

El Teorema de Morley

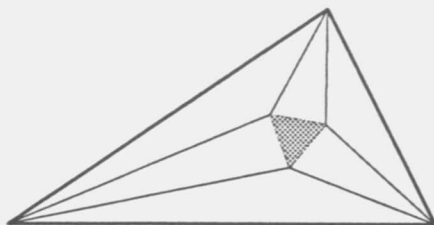
Parte II: La prueba de Alain Connes

Paulo Tirao

Este artículo es continuación de la primera parte que apareció en el número anterior de esta revista.

Comencemos recordando cual es el teorema que nos ocupa.

Teorema (Morley). *Los puntos de intersección de trisectrices adyacentes de los ángulos de un triángulo arbitrario son los vértices de un triángulo equilátero.*



El teorema de Morley

En la primera parte estudiamos el grupo de movimientos afines de la recta compleja con bastante detalle. Ahora estamos en condiciones de entender en profundidad la prueba del Teorema de Morley dada por Alain Connes en [2].

Esta parte es autocontenida; hemos incluido toda la notación necesaria. Por lo cual aquellos lectores ya familiarizados con las transformaciones rígidas del plano, los números complejos y los movimientos afines de la recta real y del plano y la noción de grupo no tienen necesidad de leer la primera parte.

Recordemos que el grupo de movimientos afines de la recta compleja es el conjunto de transformaciones

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} = \{T_{\lambda,p} : \lambda \neq 0, p \in \mathbb{C}\},$$

donde $T_{\lambda,p}(x) = \lambda x + p$, para todo $x \in \mathbb{C}$ y el producto es la composición de funciones. En particular tenemos que

$$T_{\lambda,p} \circ T_{\mu,q} = T_{\lambda\mu, \lambda q + p}. \quad (1)$$

Recordemos también que cada movimiento afín $T_{\lambda,p}$, con $\lambda \neq 1$, tiene un único punto fijo,

$$\text{fijo}(T_{\lambda,p}) = \frac{p}{1-\lambda}.$$

Consideremos ahora la función $\delta : \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}^*$ definida por

$$\delta(T_{\lambda,p}) = \lambda.$$

Con \mathbb{C}^* denotamos al grupo de los números complejos distintos de 0 (con la multiplicación). De (1) se sigue que

$$\delta(T_{\lambda,p}T_{\mu,q}) = \lambda\mu = \delta(T_{\lambda,p})\delta(T_{\mu,q}).$$

Es decir δ es un homomorfismo de grupos. El núcleo de δ (el conjunto de transformaciones que por δ van al 1) es $\delta^{-1}(1) = \{T_{\lambda,p} : \delta(T_{\lambda,p}) = 1\} = \{T_{\lambda,p} : \lambda = 1\}$, el grupo de traslaciones de $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$.

En general, dada $T_{\lambda,p}$, se dice que p es la parte de traslación de $T_{\lambda,p}$. En particular la identidad $\text{Id} = T_{1,0}$ es el único movimiento afín con $\delta(T) = 1$ y parte de traslación igual a 0.

1 Un resultado abstracto

Primero cabe recordar la siguiente proposición que caracteriza a los triángulos equiláteros del plano que probamos en la Parte I.

Proposición 1.1. *Sean $1, \alpha$ y α^2 las tres raíces cúbicas de la unidad. Tres puntos a, b, c en el plano son los vértices de un triángulo equilátero si y sólo si satisfacen $a + jb + j^2c = 0$, donde $j = \alpha$ ó $j = \alpha^2$.*

A continuación enunciamos y probamos la proposición principal. Esta proposición enuncia una verdad sobre el grupo de movimientos afines de la recta compleja. Esta propiedad abstracta de $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ implica el Teorema de Morley. La deducción del Teorema de Morley, a partir de esta proposición, es simple. Un hecho notable que hay que destacar es que de esta misma proposición obtendremos las generalizaciones del Teorema de Morley con la misma simpleza con la que obtendremos el teorema original.

