} f(x) = \ell_1$ *y* $\lim_{x \to b} g(x) = \ell_2$

$$\lim_{x \to b} [f(x) + g(x)] = \ell_1 + \ell_2.$$

Prueba. Dado $\epsilon > 0$, tomemos $\epsilon/2$ en la Definición 2 para f y g. Por el Teorema 11, $\mathcal{C}_1 : \lim_{x\to b} f(x) = \ell_1$ y $\mathcal{C}_2 : \lim_{x\to b} g(x) = \ell_2$ se cumplen simultáneamente cerca de b entonces

$$\begin{aligned} |(f(x)+g(x)) - (\ell_1+\ell_2)| &\leq |f(x)-\ell_1| + |g(x)-\ell_2| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon, \end{aligned}$$

para x cerca de b. □

Ejemplo 14. $\lim_{x\to b} f(x) = \ell \iff \lim_{x\to b} (f(x) - \ell) = 0$.

Un caso especial de límite de un producto de funciones es cuando uno de los límites es cero, en ese caso no es necesario que el otro límite exista.

Proposición 15. *Si* $|f(x)| \leq M$ *cerca de* b *y* $\lim_{x\to b} g(x) = 0$ *entonces*

$$\lim_{x\to b} f(x)\, g(x) = 0.$$

Prueba. Sea $\epsilon > 0$, claramente podemos suponer $M \neq 0$. Usando el Teorema 11 y tomando ϵ/M en la Definición 2 de $\lim_{x\to b} g(x) = 0$, tenemos

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - 0| &= |f(x)g(x) - f(x)0| \\ &= |f(x)|\,|g(x) - 0| \\ &< M\frac{\epsilon}{M} \\ &= \epsilon, \end{aligned}$$

cerca de b. Esto prueba que $\lim_{x\to b} f(x)g(x) = 0$. □

La demostración de que el límite del producto es el producto de los límites es mucho más sencilla que con la definición clásica usando ϵ y δ.

Proposición 16. *Si* $\lim_{x\to b} f(x) = \ell_1$ *y* $\lim_{x\to b} g(x) = \ell_2$ *entonces*

$$\lim_{x\to b} f(x)g(x) = \ell_1\ell_2.$$

Prueba.

$$f(x)g(x) - \ell_1\ell_2 = (g(x) - \ell_2)\, f(x) + (f(x) - \ell_1)\, \ell_2,$$

por las Proposiciones 9 y 15 ambos términos tienden a cero, por lo que la suma tiende a cero. □

Corolario 17. *Si* α *es una constante, entonces* $\lim_{x\to b} (\alpha f(x)) = \alpha \lim_{x\to b} f(x)$

Corolario 18. *Si* P_n *es un polinomio de grado* n*, entonces* $\lim_{x\to b} P_n(x) = P_n(b)$.

Proposición 19. *Si* $\lim_{x\to b} f(x) = \ell \neq 0$ *entonces*

$$\lim_{x\to b} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\ell}.$$

Prueba. Por la Proposición 10, $\dfrac{1}{f(x)}$ está definida y es acotada cerca de b

$$\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\ell} = \frac{1}{f(x)\ell}\, (\ell - f(x))\,,$$

y por las Proposiciones 15 y 13, el miembro de la derecha tiende a cero. □

Teorema 20. [De la función intermedia] *Supongamos que* $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ *cerca de* x*. Además supongamos que*

$$\lim_{x\to b} f(x) = \ell = \lim_{x\to b} g(x)$$

entonces

$$\lim_{x\to b} h(x) = \ell.$$

Prueba. Por el Teorema 11 todas las condiciones de la hipótesis valen simultáneamente cerca de b. Dado $\epsilon > 0$ tenemos

$$-\epsilon < f(x) - \ell \leq h(x) - \ell \leq g(x) - \ell < \epsilon,$$

para x cerca de b. Por lo tanto

$$|h(x) - \ell| < \epsilon$$

cerca de b. $\square$

Proposición 21. *Si* $\lim_{x\to b} f(x) = \ell_1 \neq 0$ *y* $\lim_{x\to b} g(x) = 0$ *entonces*

$$\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)}$$

no existe.

Prueba. Supongamos que

$$\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell_2,$$

entonces

$$f(x) = \frac{f(x)}{g(x)} g(x)$$

que, por la Proposición 16 tiende a cero, contradiciendo la hipótesis $\ell_1 \neq 0$. $\square$

3. Límites Laterales

Terminamos este trabajo mostrando cómo se pueden presentar problemas de tipo lateral.

Definición 22. *Diremos que la condición* C *se cumple cerca de* b^+ *(cerca de* b^-*) si existe* $\delta > 0$ *tal que* C *se cumple para* $x > b$ *y* $|x - b| < \delta$ *(respectivamente para* $x < b$ *y* $|x - b| < \delta$*).*

Teorema 23. C *se cumple cerca de* b *si y solamente si* C *se cumple cerca de* b^+ *y cerca de* b^-*.*

Prueba. Si C se cumple cerca de b la implicación directa es trivial.

Para la recíproca consideremos δ_1 tal que C se cumple para

$$x > b \text{ y } |x - b| < \delta_1$$

y δ_2 tal que C se cumple para

$$x < b \text{ y } |x - b| < \delta_2.$$

Sea $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ entonces C se cumple para

$$|x - b| < \delta \text{ y } (x > b \text{ ó } x < b),$$

es decir para

$$|x - b| < \delta \text{ y } x \neq b.$$

□

Definición 24.

i) $\lim_{x \to b^-} f(x) = \ell$ *si dado* $\epsilon > 0$

$$|f(x) - \ell| < \epsilon$$

se cumple cerca de b^-. *Se dice entonces que el límite lateral izquierdo cuando* x *tiende a* b *de* $f(x)$ *es* ℓ.

ii) $\lim_{x \to b^+} f(x) = \ell$ *si dado* $\epsilon > 0$

$$|f(x) - \ell| < \epsilon$$

se cumple cerca de b^+. *En este caso se dice que el límite lateral dereccho cuando* x *tiende a* b *de* $f(x)$ *es* ℓ.

Proposición 25.

i) $\lim_{x\to b} f(x) = \ell$

si y solamente si

ii) $\lim_{x\to b^-} f(x) = \ell$ *y* $\lim_{x\to b^+} f(x) = \ell$.

Prueba. Que i) implica ii) es claro.

Veamos la recíproca. Si

$$|f(x) - \ell| < \epsilon$$

se cumple cerca de b^+ y cerca de b^-, por el Teorema 23 se cumple cerca de b.

Referencias.

[1] Edwards, C.H. Jr: *The Historical Development of the Calculus*, Springer Verlag, 1979.

[2] Redheffer, R.: *Some thoughts about limits.* Math. Mag. 62, Nro 3, pp. 176-184, 1989.

[3] Salas, S. y Hille, E.: *Calculus*, Tercera Edición, Editorial Reverté, 1999.

O.R. Faure. FIQ (UNL) y FRCU (UTN). Ing. Pereira 676. E3264BTD Concepción del Uruguay.

R.A. Macías. FIQ (UNL) e IMAL (CONICET). Güemes 3450. S3000GLN Santa Fe.