La ecuación pitagórica

Resumen

En este artículo se pretende encontrar todas las soluciones de la ecuación pitagórica a partir de un minucioso desarrollo y aplicando distintos teoremas que se demostrarán a lo largo de esta construcción.

Finalmente, dado un número cualquiera se podrán encontrar todos los pares de números naturales que formen con él una solución de la ecuación de Pitágoras.

Keywords: *Ecuación de Pitágoras, terna pitagórica y terna fundamental.*
MSC: *11D09*

1 Introducción

Es conocido que ya Euclides encontró las soluciones de la ecuación pitagórica $a^2 + b^2 = c^2$ por lo que el objetivo de este trabajo es encontrar estas soluciones de una forma distinta a la usada hasta el momento. Su comprensión ayudaría a comprender un poco mejor la estructura de los números enteros y su aplicación a otros problemas de distinta índole.

Empezamos el desarrollo de este trabajo demostrando algunos sencillos teoremas sobre números enteros que necesitaremos con posterioridad en nuestro desarrollo.

Indiquemos que cuando los griegos se referían a los números (enteros), lo hacían con respecto a lo que actualmente llamamos números naturales. Por lo tanto, cuando digamos número nos referiremos siempre a un número natural no nulo. Denotamos por $\mathcal{N}$ dicho conjunto.

Recordemos que un número entero es primo si es diferente de ± 1 y si sólo es divisible por sí mismo y por la unidad, y que si n es múltiplo de m, esta relación se puede escribir como $n = km$, $k \in \mathcal{N}$. Como caso particular, si n es par entonces, por ser múltiplo de 2, se puede escribir $n = 2k$, mientras que un número impar será de la forma $n = 2k + 1$.

Indicaremos por $MCD(m, n)$ el máximo común divisor de m y n, por lo que se dice que dos números m y n son primos entre sí si $MCD(m, n) = 1$.

Teorema 1 *Si n es un entero que no es múltiplo de 3, entonces $n^2 - 1$ es múltiplo de 3.*

Demostración. Si n no es múltiplo de 3, entonces n es un múltiplo de 3 más 1 o bien es un múltiplo de 3 más 2. Y entonces:

- Si $n = 3k + 1$, resultará que $n^2 - 1 = 9k^2 + 6k + 1 - 1 = 3(3k^2 + 2k)$ por lo que es múltiplo de 3.

- Si $n = 3k + 2$, entonces $n^2 - 1 = 9k^2 + 12k + 4 - 1 = 9k^2 + 12k + 3 = 3h$ por lo que es múltiplo de 3.

Teorema 2 *Si n es un número impar que no es múltiplo de 3, entonces $(n^2 - 1)/2$ es múltiplo de 12.*

Demostración. Si n es un número impar $n = 2k + 1$, entonces por lo que tanto $n+1 = 2(k+1)$ como $n-1 = 2k$, de donde se deduce que $(n+1)(n-1) = 4k(n+1)$ es múltiplo de 8 ya que k, ó $(k + 1)$ es par. Y por otra parte o bien $n + 1$ o bien $n - 1$ es múltiplo de 3 (por teorema 1). En consecuencia el producto de $n + 1$ por $n - 1$ es múltiplo de 24, por lo que $(n + 1)(n - 1)/2 = (n^2 - 1)/2$ es múltiplo de 12.

Teorema 3 *Si n es impar, entonces $n^2 = 4p + 1$ y también $n^2 = 8m + 1$.*

Demostración. Si n es impar, es $n = 2k + 1$ por lo que $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k + 1) + 1 = 4p + 1$.
Además, si k es par (impar), entonces $k + 1$ es impar (par), por lo que $n^2 = 4k(k + 1) + 1 = 8m + 1$.

