

APRENDIZAJE DIALÓGICO EN LA INVESTIGACIÓN COLABORATIVA

HELLE ALRØ Y OLE SKOVSMOSE

Con frecuencia, la clase tradicional de matemáticas se organiza de una manera muy rutinaria: el profesor presenta el contenido temático a partir del libro de texto e introduce un algoritmo antes de que los estudiantes resuelvan ejercicios. A continuación, los estudiantes trabajan en los ejercicios, ya sea individualmente, en parejas o en grupos; mientras tanto el profesor adopta el papel de consultor que atiende el trabajo de los estudiantes y controla sus resultados de acuerdo con el libro de respuestas. En esta estructura educativa hay una y solo una respuesta correcta a una pregunta matemática. Los ejercicios, la resolución de problemas y la corrección de errores son elementos centrales.

Este marco educativo parece producir un patrón bien conocido de comunicación en el aula. El profesor formula una pregunta, el estudiante responde y el profesor evalúa la respuesta. Como el profesor sabe, de antemano, la respuesta a su pregunta, el estudiante tiene que adivinar lo que el profesor piensa (cf. Young, 1992; Sinclair y Coulthard, 1975). Los estudios empíricos de la comunicación en la clase tradicional han mostrado graves consecuencias de este patrón de comunicación en la actividad del estudiante. Las respuestas de los estudiantes son mínimas: ellos responden con una pregunta, rechazan su propia respuesta, realizan conjeturas arbitrarias, piden otra explicación, hacen eco a la respuesta de otro estudiante, guardan silencio, se ocupan en otras cosas, etc. (cf. Lemke, 1990; Alrø, 1995).

Parece que los estudiantes dan respuestas instrumentales y asumen una responsabilidad mínima en ello. Por otra parte, tales patrones de comunicación pueden apoyar una forma de aprendizaje de las matemáticas, cuyo propósito es aprender lo que es correcto y lo que es incorrecto en términos matemáticos.

También son útiles para controlar lo que ya se sabe y, como bien lo saben profesor y estudiantes, pueden proporcionar seguridad y comodidad en el salón de clase. Así, parece que la calidad de la comunicación influye en la calidad del aprendizaje.

Una de las consecuencias más preocupantes del aula tradicional es la autoridad que se impone subrepticamente a través del libro de texto, el libro de respuestas y la comunicación entre profesor y estudiante, y que limita las posibilidades de los estudiantes de asumir responsabilidad, ser activos y apropiarse de su proceso de aprendizaje. Queremos cuestionar la organización del aula tradicional de matemáticas introduciendo escenarios de investigación como un marco que garantiza la cooperación indagativa y nuevas maneras de comunicarse en el aula.¹ Esto nos remite a la noción de *diálogo*.

Diálogo y aprendizaje

En el habla cotidiana, diálogo puede referirse a muchas cosas diferentes. Por ejemplo, al diálogo entre el este y el oeste, o al diálogo tedioso o largo en el acto final de una obra teatral. Aquí es nuestro deseo dotar la noción de diálogo con un significado más específico. Caracterizamos el diálogo como una forma de comunicación que requiere condiciones específicas: está asociada a un proceso de indagación, incluye toma de riesgos y mantiene la igualdad. Esta noción de diálogo establece el paso inicial de nuestra presentación en *Dialogue and Learning in Mathematics Education* (Alrø y Skovsmose, 2002). En tal libro desarrollamos nociones y perspectivas teóricas que permiten conectar diálogo y aprendizaje. Aquí tratamos de recapitular algunos asuntos de este desarrollo. Nuestro concepto de diálogo se inspira en diferentes autores, aunque no adherimos a ningún marco teórico específico como fundamento para nuestro estudio.²

Entendemos el diálogo como parte de un *proceso de indagación*, cuyo objetivo es obtener nuevas comprensiones. Durante este proceso, quienes están involucrados actúan hacia cada uno de los demás y hacia el tema en consideración con curiosidad, sentido crítico y ponderación reflexiva. Visto

¹ La noción de *escenario de investigación* se discute con detalle en Alrø y Skovsmose (2002). Véanse también Skovsmose (2002) y su traducción en el capítulo “Escenarios de investigación” de este libro.

² Este concepto de diálogo se desarrolla a partir de, e. g., Bohm (1996), Cissna y Andersson (1994), Freire (1972), Isaacs (1999), Kristiansen y Bloch-Poulsen (2000), Lindfors (1999), Rogers (1994) y Wells (1999).

así, el diálogo es diferente a la instrucción, la orden y la persuasión. Implica una inclinación de la voluntad a cuestionar nuestras comprensiones y pre-
comprensiones y a examinar lo nuevo y diferente, pero también el conoci-
miento ya adquirido. Entrar en un diálogo significa apropiarse del proceso de
investigación.

En este concepto, un diálogo no tiene una dirección predefinida. El re-
sultado no se puede predecir. Acontece en el espacio que hay entre lo cono-
cido y lo que se podría llegar a conocer. Esto quiere decir que no siempre se
sabe adónde conducen los caminos y qué se podría encontrar en la jornada. El
viaje tiene riesgos, y también un diálogo los tiene. En el lenguaje cotidiano, el
riesgo se asocia con connotaciones positivas y negativas como en la expresión
correr un riesgo. Se corre un riesgo al jugar... y se podría ganar. Se corre un
riesgo al atravesar la calle... y uno podría ser atropellado por un vehículo. Un
diálogo *incluye correr riesgos* en términos de impredecibilidad. Cuando se entra
en un diálogo, se pueden tocar asuntos que son delicados o no previstos; hay
un riesgo de perder el control o de llegar a un punto muerto. Pero, al mismo
tiempo, es posible abordar el propio conocimiento tácito o llegar a ver cosas
de maneras nuevas y diferentes. ¡Es posible aprender!

Un diálogo *mantiene la igualdad* al incluir respeto por la diversidad. Esto
no quiere decir que un diálogo presuponga semejanza o simetría. Estamos
hablando de igualdad interpersonal y respeto humano. En un diálogo no se
debería usar el poder o la fuerza, ni la persuasión del otro; tampoco se trata
de ganar. El propósito de un diálogo no debería estar definido o decidido por
una autoridad. Para ser productivo, se ha de desarrollar como un proceso diná-
mico entre compañeros pares que se comunican. Esto cuenta para un diálogo
en general, pero también para el que tiene lugar en un ambiente educativo.
Incluso cuando el profesor es la parte más concedora o competente del
diálogo, las conversaciones del aula pueden ser dialógicas. Los papeles pueden
ser diferentes y también pueden serlo, las competencias. Así, entendemos un
diálogo en términos de indagación, toma de riesgos e igualdad.