Proposición 1.2. *Sean $T_1, T_2, T_3 \in \mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ tales que los productos T_1T_2, T_2T_3, T_3T_1 y $T_1T_2T_3$ no sean traslaciones y sea $j = \delta(T_1T_2T_3)$. Entonces, las siguientes 2 condiciones son equivalentes.*

$$(i) T_1^3 T_2^3 T_3^3 = \text{Id}.$$

$$(ii) j^3 = 1 \text{ y } a + jb + j^2c = 0, \text{ donde } a = \text{fijo}(T_1 T_2), b = \text{fijo}(T_2 T_3) \text{ y } c = \text{fijo}(T_3 T_1).$$

Demostración. Sean $T_i = T_{\lambda_i, p_i}$. La identidad $T_1^3 T_2^3 T_3^3 = \text{Id}$ es equivalente a $\delta(T_1^3 T_2^3 T_3^3) = 1$ y $q = 0$, si q es la parte de traslación de $T_1^3 T_2^3 T_3^3$. Como δ es un morfismo y \mathbb{C}^* es conmutativo,

$$\begin{aligned} \delta(T_1^3 T_2^3 T_3^3) &= \delta(T_1^3) \delta(T_2^3) \delta(T_3^3) \\ &= (\delta(T_1) \delta(T_2) \delta(T_3))^3 \\ &= \delta(T_1 T_2 T_3)^3 \\ &= j^3. \end{aligned}$$

Así $\delta(T_1^3 T_2^3 T_3^3) = 1$ es equivalente a $j^3 = 1$. Notamos que $j \neq 1$ por hipótesis.

Por otro lado, se sigue de (1) que $T_i^3 = T_{\lambda_i^3, \lambda_i^2 p_i + \lambda_i p_i + p_i}$ y luego que q es igual a

$$(\lambda_1^2 + \lambda_1 + 1)p_1 + \lambda_1^3(\lambda_2^2 + \lambda_2 + 1)p_2 + (\lambda_1 \lambda_2)^3(\lambda_3^2 + \lambda_3 + 1)p_3. \quad (2)$$

Podemos reescribir q como

$$-j\lambda_1^2 \lambda_2 (\lambda_1 - j)(\lambda_2 - j)(\lambda_3 - j)(a + jb + j^2c), \quad (3)$$

donde a , b y c son los puntos fijos

$$a = \frac{\lambda_1 p_2 + p_1}{1 - \lambda_1 \lambda_2}, \quad b = \frac{\lambda_2 p_3 + p_2}{1 - \lambda_2 \lambda_3}, \quad c = \frac{\lambda_3 p_1 + p_3}{1 - \lambda_3 \lambda_1}.$$

En efecto, como $j = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$, reescribimos $a = \frac{\lambda_3 a}{\lambda_3} = \frac{\lambda_1 \lambda_3 p_2 + \lambda_3 p_1}{\lambda_3 - j}$ y análogamente $b = \frac{\lambda_1 \lambda_2 p_3 + \lambda_1 p_2}{\lambda_1 - j}$ y $c = \frac{\lambda_2 \lambda_3 p_1 + \lambda_2 p_3}{\lambda_2 - j}$. Reemplazando en (3) a , b y c obtenemos una nueva expresión para q

$$\begin{aligned} &-j\lambda_1^2 \lambda_2 (\lambda_1 - j)(\lambda_2 - j)(\lambda_1 \lambda_3 p_2 + \lambda_3 p_1) \\ &\quad -j^2 \lambda_1^2 \lambda_2 (\lambda_2 - j)(\lambda_3 - j)(\lambda_1 \lambda_2 p_3 + \lambda_1 p_2) \\ &\quad -j^3 \lambda_1^2 \lambda_2 (\lambda_1 - j)(\lambda_3 - j)(\lambda_2 \lambda_3 p_1 + \lambda_2 p_3). \quad (4) \end{aligned}$$

La igualdad de las expresiones (2) y (3) se sigue comparando los coeficientes de p_1 , p_2 y p_3 en (2) y en (4) (que ya sabemos es igual a (3)).

Verificamos ahora la igualdad de los coeficientes de p_1 , dejando los otros casos al lector, ya que que se siguen de manera similar. Es claro que el coeficiente de p_1 en (4) es

$$-j\lambda_1^2\lambda_2\lambda_3(\lambda_1 - j)(\lambda_2 - j) - j^3\lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3(\lambda_1 - j)(\lambda_3 - j).$$

Luego de efectuar las multiplicaciones indicadas simplificamos la expresión resultante usando que $j = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$ y que $j^3 = 1$ a

$$\lambda_1^2 - j\lambda_1 - j^2\lambda_2 + 1,$$

que a su vez es igual a

$$\lambda_1^2 + \lambda_1 + 1,$$

pues $j^2 + j + 1 = 0$.

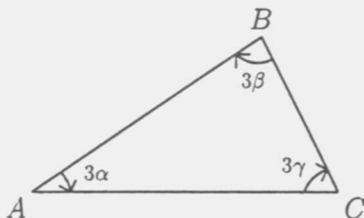
Podemos ahora completar la prueba de la proposición.