Teorema 4 *Si m y n son primos entre sí, entonces $m^2 + n^2$ es coprimo con m^2 y con n^2.*

Demostración. Si m y n son primos entre sí, entonces m^2 y n^2 también lo son, es decir, $MCD(m^2, n^2) = 1$. Si m^2 y $m^2 + n^2$ no fueran primos entre sí, entonces $MCD(m^2, m^2 + n^2) = k \neq 1$, por lo que $m^2 = kp, m^2 + n^2 = kq$ de donde resultaría que $n^2 = k(q-p)$. Luego sería $MCD(m^2, n^2) = MCD(kp, k(q-p)) = kr$ en contra de lo supuesto.

2 La ecuación pitagórica

Recordemos que se llama ecuación diofántica a toda ecuación en varias variables cuyas soluciones son números enteros.

Ejemplo 1 *Un ejemplo sencillo de ecuación diofántica es la ecuación de tres variables enteras (naturales) $x + y = z$.*

Suponiendo conocido el valor de z, el problema consiste en hallar todos los pares de valores naturales cuya suma es z. Por ejemplo, si $z = 9$, entonces las soluciones son $(1, 8), (2, 7), (3, 6)$ y $(4, 5)$.

Un caso particular de ecuación diofántica lo constituyen las llamadas ecuaciones pitagóricas.

Definición 1 *Se llama ecuación pitagórica a toda ecuación diofántica de la forma $a^2 + b^2 = c^2$ donde a, b y c son números naturales.*

En este trabajo pretendemos encontrar todas las soluciones de esta ecuación.

Las posibles soluciones las escribiremos de la forma $(a, b; c)$ y en tal caso, decimos que $(a, b; c)$ forma una *terna pitagórica*, mientras que a y b forman un *par pitagórico*.

Evidentemente, $b \neq a$, pues en caso contrario sería $c = b\sqrt{2} \notin \mathcal{N}$.

No hay ninguna dificultad por tanto en suponer que $a < b$.

Decimos que la terna pitagórica $(a, b; c)$ es fundamental si a y b son primos entre sí.

Teorema 5 *Si $a > 0$, $a^2 + b^2 < (b+1)^2$ entonces no hay ningún entero $b' > b$ tal que (a, b') es un par pitagórico .*

Demostración. Si $a^2 + b^2 < (b+1)^2$ entonces se verifica que $a^2 + (b+1)^2 = (a^2 + b^2) + 2b + 1 < (b+1)^2 + 2b + 1 = (b+2)^2 - 2$, por lo que $a^2 + (b+1)^2 < (b+2)^2$ y así sucesivamente. Si $b < b'$, entonces $b + 1 \leq b'$, y por consiguiente $a^2 + b'^2 < (b'+1)^2$. De esto, para todo $b \geq b$ implica $a^2 + b'^2 = c^2 < (b'+1)^2$, de donde $c < b' + 1 \Rightarrow b' = c$, de esto $a^2 = 0$, absurdo.

Corolario 1 *Los enteros 1 y 2 no forman parte de ningún par pitagórico puesto que*

- $1^2 + b^2 < (b+1)^2$
- $2^2 + (2+h)^2 = 4 + 4 + 4h + h^2 = h^2 + 6h + 9 - (2h+1) < (h+3)^2$

Teorema 6 *En toda terna pitagórica se verifica que $b < a^2/2$*

Demostración. Si fuera $b \geq a^2/2$ entonces sería $a^2 \leq 2b$ por lo que $a^2 + b^2 \leq 2b + b^2 = (b+1)^2 - 1 < (b+1)^2$ y según el teorema anterior (5) no existe ningún entero $b' > b$ tal que $a^2 + b'^2 = c^2$.

Corolario 2 *El conjunto de pares de números enteros que forman ternas pitagóri con un determinado entero, es finito.*

Teorema 7 *Cualesquiera que sean a y b con $a < b$ que formen un par pitagórico, siempre es $c < b\sqrt{2}$.*

Demostración. Si $a < b$, entonces es $c^2 = a^2 + b^2 < b^2 + b^2$, es decir, $c < b\sqrt{2}$.