En lo que sigue, queremos mostrar lo que podrían significar tales cualida-
des dialógicas para las actividades que acaecen en un aula de matemáticas. Nos
referimos a un ejemplo en el que se invita a los estudiantes a un escenario de
investigación. No hay ejercicios prescritos que se deban resolver. El profesor
dispone la escena introduciendo un tema y algunas posiciones estratégicas
potenciales desde las cuales partir. Los estudiantes pueden elegir sus propios
caminos en el escenario de la investigación.

El proyecto *Batman*, un escenario de investigación

El proyecto *Batman* se realiza en un curso de grado décimo con estudiantes que rondan los dieciséis años.³ Se ha cambiado el horario para la semana en cuestión y los estudiantes tienen clase de matemáticas cada día entre las diez y las doce de la mañana. El profesor ha presentado un proyecto basado en la idea de que el grupo se convierte en una división de la bien conocida compañía norteamericana Run for Your Life, que produce toda clase de equipos para deporte. Cada día la división danesa recibe solicitudes y pedidos, y pronto el aula de clase se convierte en un recinto de producción, donde la materia prima (papel, lápiz, pegante, dibujos, etc.) y el ruido se mezclan con las escenas de una fábrica de actividad intensa. Por ejemplo, se van a producir balones para balompié y balonmano. Ellos están conformados por pentágonos y hexágonos. Pero, ¿cómo se construyen tales balones? Un balón de balompié es más grande que uno de balonmano; sin embargo, ¿tiene más piezas o solamente son más grandes las piezas? ¿Cuál podría ser la diferencia entre el tamaño de los hexágonos de los balones de balonmano para hombres, para mujeres y para los más jóvenes? La circunferencia de un balón de balonmano para mujeres debería ser de 56 centímetros, ¿cómo debería producirse un balón que tenga exactamente esta circunferencia?

Un día la división danesa de Run for Your Life recibe una solicitud de la compañía Batman & Co., interesada en raquetas de tenis de mesa. La compañía quiere hacer un pedido grande, pero la división danesa no tiene tales raquetas en el inventario. Debe importarlas. Esto se podría hacer más fácilmente desde Suecia, país con una larga tradición respecto al tenis de mesa y con una gran experiencia en producir raquetas de calidad internacional. La compañía sueca está lista para vender las raquetas a setenta coronas suecas cada una y ese precio parece razonable ya que Batman & Co. ha puesto un límite superior de 89 coronas danesas por cada raqueta.

Sin embargo, es necesario considerar otros asuntos. El seguro se estima en 1,5%. La tasa de cambio entre coronas danesas y suecas es de 82,14 (aunque de

³ Este proyecto se presentó en Alrø y Skovsmose (2002) y en Alrø, Skovsmose y Skåns-trøm (2000 y 2003). El grado décimo es el último año en la escuela obligatoria danesa. Después, los estudiantes pueden elegir continuar en diferentes direcciones dentro de las escuelas vocacionales. Pueden escoger entrar al gimnasio (estudio de tres años que prepara para la universidad). Algunos de los estudiantes miembros ya han dejado, desde el grado noveno, la escuela obligatoria y han tomado la ruta más directa hacia el gimnasio. El grado décimo puede ser útil para ayudar a que los estudiantes decidan qué hacer en su vida en adelante.

acuerdo con alguna otra información la tasa de cambio está a 81,29). El costo de la mano de obra es de 8%. Se espera que la ganancia para la división danesa sea de 25%. Finalmente, no se debe olvidar el impuesto al valor agregado de 25%. Así, puede ser que el negocio no sea tan fácil de realizar.

Mary y Adam se sientan frente a un computador y abren la hoja de cálculo Excel. Se concentran para sacar adelante el problema comercial, y pronto su mundo parece volverse más y más pequeño. El sonido del local de producción disminuye. Frente a ellos, la pantalla muestra la hoja de cálculo vacía, si bien, dispuesta adecuadamente, ella podría clarificar la situación.

Parece razonable comenzar por las setenta coronas suecas y desarrollar la hoja de cálculo sobre la base de tal cifra. Se tiene que agregar el seguro y el embarque de 1,5%. Después de algún examen colaborativo, Mary y Adam llegan a la fórmula $B4 = B3 * 1,015$. Entonces es necesario convertir coronas suecas en coronas danesas. Mary se sorprende de que la tasa de cambio sea tan baja. Se deben considerar muchos más elementos; pero, paso a paso, ellos llegan a las formulaciones que se muestran en la tabla 1.

Tabla 1

Modelo "útil" de Mary y Adam

	A	B	C
	Se podría usar	(fórmula)	(valor)
1			
2			
3	Precio en moneda extranjera	70	70
4	Seguro y embarque	=B3*1,015	71,05
5	Tasa de cambio	81,29	81,29
6	Total en coronas danesas	=B4*B5/100	57,756545
7	Mano de obra 8%	=B6*1,08	62,377069
8	Ganancia en %	25	25
9	Total	=B7+B7*B8/100	77,97133575
10	Impuesto al valor agregado 25%	=B9*0,25	19,49283394
11	Precio total	=B9+B10	97,46416969

Estos cálculos muestran que es obvio que el negocio con Batman & Co. no va a ser posible. La compañía está dispuesta a pagar 89 coronas danesas por cada raqueta, pero los cálculos muestran que las raquetas solo se pueden ofrecer por 97,50 coronas danesas cada una. O ¿cuánto exactamente? ¿Se debería pedir un precio de 97,50 coronas danesas o de 97,4641... coronas danesas cuando se tuviera un pedido grande? ¿Cuántos decimales es efectivamente importante considerar cuando se trata de un negocio grande?

Estas consideraciones acerca del número de decimales no preocupan a Mary y Adam, pero el profesor las tiene en mente cuando pasa cerca de ellos mientras están a punto de completar su hoja de cálculo. El trabajo de Mary y Adam se ha concentrado en el problema, y ahora se disponen a experimentar. Se debe hacer algo respecto a la diferencia entre la oferta límite propuesta por Batman & Co., de 89 coronas danesas, y el precio calculado de 97,50 coronas danesas determinadas por el precio del proveedor sueco. Mary y Adam se sienten desconcertados por la pregunta del profesor acerca del número de decimales, y esta parte de la conversación concluye con el énfasis que el profesor hace de que él mismo no sabe cuántos decimales se deberían considerar en un negocio como este.