Por hipótesis T_1T_2 , T_2T_3 y T_3T_1 no son traslaciones, es decir, $\lambda_1\lambda_2 \neq 1$, $\lambda_2\lambda_3 \neq 1$ y $\lambda_3\lambda_1 \neq 1$ o equivalentemente $\lambda_3 - j \neq 0$, $\lambda_1 - j \neq 0$ y $\lambda_2 - j \neq 0$. Por lo tanto se sigue de (3) que $q = 0$ si y sólo si $a + jb + j^2c = 0$, como queríamos. \square

2 El Teorema de Morley

Demostración del Teorema de Morley.

Consideremos un triángulo arbitrario



y las siguientes transformaciones T_1 , T_2 y T_3 de \mathcal{A}_C :

- (i) T_1 la rotación con centro A y ángulo 2α ;
- (ii) T_2 la rotación con centro B y ángulo 2β ;
- (iii) T_3 la rotación con centro C y ángulo 2γ ;

Como T_1^3 es la rotación con centro A y ángulo 6α , podemos escribir

$$T_1^3 = S_{\overline{AC}}S_{\overline{AB}}$$

y análogamente

$$T_2^3 = S_{\overline{AB}}S_{\overline{BC}} \quad \text{y} \quad T_3^3 = S_{\overline{BC}}S_{\overline{AC}}.$$

Se sigue que $T_1^3T_2^3T_3^3 = S_{\overline{AC}}(S_{\overline{AB}}S_{\overline{AB}})(S_{\overline{BC}}S_{\overline{BC}})S_{\overline{AC}} = \text{id}$. Por otro lado, podemos descomponer a cada rotación T_i como producto de dos reflexiones, una respecto a un lado del triángulo y otra respecto a una trisectriz interior del triángulo, para luego concluir que

$$a = \text{fijo}(T_1T_2), \quad b = \text{fijo}(T_2T_3), \quad c = \text{fijo}(T_3T_1)$$

son los puntos de intersección de trisectrices adyacentes. De (i) \Rightarrow (ii) de la Proposición 1.2 se sigue que $a + jb + j^2c = 0$ y luego que el triángulo abc es equilátero, como queríamos probar. \square

2.1 Los 18 triángulos de Morley

Veamos ahora, cómo, de la prueba anterior (apenas modificada), obtenemos los restantes 17 triángulos equiláteros.

Notemos que podemos multiplicar cada una de las rotaciones T_i por una rotación de 120 ó 240 grados en sentido horario (y con el mismo centro) sin alterar los cubos T_i^3 y por lo tanto tampoco $T_1^3T_2^3T_3^3$. De esta manera no alteramos la afirmación (i) de la Proposición 1.2. Esta proposición dirá por lo tanto, cuando las hipótesis se satisfagan, que vale la segunda afirmación (ii). Es decir dirá que hay nuevos triángulos equiláteros. Como para cada T_i hay 3 elecciones posibles: T_i , R_iT_i y $R_i^2T_i$ (donde R_i es la rotación de 120 grados mencionada) resultan 27 ternas (T'_1, T'_2, T'_3) .

En cualquier caso las composiciones $T'_1T'_2$, $T'_2T'_1$ y $T'_3T'_1$ nunca son traslaciones (¿por qué?), por lo cual podemos considerar los puntos

$$a = \text{fijo}(T'_1T'_2), \quad b = \text{fijo}(T'_2T'_3), \quad c = \text{fijo}(T'_3T'_1).$$

Tenemos así 27 triángulos. Como dijimos, ahora la Proposición 1.2 nos permitirá decidir cuáles son equiláteros. Para poder aplicar ésta a una terna (T'_1, T'_2, T'_3) sólo falta verificar que $T'_1T'_2T'_3$ no es una traslación. El producto será una traslación cuando la suma de los ángulos de rotación de T'_1 , T'_2 y T'_3 sea igual a 0, 360, 720. . . . Esta suma es igual a $2\alpha + 2\beta + 2\gamma + \Theta$, donde Θ

es la suma de los ángulos de las nuevas rotaciones elegidas para construir T'_i a partir de T_i . Como $3\alpha + 3\beta + 3\gamma = 180$, resulta $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 120$, por lo tanto $T'_1T'_2T'_3$ será una traslación cuando Θ sea igual a 240, 600, ...

La siguiente tabla sirve para verificar lo anterior. Contiene las 27 ternas posibles anotadas según los ángulos agregados a los originales; así la terna (120, 0, 240) representa a $(R_1T_1, T_2, R_3^2T_3)$. Identificamos las ternas malas (aquellas donde la suma de sus coordenadas sea igual a 240, 600, ...) con una x y las buenas con un nombre que servirá luego para individualizar el correspondiente triángulo equilátero en los dibujos. Como se ve en la tabla, hay 9 ternas malas y 18 buenas que se corresponden con los 18 triángulos de Morley.