Corolario 3 *El número c verifica la relación $b + 1 \leq c < b\sqrt{2}$.*

Teorema 8 *Si a y b son primos entre sí y $(a, b; c)$ es una terna pitagórica, entonces c es primo con a y también con b.*

Demostración. Es el teorema 4.

Corolario 4 *Si a y b son primos entre sí, y $(a, b; c)$ es una terna pitagórica, entonces $(a, b; c)$ es una terna pitagórica fundamental.*

Teorema 9 *Si $(a, b; c)$ es una terna pitagórica, toda terna múltiplo de ésta es también solución de la ecuación pitagórica.*

Demostración. Si $(a, b; c)$ es una solución, entonces es $a^2 + b^2 = c^2$ por lo que $k^2(a^2 + b^2) = k^2c^2$ y esto significa que $(ka, kb; kc)$ también es solución.

Teorema 10 *Si $(a, b; c)$ es una terna pitagórica y a y b no son primos entre sí, entonces $(a, b; c)$ es múltiplo de una terna fundamental.*

Demostración. Si a y b no son primos entre sí, entonces $MCD(a, b) = k$ por lo que $a = km$ y $b = kn$. Como $a^2 + b^2 = c^2$, es $k^2(m^2 + n^2) = c^2$ y esto significa que (m, n) es un par fundamental por lo que hay un entero h tal que $c = kh$, es decir, $(a, b; c) = k(m, n; h)$.

En consecuencia, cuando intentemos hallar las soluciones de la ecuación pitagórica, no necesitaremos encontrar todas las posibles soluciones, sino tan solo aquéllas en las que a y b sean primos entre sí, pues cualquier otra solución será un múltiplo de ella.

Teorema 11 *En toda terna fundamental $(a, b; c)$, c siempre es impar.*

Demostración. Del teorema 12 se deduce que a y b no pueden ser ambos pares puesto que entonces sería $MCD(a, b) = 2k$ en contra de lo indicado.

Sea a impar. Si b también es impar, entonces es $a = 2n + 1$, $b = 2m + 1$, por lo que $a^2 + b^2 = 4n^2 + 4n + 1 + 4m^2 + 4m + 1 = 2(2(n^2 + m^2 + n + m) + 1) = 2(2k + 1) = 2h$ siendo h un número impar. Pero no hay ningún número entero $c = \sqrt{2h}$, por lo que ha de ser a impar y b par o al revés.

Teorema 12 *En toda terna fundamental $(a, b; c)$, al menos uno de a, b es múltipl de 3.*

Demostración. Según el teorema (1), si a y b no fueran múltiplos de 3, entonces es $a^2 = 3k + 1$ y $b^2 = 3k' + 1$, por lo que $a^2 + b^2 = 3k'' + 2$ y no hay ningún entero c tal que $c^2 = a^2 + b^2$, si lo hubiera, se obtendría que $2 - 1 = 3$.

Como consecuencia de los teoremas 9 y 12 resulta que en ninguna terna fundamental es c múltiplo de 3.

Teorema 13 *En toda terna fundamental $(a, b; c)$, a o bien b es múltiplo de 4.*

Demostración. Supongamos que a no es múltiplo de 3. Según el teorema anterior (12), b sí lo es.

Supongamos que b es impar. Entonces, según el teorema 2, es $b^2 = 8k + 1$ y $c^2 = 8m + 1$, por lo que $a^2 + 8k + 1 = 8m + 1$ y $a^2 = 8p$. Entonces a es múltiplo de 4 puesto que a es entero.

Si b es par pero no múltiplo de 4, entonces ha de ser $b = 3(2(2k + 1))$ por lo que $b^2 = 9 \cdot 4(4m + 1) = 32(4m + 1) + 4(4m + 1) = 8p + 4$. Como a debe ser impar, según el teorema 2 es $a^2 = 8n + 1$ lo cual es imposible pues entonces sería $(8n + 1) + (8p + 4) \neq 8k + 1$.