Se podría realizar alguna experimentación con la hoja de cálculo. ¿Quizá reducir la ganancia esperada? ¿Negociar los precios con el proveedor sueco? Tal vez la tasa de cambio podría cambiar —pero, ¿en qué medida se necesitaría que cambiara para obtener un impacto significativo en el resultado?—. Parece poco realista esperar un cambio significativo ya que Dinamarca y Suecia son miembros de la Unión Europea. Probablemente es mejor buscar una oferta de un país diferente, por ejemplo, Brasil. En ese caso, podría tener sentido incluso esperar una reducción mayor de la moneda brasileña. A lo mejor, también podría ser más fácil hacer negocios con compañías de Brasil. Pero, entonces, los costos de embarque crecerían ciertamente. Hay muchas posibilidades para considerar.

El profesor introduce, sin embargo, una posibilidad diferente. De alguna manera, se podría poner la hoja de cálculo “patas arriba”. Esto significaría comenzar con el precio de venta de las raquetas, las 89 coronas danesas, y teniendo esta cifra como base, calcular lo que se podría ofrecer al proveedor sueco. Además, sería fácil ajustar la hoja de cálculo a las diferentes situaciones, dependiendo de si el proveedor se encuentra en Suecia, Noruega o Brasil. Toma algún tiempo que Mary y Adam capten la idea, pero después de alguna consideración y clarificación están listos para enfrentar el reto. Comienzan construyendo la hoja de cálculo a la inversa.

No es fácil comenzar. El sentido común no parece operar de una manera directa. Si la hoja de cálculo se organizara en la forma inversa, el primer paso sería quitar el impuesto al valor agregado ya que el último paso en la hoja original era sumar el impuesto al valor agregado. Lógicamente, si se comienza por restar el impuesto al valor agregado, ¿cómo se podría mostrar esto en la hoja de cálculo? ¿Algo como $B2 = B1 - 0,25$?

Pero esta formulación no promete mucho. Aunque el impuesto al valor agregado tiene que sustraerse, ¿podría la fórmula que expresa esto contener algo con multiplicación? O, ¿podría ser algo con división? Mary sugiere que sería posible dividir por 1,25, pero esta sugerencia no se examina después.

Con gran dificultad, Mary y Adam se las arreglan para organizar una expresión que contiene los siguientes elementos de cálculo:

$$B2 = B1 - 0,25B1$$

$$B3 = B2 - 0,25B2$$

$$B4 = B3 - 0,08B3$$

Sin embargo, han escrito todo esto junto en la misma celda de la hoja de cálculo. El profesor cae en la cuenta y observa que Mary y Adam están propensos a tener problemas con el conjunto de fórmulas que están construyendo. Naturalmente, el profesor podría optar por dejar que los estudiantes terminaran de preparar la hoja de cálculo de manera que experimentaran con los números. Entonces ellos estarían más cercanos a percatarse de la necesidad de reconsiderar su arreglo. Esto podría llegar a ser una experiencia importante para llevar a cabo la reconstrucción. Sin embargo, hay otros asuntos en la agenda. El mismo día, la clase está programada para ir a una excursión, y el autobús partirá a mediodía. Tiene sentido que el profesor trate de poner a Mary y Adam en la “ruta correcta” rápidamente.

El profesor decide interrumpir, pero Mary y Adam no están particularmente interesados en que se les interrumpa otra vez. Las cosas son ya suficientemente difíciles. Mejor evitar que el profesor produzca problemas mayores. Cuando el profesor se sienta cerca de ellos, Mary se medio voltea hacia él. El profesor quiere que ellos reconsideren el punto de que aunque el impuesto agrega un 25%, el porcentaje que tiene que sustraerse para quitar el valor del impuesto no es de 25%, sino de 20%. El profesor respalda su argumento con un ejemplo. Si algo cuesta cuarenta coronas danesas y se agrega un impuesto de 25%, entonces el precio resultante sería de cincuenta coronas danesas. No obstante, si tenemos que quitar el impuesto de diez coronas danesas de estas cincuenta, es preciso quitar un 20%. Después de algunas explicaciones, Mary y Adam entienden la razón. También captan la idea del cálculo:

$$0,25/(1 + 0,25) = 25/125 = 20\%$$

Así como la de:

$$0,08/(1 + 0,08) = 8/1,08 = 0,074$$

De hecho, podrían estar preparados para captar la idea general de que el *porcentaje inverso* correspondiente a x se puede calcular como:

$$x/(1 + x)$$

Ahora puede comenzar una construcción trabajable de la hoja de cálculo a la inversa. Mary se ha volteado, y hombro a hombro Mary y Adam encuentran su manera de hacer nuevas secuencias de cálculos. El profesor entra a la sala de producción, y Mary y Adam comparten su concentración. La hoja de cálculo a la que han llegado es como la que se muestra en la tabla 2.

Tabla 2

Modelo “Genialidad pura” de Mary y Adam

	A	B	C
1	Genialidad pura	(fórmula)	(valor)
2			
3	Precio máximo	89	
4	Impuesto al valor agregado	=B3*0,2	17,8
5	Total	=B3-B4	71,2
6	Ganancia	=B5*0,2	14,24
7	Total	=B5-B6	56,96
8	Mano de obra	=B7*8/100	4,219259
9	Total	=B7-B8	52,74074
10	Tasa de cambio	81,29	81,29
11	Moneda extranjera	=B9/B10*100	64,87974
12	Seguro y embarque	=B11*1,5/101,5	0,958814
13	Precio máximo en moneda extranjera	=B11-B12	63,92093

Ha terminado el juego. Todo el mundo está feliz. Mary y Adam aplauden como si hubieran hecho una jugada decisiva en un partido de voleibol. En la parte superior de la hoja de cálculo han escrito “Genialidad pura”. El profesor sonríe y confirma que han hecho un trabajo excelente. El autobús está esperando —y, con suerte, algún día alguien hará la oferta de 63,92 coronas danesas al proveedor sueco—.

El proceso de indagación de los estudiantes ha hallado su ruta gracias al escenario de investigación que el profesor introdujo. Los estudiantes aceptaron la invitación y se apropiaron de su proceso de aprendizaje. La mayor parte del tiempo se comprometieron en una indagación mutua que los sacó adelante. Pero, de vez en cuando quedaron atascados y se encontraron perdidos en el bosque. Afortunadamente, el profesor apareció y los cuestionó con el fin de que hallaran algunos otros caminos que seguir. Así, las actividades de indagar,

tomar riesgo y mantener la igualdad pueden estar apoyadas en un marco educativo, como lo es un escenario de investigación. Hay una gran cantidad de acción en marcha, y se puede observar como acción en la comunicación dentro del aula.

El modelo de cooperación indagativa

El proceso de indagación de los estudiantes se puede interpretar como aprender por medio del hablar y el hacer. Ellos cooperan mediante la acción y la reflexión y, mientras participan en el trabajo colaborativo, tienen que verbalizar lo que hacen y piensan. Ellos han reflexionado conjuntamente de manera explícita.

Según la teoría de los actos de habla, hablar significa actuar. Usar el lenguaje implica maneras de actuar en diferentes contextos (Austin, 1962; Searle, 1969). Esto aporta una nueva dimensión a la comprensión de la idea de significado que ahora se asocia con *uso* (y no primero que todo con *referencia*). Abre una nueva avenida en la filosofía del lenguaje y prepara para la teoría del discurso en sus muchas formulaciones. Para nosotros, la teoría de los actos de habla proporciona una conexión entre la comunicación y el aprendizaje, ya que ambos pueden ser vistos como acción.⁴ Además, el diálogo se puede considerar una forma de comunicación con ciertas cualidades que pueden caracterizar de manera particular el aprendizaje. Para expresar tales ideas de una manera más explícita introducimos la noción de *acto dialógico*.

Para nosotros, los actos dialógicos son formas particulares del acto de habla. Sus características: se realiza una indagación, se corre un riesgo y se mantiene la igualdad. Así que persuadir, ordenar, instruir, corregir, controlar, etc. son todos actos de habla, y ciertamente actos que se usan con mucha frecuencia en ambientes educativos, pero no son dialógicos. Todos los actos de habla pueden aportar aprendizaje. Los actos dialógicos proporcionan aprendizaje con cualidades dialógicas, y en este caso hablaremos de aprendizaje dialógico.

Un diálogo se construye con actos dialógicos. Sin embargo, un diálogo no es simplemente una “corriente de diálogo”, sino que puede iniciarse, desarrollarse y mantenerse mediante diferentes actos que tomados en conjunto constituyen el diálogo. Naturalmente, un diálogo es más que la suma de actos dialógicos particulares. Quizá sea más apropiado considerar tales

⁴ Para más detalles acerca del *aprendizaje como acción*, véase Alrø y Skovsmose (2002).

actos como unidades analíticas por medio de las cuales podemos observar elementos de un diálogo.

A partir de estudios anteriores, en los que observamos la comunicación entre profesor y estudiantes en un ambiente educativo de cooperación indagativa, hemos identificado la siguiente serie de actos dialógicos: entrar en contacto, localizar, identificar, defender, pensar en voz alta, reformular, controvertir y evaluar. Los hemos agrupado en lo que hemos llamado *modelo de cooperación indagativa* (modelo CI) (figura 1). La presencia de los componentes del modelo CI indica que hay diálogo.⁵



Figura 1. Modelo de cooperación indagativa

La cooperación indagativa entre Mary y Adam en el proyecto *Batman* fue rica en actos dialógicos, tanto cuando estuvieron trabajando por su cuenta como cuando fueron asesorados por el profesor. Nos referiremos a este ejemplo para desarrollar el modelo CI y el concepto de *aprendizaje dialógico*. En *Dialogue and Learning in Mathematics Education*⁹ hemos analizado cuidadosamente la conversación que muestra, a partir de las transcripciones, de qué manera surgen diferentes formas de diálogo. En lo que sigue no recapitulamos este análisis, pero ilustramos el uso de lo que consideramos ejemplos de actos dialógicos y de aprendizaje dialógico.

⁵ Véase Alrø y Skovsmose (1996a). El orden de los actos dialógicos es como lo representamos originalmente en el modelo CI. Naturalmente, este no es el orden en el que suponemos se observan los actos en un diálogo, y ciertamente no es el orden en el que encontramos los actos dialógicos en el proceso de indagación del proyecto *Batman*. Por consiguiente, en las siguientes enumeraciones e ilustraciones de los actos dialógicos, no seguimos el orden cronológico del proyecto.

Entrar en contacto

La siguiente secuencia tuvo lugar después de que el profesor hubiera sugerido a Mary y Adam hacer una hoja de cálculo a la inversa. Aunque esta sugerencia inicialmente se experimentó como una interrupción —incluida una interrupción del contacto—, pronto se transformó en un cuestionamiento que ellos aceptaron y el contacto se restableció:

- Adam: Entonces, tenemos que hacer una nueva.
- Profesor: ¿Quieren hacer eso?
- Mary: ¿Deberíamos tratar... No deberíamos entonces... Podríamos simplemente... No podríamos seguir y cambiar este...?
- Adam: Entonces podemos simplemente cambiar la tasa de cambio y...
- Mary: ...de manera que vayamos hacia arriba y digamos, que uno... que uno debería ser igual a... algo allí?
- Profesor: Ensayen, a ver.
- Mary: Sí, ¿deberíamos ensayarlo?

Entrar en contacto significa ponerse a tono cada uno con el otro. Significa estar presente y estar consciente de lo que está ocurriendo en la conversación y de las contribuciones de cada uno de los participantes. También significa establecer una relación positiva entre los compañeros del diálogo que los dispone para la cooperación. Durante la mayor parte del proceso, Mary y Adam se mantienen en contacto, les es posible mantener ese contacto durante toda la secuencia. El contacto se puede observar en sus preguntas de indagación, frases interrogativas y confirmación mutua —sin olvidar el sentido del humor y las risas—.

A veces ellos pierden contacto, como cuando no captan realmente la idea central de cierta propuesta o cuando tienen problemas respecto a los tecnicismos del computador y comienzan a discutir. Cuando el profesor interfiere con observaciones acerca del número de decimales, Mary experimenta esto como una interrupción, y la pérdida de contacto está marcada por su giro hacia atrás, hacia donde está el profesor. Él interrumpió antes de tener la sensación de lo que estaba preocupando a los estudiantes. Este es un ejemplo de falla relativa al acto dialógico de entrar en contacto. Sin embargo, el profesor se las arregló para restablecer el contacto y una evidencia de ello puede ser su primera observación en la que les confiesa que ni siquiera él mismo sabía cómo una compañía manejaría lo relacionado con un gran número de decimales al hacer negocios.

Luego el profesor presentó la idea de darle la vuelta a la hoja de cálculo. Esta sugerencia fue aceptada con duda y cuestionamiento, pero no se experimentó como una interrupción impertinente como ocurrió con los comentarios acerca del número de decimales. Mary y Adam captaron el reto y estuvieron prontos a ensayar. El contacto entre el profesor y los estudiantes se restableció. Posteriormente, Mary y Adam estaban listos para asumir el reto incorporado en su proceso de indagación. Se apropiaron otra vez del proceso. Entrar en contacto puede significar establecer un contrato de cooperación y de cierta apropiación. Esto fue lo que sucedió en la conversación, cuando el profesor dijo: “¿Quieren hacer eso?”, y Mary se apropió de la observación: “Sí, ¿deberíamos ensayarlo?”.