Por lo tanto, si a no es múltiplo de 4, entonces lo es b.

Corolario 5

1.- *Si a es primo, $a > 3$, entonces b es múltiplo de 12.*

2.- *Si a es primo, $a > 3$, entonces ha de ser $b = (a^2 - 1)/2$ y $c = b + 1$.*

Como consecuencia de lo expresado hasta el momento, todo entero $n \geq 3$ forma parte de por lo menos un par pitagórico . Y si a es primo, sólo hay una terna pitagórica que lo contiene.

3 Construcción de las ternas pitagóricas

Como todo entero puede ser descompuesto en un producto de dos enteros impares, de dos enteros pares o de uno par y otro impar, construiremos las soluciones de acuerdo a cada uno de los siguientes casos:

1. Si $a = (2k+1)(2n+1)$, entonces una solución es $b = |(2k+1)^2 - (2n+1)^2|/2$, de donde resulta que $c = ((2k+1)^2 + (2n+1)^2)/2$.

2. Si $a = 2m \cdot 2m' = 4k$, entonces la solución es $b = 4k^2 - 1$, por lo que $c = 4k^2 + 1$.

3. Si $a = 2k(2n+1)$, entonces la solución es $b = |k^2 - (2n+1)^2|$, de donde $c = k^2 + 2(2n+1)^2$.

Por lo tanto, para encontrar todas las ternas pitagóricas que un número "a" puede formar como soluciones de la ecuación pitagórica $a^2 + b^2 = c^2$, se descompone este número en todos los posibles productos de alguna de las formas anteriores teniendo en cuenta que al multiplicar dos números se les puede considerar generadores individualmente de parejas de una de las formas anteriores o también como el producto de uno de ellos por las parejas generadas por el otro.

De esta forma, un producto cualquiera $m \cdot n$ puede generar tres formas distintas de parejas (y por tanto de ternas) de cada una de las siguientes formas:

1. $m \cdot n$ es el producto de m por n, por lo que genera parejas de una de las formas descritas. Lo indicaremos en la forma $< m \cdot n >$

2. $m \cdot n$ es el m-múltiplo de n, por lo que hay que hallar las parejas generadas sólo por n y multiplicarlas por m. Las indicaremos en la forma $m < n >$

3. $m \cdot n$ es el n-múltiplo de m, por lo que debemos hallar las parejas generadas por m y multiplicarlas por n. Las indicaremos como $n < m >$

Como aplicación de lo expresado hasta el momento, resolveremos el siguiente ejercicio.

Ejemplo 2 *Encontrar todos los números que junto con el* 15 *son solución de la ecuación pitagórica.*

Es decir, hallar las soluciones de la ecuación $15^2 + b^2 = c^2$.

En este caso, el número 15 se puede descomponer de dos formas diferentes, las cuales a su vez generarán los pares correspondientes:

1. $15 = 15 \cdot 1$. El único par que genera es el $b =< 15 \cdot 1 >= (15^2 - 1^2)/2 = 112$, de donde $c = (15^2 + 1^2)/2 = 113$

2. $15 = 5 \cdot 3$. Hay tres pares diferentes:

   (a) $b =< 5 \cdot 3 >= (5^2 - 3^2)/2 = 8$

   (b) $b = 5 < 3 >= 5 \cdot 4 = 20$ (anteriormente se ha encontrado que 3 y 4 forman un par pitagórico)

   (c) $b = 3 < 5 >= 3 \cdot 12 = 36$ (igualmente, 12 y 5 forman par)

Por lo tanto, todas las soluciones con el entero 15 son:

$$(15, 112; 113) \qquad (15, 8; 17) \qquad (15, 20; 25) \qquad (15, 36; 39)$$

de las cuales solamente las dos primeras son fundamentales.

Departamento de Matemáticas. Universidad de Las Palmas de G.C. Campus de Tafira. 35017, Las Palmas de G.C.- SPAIN. email:sfalcon@dma.ulpgc.es