Entrar en contacto no ocurre solamente al inicio de un proceso de indagación, sino que está presente en todo su curso. Podríamos afirmar que entrar en contacto, mantenerlo y restablecerlo son actos dialógicos. Ellos pueden representar los aspectos más emocionales de un proceso de indagación. Entrar en contacto marca el interés en establecer un proceso de indagación como un proceso compartido. Señala una intención de cooperación, y expresa la naturaleza colectiva del proceso.

Localizar

Mary: No, luego escribes 70 [el precio original en coronas suecas], y luego es más la tasa de cambio, ¿no es así?

Adam: ¿Qué tal si se usa otra tasa de cambio y no 70 coronas?

Mary: Entonces llenas esa caja de allí más la tasa de cambio, ¿supongo?

Localizar hace referencia a hallar algo nuevo o algo de lo cual uno no era consciente. El profesor y los estudiantes pueden localizar perspectivas nuevas o existentes formulando preguntas de indagación, es decir, preguntas que expresan sorpresa o incredulidad. Las preguntas de indagación no tienen de ninguna manera una respuesta directa o simple. Localizar en cooperación alude a expresar y hacer visibles algunas perspectivas que podrían no haber aflorado en la conversación. Localizar es explorar y ensayar posibilidades; considerar con especial atención un tema en lugar de rechazarlo. También podría significar, por ejemplo, explorar un algoritmo o una manera sugerida de lidiar con un problema, aunque la propuesta pudiera parecer inadecuada, inútil o, simplemente, “incorrecta”.

Las preguntas hipotéticas y las preguntas de la forma *qué tal si* pueden articular esta disposición a hacer descubrimientos. Mediante preguntas hipotéticas, el profesor puede invitar a los estudiantes a un escenario de investigación. Hemos observado muchos ejemplos en los que el profesor facilita los descubrimientos de los estudiantes mediante preguntas hipotéticas que los hacen dudar, explorar, ampliar y poner a prueba tales preguntas. Ese cuestionamiento mutuo posibilita la localización de nuevas perspectivas y la iluminación de las ya formuladas. Y, cuando los estudiantes mismos tratan de formular preguntas de la forma *qué tal si*, esto podría indicar que ellos mismos se están apropiando del proceso de investigación. Localizar se relaciona estrechamente con apropiarse.

Mary y Adam hacen un gran esfuerzo por localizar las perspectivas del otro. Ellos se cuestionan mucho uno al otro; esto aporta explicaciones preliminares, la puesta a prueba y la confirmación de conjeturas. Con frecuencia desconfían de sus propias propuestas; de todas maneras las investigan y llegan a un acuerdo acerca de la aceptación o rechazo. Se puede encontrar un ejemplo en sus comentarios sobre cómo operar con la conversión de las setenta coronas suecas en coronas danesas en la hoja de cálculo (tabla 1). ¿Podría ser que la tasa de cambio debiera sumarse? Esta era una posibilidad. Pero *¿qué tal si* se usara otra tasa de cambio y no 70 coronas? Un cambio de los números no produciría una diferencia al operar en la hoja de cálculo, pero la formulación *qué tal si*, de Adam, tuvo una función importante. Mary sugirió que los números tendrían que escribirse de la misma manera, pero agregó: “¿supongo?”, a fin de indicar que podría haber algo por aclarar. El proceso no había concluido, tenían que localizar más ideas.

Las preguntas hipotéticas pueden, sin embargo, tener muy diferentes funciones a las de solo estimular una exploración. Pueden ser irónicas o controladoras. Pueden establecer distancia o simplemente no ser pertinentes. La función del cuestionamiento hipotético (que es un acto de habla) depende del contexto en el que se use. Para funcionar como actos dialógicos, las preguntas hipotéticas deben expresar duda y ser abiertas.

Cuando un proceso de indagación es abierto se corre el riesgo de olvidar o pasar por alto los descubrimientos, quizá porque llega uno a concentrarse en ideas particulares. Esto ocurre, por ejemplo, cuando los estudiantes rechazan sugerencias sin argumentación, antes de haber realizado de manera adecuada la localización. Cuando se realiza trabajo en grupo en el aula, el profesor está presente en cada grupo solo durante un espacio de tiempo limitado; esto implica que no puede capturar todas las propuestas interesantes de los estudiantes,

simplemente porque no las ha oído. Por lo tanto, se corre el riesgo de que las perspectivas relevantes pasen desapercibidas por no estar localizadas.

Identificar

- Adam: ¿Qué debería decir? Debería decir... sí pero el IVA es 25.
 Mary: Sí, pero realmente esa es la cantidad total ¿de acuerdo? Tiene que ser menos 25. 89 menos 0,25 multiplicado [nc]⁶
 Profesor: ¿Cuál es el IVA de la cantidad total?
 Adam: Un cuarto.
 Mary: 25%.
 Adam: Un cuarto.

Al localizar perspectivas, llega a ser posible identificar el asunto de que se trata y hacerlo accesible a los participantes en la investigación. A veces los participantes pueden comentar algo y puede ser que reformulen ciertas propuestas y de esta manera comiencen a cristalizar una idea matemática particular.

Las preguntas de la forma *qué tal si* pueden preceder a preguntas de *por qué*. Mientras que una pregunta del tipo *qué tal si* en muchos casos puede estar relacionada con un proceso de localización, una pregunta de *por qué* puede estar relacionada con la identificación de ideas matemáticas. (Naturalmente, las preguntas que aluden a la razón de algo no tienen que incluir literalmente la expresión *por qué*.)

En el proyecto, el profesor apoyó a Mary y Adam en la identificación del principio para construir una hoja de cálculo a la inversa, haciéndoles una pregunta relacionada con el porcentaje del impuesto al valor agregado. Si agregar el impuesto implica agregar 25%, ¿qué podría significar sustraer el impuesto de valor agregado? ¿Qué preguntas son importantes para ayudar a cristalizar esta idea matemática? Este profesor comenzó el proceso usando la pregunta: “¿Cuál es el IVA de la cantidad total?”. Tanto Mary como Adam dieron las respuestas: “...25%” y “Un cuarto”. En la conversación siguiente el profesor empujó a Adam y a Mary para que identificaran la relación entre sustraer 20% del total y agregar el impuesto de 25% al costo.

Así como ocurre con las preguntas de la forma *qué tal si*, es importante que las preguntas de la forma *por qué* sean abiertas. Si no lo son, fácilmente se pueden interpretar como ejercicios de control, que ponen en peligro la apropiación del proceso por parte de los estudiantes. Las preguntas de la forma *por qué*

⁶ [nc] significa incomprensible en la cinta de audio.

también pueden frustrar la curiosidad de los estudiantes. Naturalmente, se pueden identificar no solo las ideas matemáticas, sino también las prioridades y las perspectivas globales.

Defender

La siguiente observación hecha por Mary ocurrió cuando ella y Adam comenzaron el proceso de organizar la hoja de cálculo a la inversa. Debía removerse el impuesto al valor agregado, y ellos luchaban para tratar de hallar cuál podría ser la operación inversa de *sumar el impuesto al valor agregado*. Parecía inmediato que esto debería implicar algo relacionado con sustracción. Sin embargo, Mary hizo la siguiente propuesta:

Mary: Sí, de otro modo tendríamos que decir dividido por 1,25, ¿bueno?

Un poco más tarde, Mary volvió a la idea que, sin embargo, fue anulada inmediatamente por Adam:

Mary: Entonces digamos... dividir

Adam: No, pero mira...

El aprendizaje requiere avanzar desde lo que uno ya sabe y es capaz de hacer. El aprendizaje conjunto supone establecer una relación intersubjetiva respecto a lo que ya se sabe. Esto incluye la conciencia de las perspectivas ya existentes en el asunto. Por consiguiente, es importante poder presentar puntos de vista y sugerencias para las investigaciones. Pueden ser ideas que simplemente brotan, pero las sugerencias también se pueden introducir con alguna suerte de justificación. A esto le apunta la defensa. Es posible defender una sugerencia por medio de una argumentación. Sin embargo, defender no significa tratar de convencer al otro de la propia opinión o sugerencia. Defender significa examinar las perspectivas propias, pero acaso también argumentar a favor de las ideas y propuestas del otro. El quid del acto de defender es tratar de determinar hasta dónde una sugerencia para la investigación puede hallar apoyo en “buenas razones”. La defensa puede considerarse una argumentación experimental o hipotética.

Mary sugirió cómo remover el valor del impuesto. Quizá, pensó ella, la operación podría ser la de dividir por 1,25. Esta parecía una sugerencia adecuada, pero Adam no estaba listo para considerarla. La primera vez que

Mary la propuso, él ni siquiera parecía estar atendiendo a lo que ella decía. La segunda vez que hizo la propuesta, la respuesta de Adam fue simplemente: “No, pero mira...”.

Mary no defendió su propuesta. Solamente indicó que podría haber buenas razones para considerar el punto de vista haciendo la sugerencia por segunda vez. Habría sido posible para ella explicar más a través de una defensa y Adam podría haber facilitado esto, si hubiera estado abierto a nuevas propuestas en ese momento. Él pudo haber invitado a una justificación posterior con preguntas como: ¿por qué piensas eso?, ¿deberíamos ensayarlo? Y juntos, podrían haber sostenido una defensa que se apoyara en tratar de hallar razones para dar sentido a dividir por 1,25. Mary podría haber insistido en una defensa posterior. Puesto que el diálogo es un proceso de indagación, es importante que aparezcan perspectivas disponibles en el proceso. La defensa es el combustible del proceso investigativo. Si Mary hubiera insistido en la defensa, todo el proceso habría tomado un rumbo distinto.

El hecho de que Adam no le pusiera atención a Mary se podría ver como una interrupción del diálogo. Se rompió la igualdad, ya que Adam se tomó el derecho de juzgar qué no era pertinente. Sin embargo, esto podría ser una sobresimplificación. Adam podría estar operando con otras ideas que requerían toda su atención. Esto se puede considerar también una preparación para aportar un insumo al proceso. Así que, el diálogo no debe considerarse una conversación que fluya continuamente. El diálogo, como un proceso de indagación, contiene también discontinuidades. Este es un ejemplo del riesgo que se corre en todo diálogo. Por ser abierto, hay un riesgo de que algunas ideas y propósitos interesantes se pierdan.

Pensar en voz alta

Al crear la primera hoja de cálculo (tabla 1), Mary y Adam trabajaron a su manera para sumar la ganancia y el impuesto. Con este paso, se completaría la hoja de cálculo:

- Adam: Entonces escribiste allí, que... cuánto es la ganancia en porcentaje, ¿cierto?
 Mary: Y entonces ¿tú escribiste 25%?
 Adam: Sí, exactamente, entonces tú escribes [5 segundos] en todo... y allí tú escribes igual a ...
 Mary: ... Ese, ¿cierto?
 Adam: ... Ese:
 Mary: Más la ganancia, ¿cierto?

Pensar en voz alta significa expresar los pensamientos, las ideas y las emociones incluidos en el proceso de indagación. Pensar en voz alta es una manera de hacer público lo que solamente se puede experimentar desde adentro. De esta manera, más elementos se transforman en recursos de investigación. Formular ideas impulsivas hace visible y accesible una perspectiva para la controversia o la amplificación colectivas. A veces las preguntas hipotéticas parecen provenir del pensar en voz alta y pueden funcionar como una invitación a una investigación posterior.

El pensamiento en voz alta llega a parecer un mensaje codificado, como en la secuencia que se ha citado. Aquí, Mary y Adam tienen que encontrar su manera de crear la hoja de cálculo, y pensar en voz alta es corto y codificado, pero esencial para asegurar la naturaleza colectiva del proceso de indagación y mantener el proceso en la ruta correcta.

Pensar en voz alta puede tomar formas diferentes. Naturalmente, puede operar en una forma verbalizada, pero si apenas atendemos lo que Mary y Adam dicen, nos percataremos solo de algunos elementos de su “pensar en voz alta”. Pensar en voz alta, en particular en matemáticas, también se puede expresar en bosquejos, diagramas, resúmenes o fórmulas, o como experimentos que se muestran en la pantalla. Tales actividades pueden estar acompañadas por observaciones como: “aquí” o “solo mire”, así que el pensar en voz alta no se registra adecuadamente mediante la grabadora de audio o transcripciones. Pensar en voz alta podría significar pensar en público y el actuar en público de los pensamientos se puede facilitar de muchas maneras diferentes. Esto es lo que estaba ocurriendo entre Mary y Adam, y es un acto dialógico importante.

Reformular

Adam: Bueno, podemos, pero entonces necesitamos escribir la fórmula o algo, ¿cierto?

Mary: ¿Se necesita escribir la fórmula y cambiarla?

Reformular significa repetir lo que se ha dicho, puede ser en un tono de voz algo diferente o agregando algo. Reformular puede ser lo mismo que parafrasear, lo que puede ayudar a concentrar la atención en algunas formulaciones clave. Parafrasear también permite confirmar lo que uno ha escuchado y ha sido dicho, y esta confirmación incluye, así mismo, una invitación para ampliar la idea. De esta manera, los participantes en el diálogo sustancian una comprensión mutua. Sin embargo, parafrasear, dependiendo del tono de voz,

puede indicar una diferencia de perspectiva. En este sentido, una reformulación podría agregar un signo de interrogación a lo que se ha parafraseado. Reformular es un elemento importante del *atender activamente*, en el que los participantes se escuchan uno al otro de manera cuidadosa y logran conjuntamente una comprensión compartida.⁷

Cuando Adam y Mary se enfrentaron por primera vez a la hoja de cálculo vacía, tenían algo que hacer. Podían “escribir la fórmula o algo”. Sí, podían hacer esto: “escribir la fórmula y cambiarla”. Mary reformuló la sugerencia de Adam y le agregó algo. Ambos participaron en el proceso. Tanto la formulación como la reformulación incluyen incertidumbre y cuestionamiento. Su incertidumbre era compartida. Compartir la incertidumbre es un potencial tan importante para el aprendizaje como compartir las conclusiones, los descubrimientos y las convicciones en un proceso de indagación.

La reformulación se puede iniciar con una pregunta de verificación para darse cuenta de si uno ha comprendido al otro adecuadamente. Un fenómeno muy conectado con la reformulación es *completar las formulaciones del otro*. Esto puede indicar que uno ha captado la perspectiva del otro, y que es capaz de pensar y razonar dentro de ella. Completar la formulación del otro llega a ser una indicación del hecho de que se comparten los pensamientos. Pero este elemento dialógico se puede transformar fácilmente en algo diferente: una reformulación acompañada de escepticismo en la expresión facial o una reformulación selectiva de lo que se ha dicho para precisar la propia comprensión y preferencias de quien reformula.⁸

Hay un aspecto emocional importante en el acto de reformular por cuanto indica que el oyente ha escuchado y encontrado pertinente lo que se ha dicho. Reformular puede incluir tanto aceptación de una perspectiva propuesta como una manera de mantener la responsabilidad colectiva. Así, *entrar en contacto* es un acto dialógico al que pueden seguir otros actos dialógicos que pueden asegurar *el estar en contacto*. Mary y Adam están en contacto durante la mayor parte del proceso, y el acto de reformular les ayuda a lograrlo.

⁷ Rogers y Farson (1969) han introducido el término *atención activa*. Lo importante es que atender se hace con un interés sincero desde la perspectiva del otro y no como una técnica manipulativa.

⁸ Kristiansen y Bloch-Poulsen (2000) y Kristiansen y Alrø (2002) explican esto último con la noción de autorreferencialidad, que es una condición básica de la comunicación humana. La autorreferencialidad significa que tendemos a “traducir” cosas nuevas y no familiares de otros a nuestros propios patrones de comprensión bien conocidos y a nuestras maneras de actuar. El diálogo, por otra parte, tiene que ver con reflejar la autorreferencialidad y tratar de mover un foco a partir de uno mismo hacia el otro y a lo que pasa entre las partes.

Controvertir

La controversia que define la parte principal del proyecto *Batman* fue planteada por el profesor al sugerir la posibilidad de volver al revés la hoja de cálculo.

Profesor: ¿Podrían... podrían hacer la hoja de cálculo de tal manera que escribieran en coronas danesas desde el principio... es decir, cuánto quieren pagar... Quiero decir, como volverla al revés?

Adam: ¿Lo que nos dice es... que queremos pagar esto?

Controvertir significa cuestionar el conocimiento ya establecido. Significa cuestionar supuestos que por el momento han sido aceptados sin discusión. Un supuesto o una conjetura defendidos se pueden controvertir mediante preguntas de la forma qué tal si. El profesor no usó una forma qué tal si cuando presentó por primera vez la idea de que la hoja de cálculo podría invertirse. La controversia que planteó era, matemáticamente hablando, poderosa, pero fue formulada de una manera cautelosa: “Podrían... podrían hacer la hoja de cálculo, de tal manera que...”.

Una controversia demasiado directa puede conducir a que un proceso de investigación se detenga. La controversia puede volverse también una confrontación, y ser tan dramática que no parezca haber alternativas posibles. Es importante recordar que la controversia, al ser parte de un diálogo, es un proceso continuo. Una controversia es una manera de evidenciar que hay *otras* posibilidades que esperan ser localizadas.

Una controversia puede ser exitosa solamente cuando se capta. En el ejemplo hemos observado que los estudiantes no querían captar inmediatamente la controversia planteada por el profesor. Pero también observamos que ocurrieron grandes cosas cuando Mary y Adam se dieron cuenta de que “poner patas arriba” la hoja de cálculo podría ser un paso emocionante de dar. Ellos se apropiaron del proceso y la controversia se transformó en punto crítico de sus investigaciones. Otros intentos de controversia probablemente se pasaron por alto, como fue el caso en que Mary sugirió división para resolver el problema de sustraer lo del impuesto en la hoja de cálculo invertida.

Evaluar

Mary: Bueno, ¿nos rendimos?

Adam: Sí, no, grabemos esto, ¿no?

Mary: Sí, es realmente interesante, hemos sido muy inteligentes, ¿no crees?

La evaluación tiene lugar de muchas maneras. Los errores se pueden corregir o criticar; puede haber realimentación negativa o positiva; se puede ofrecer buen consejo, apoyo incondicional, confirmación o crédito. En el ejemplo vimos cómo el profesor elogió el trabajo de los estudiantes, pero también percibimos que los estudiantes se apropiaron de la evaluación: “hemos sido muy inteligentes, ¿no crees?”, dijo Mary a Adam después de declarar que su hoja de cálculo a la inversa era “genialidad pura”. Ellos celebraron y afirmaron que este día realmente habían aprendido algo.

Aprendizaje dialógico

El aprendizaje no se puede observar directamente, tampoco la comunicación que tiene lugar en ambientes educativos. Así que, no podemos saber lo que Mary y Adam aprendieron realmente. Solo podemos oír que Mary afirma que ella, en verdad, aprendió algo, y podemos analizar la interacción entre el profesor y los estudiantes durante el proceso para dar una ojeada al proceso de aprendizaje de estos.

Hablamos acerca del aprendizaje dialógico cuando un proceso de enseñanza-aprendizaje incluye una rica variedad de actos dialógicos. Los actos dialógicos del modelo CI pueden ocurrir en diferentes conglomerados y combinaciones cuando el profesor y los estudiantes se involucran en una cooperación indagativa. Cuando ocurren parecen tener gran influencia en las posibilidades de que el profesor y los estudiantes produzcan juntos nuevas ideas.⁹ Así que el modelo CI es un indicador de aprendizaje dialógico. Sin embargo, dicho modelo no prescribe cómo apoyar el aprendizaje dialógico; indica cómo y cuándo los procesos de aprendizaje están basados en la indagación, el riesgo y la igualdad.

¿Se puede desarrollar más el modelo CI? Usar el proyecto *Batman* como ejemplo nos ha permitido describir los elementos del modelo CI original. Como lo hemos mostrado en la sección anterior, *entrar en contacto* se puede describir mediante el uso de nociones como poner a tono, tener cuidado, estar presente, apoyar, confirmar, usar el humor, formular preguntas de indagación y preguntas de confirmación. *Localizar* implica la posibilidad de solicitar que se indague, se dude, se amplíe, se formulen preguntas de examen y verificación y también que se exploren y ensayen estrategias o ideas, que incluyen formular

⁹ Véanse ejemplos en Alrø y Skovsmose (2002).

preguntas hipotéticas (que tal si). *Identificar* requiere formular preguntas de la forma por qué, explicar y cristalizar ideas matemáticas. *Defender* tiene que ver con examinar propuestas, ideas y asuntos poniendo en cuestionamiento ideas y perspectivas fijas a través de una reflexión colectiva. *Pensar en voz alta* se puede expresar en términos de preguntas hipotéticas, de verbalizar y de hacer público algo. *Reformular* se puede considerar como repetir, parafrasear, completar las verbalizaciones del otro y permanecer en contacto. *Controvertir*, en una investigación, crea la expectativa de la formulación de preguntas hipotéticas, de la consideración de alternativas y de la introducción de puntos críticos. *Evaluar* se encuentra en la expresión de crítica, realimentación constructiva, confirmación, elogio y apoyo incondicional. El modelo CI es dinámico. Podríamos imaginar fácilmente muchos otros actos dialógicos posibles de identificar. Podríamos también desarrollar mucho más el contenido de diferentes actos dialógicos. Sin embargo, lo que queremos puntualizar es que la noción de acto dialógico puede dar significado específico a la comunicación en una cooperación indagativa.

¿Qué tan frágil es la cooperación indagativa? Hemos observado elementos del modelo CI en la relación entre profesor y estudiantes, lo mismo que en la relación entre estudiantes, cuando las partes se involucran en un proceso de indagación. Los elementos no se presentan en un orden específico, pero están representados en diferentes conglomerados y combinaciones. Además, es importante darse cuenta de que los elementos del modelo ocurren con frecuencia en secuencias muy cortas. Rara vez están presentes en todo el curso de una conversación. El aprendizaje dialógico se puede interrumpir fácilmente por desacuerdos, perspectivas fijas, estrategias de persuasión, falta de controversia, evaluación rápida, cuestionamiento y otras cosas que son muy comunes en la conversación diaria, no menos en el aula de clase. Tal comunicación estuvo presente también en el proyecto *Batman*, especialmente cuando los estudiantes se atascaron en su trabajo. El aprendizaje dialógico es un proceso frágil.

¿Cómo se pueden apoyar los procesos dialógicos? Las condiciones de un aula tradicional no apoyan el aprendizaje dialógico. Esto no quiere decir que no haya aprendizaje en tal aula, pero las calidades del aprendizaje son diferentes. El aprendizaje dialógico ocurre posiblemente en escenarios de investigación que invitan a la indagación, permiten que se defina la libertad y se elijan diferentes caminos hacia una experiencia emocionante, pero se combinan también con el riesgo de perderse. Consideramos el uso de escenarios de investigación como una manera de enmarcar tales procesos de aprendizaje.

¿Por qué tratar de apoyar el aprendizaje dialógico? Esta pregunta nos conduce a las perspectivas básicas de la educación y el aprendizaje. El aprendizaje, especialmente el de las matemáticas, se puede organizar sobre el supuesto de que las matemáticas constituyen una forma de conocimiento que es valiosa en sí misma. En *Dialogue and Learning in Mathematics Education* nos referimos, sin embargo, a un cuestionamiento crítico. Esto surge de la observación de que las matemáticas en todas sus muchas formas no se pueden considerar una “bondad última”, sino una forma de conocimiento que puede operar en contextos muy diferentes y que necesita reflexión y crítica. D’Ambrosio (1994) ha hecho hincapié en que las “maravillas”, lo mismo que los “horrores” de la ciencia y la tecnología tienen que ver con los avances en matemáticas.

Esto lleva a la necesidad de una educación matemática, que no solamente trate de aportar competencia al operar con las nociones matemáticas, sino también competencia para reflexionar en lo que se puede hacer por medio de las matemáticas. Las reflexiones críticas sobre las matemáticas llegan a ser un elemento importante en el desarrollo de una *ciudadanía crítica*, y el aprendizaje dialógico, con sus cualidades de indagación y reflexión, es importante para apoyar tal aprendizaje crítico de las matemáticas.

Así que consideramos el aprendizaje dialógico, en particular en matemáticas, como necesario para el desarrollo de una posición crítica. Debemos recalcar que podría haber muchas razones para no desarrollar el aprendizaje dialógico en un contexto escolar. El profesor tiene una responsabilidad en relación con los estudiantes. Podría haber situaciones en las que tuviera que tomarse una decisión rápida, por ejemplo, cuando los estudiantes se burlan unos de otros. Podría haber situaciones que exigen instrucción y control. Podría haber muchas situaciones en las que el profesor tiene que romper el diálogo. Imagínense una conversación que se ha convertido en un diálogo entre el profesor y ciertos estudiantes acerca de un asunto específico que, sin embargo, pudiera involucrar solo a ese grupo particular. Como el profesor debe tener en cuenta el interés de todos los estudiantes, podría haber límites en relación con qué extensión es posible proseguir un diálogo particular. Por ello, no consideramos que la invitación a un escenario de investigación y al aprendizaje dialógico sea la respuesta a todo tipo de retos educativos; pero encontramos que este tipo de aprendizaje tiene ciertas cualidades, de las que debemos ser conscientes para cuestionar las rutinas y facilitar la investigación colaborativa.

Agradecimientos

Agradecemos a Mary y Adam (seudónimos), por proporcionar la oportunidad de escucharles su conversación, y a Mikael Skånström, por invitarnos a su salón de clase. Este estudio se llevó a cabo como parte de la investigación iniciada por el Centre for Research in Learning Mathematics, Dinamarca, y queremos agradecer a nuestros colegas Morten Blomhøj, Iben Maj Christiansen, Elin Emborg, Lena Lindenskov y Tine Wedege, por sus preocupaciones en relación con el desarrollo de todo nuestro estudio. Finalmente, queremos agradecer a Leone Burton, por sus comentarios muy útiles y sugerencias para mejorar el texto y por llevar a cabo una revisión cuidadosa del lenguaje. Una versión preliminar de este documento se presentó en la sexta Conferencia Griega en Educación Matemática e Informática en Educación, realizada en Volos, en 2003.