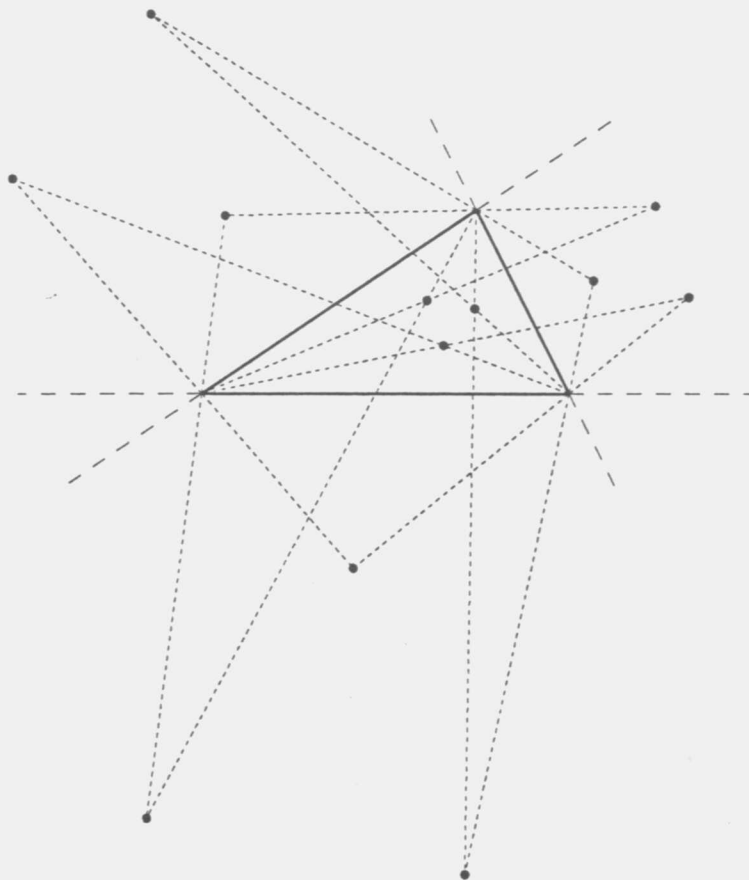
(0, 0, 0)	I	(120, 0, 0)	J_1	(240, 0, 0)	x
(0, 0, 120)	J_3	(120, 0, 120)	x	(240, 0, 120)	N_2
(0, 0, 240)	x	(120, 0, 240)	M_2	(240, 0, 240)	EI_2
(0, 120, 0)	J_2	(120, 120, 0)	x	(240, 120, 0)	N_3
(0, 120, 120)	x	(120, 120, 120)	Q	(240, 120, 120)	P_1
(0, 120, 240)	M_1	(120, 120, 240)	P_3	(240, 120, 240)	x
(0, 240, 0)	x	(120, 240, 0)	M_3	(240, 240, 0)	EI_3
(0, 240, 120)	N_1	(120, 240, 120)	P_2	(240, 240, 120)	x
(0, 240, 240)	EI_1	(120, 240, 240)	x	(240, 240, 240)	E

2.2 Construcción de los triángulos de Morley

La figura siguiente muestra al triángulo ABC y todas las trisectrices de sus ángulos interiores y exteriores. Asimismo están destacados algunos puntos de intersección entre ellas.

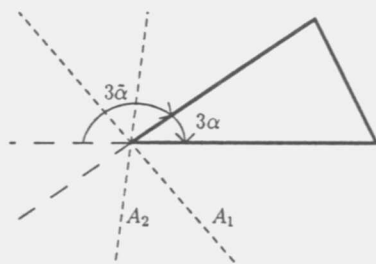
Comencemos con el triángulo I (correspondiente a la terna (0, 0, 0)) que, como ya vimos, se obtiene intersectando trisectrices interiores.

Para analizar los restantes casos supongamos primero que $T'_1 = R_1^2T_1$. El ángulo de rotación de T'_1 es, en este caso, $2\alpha + 240$. Todas las ternas con T'_1 son de la forma $(240, -, -)$. T'_1 se puede descomponer como el producto de dos reflexiones (en el orden adecuado) respecto de rectas que pasen por A y que formen un ángulo de $\alpha + 120$.



Trisectrices interiores y exteriores

Sea $3\tilde{\alpha}$ el ángulo exterior indicado en la figura. Como $3\alpha + 3\tilde{\alpha} = 180$, entonces $\alpha + \tilde{\alpha} = 60$ y luego $\alpha + 120 = \alpha + 2\alpha + 2\tilde{\alpha} = 3\alpha + 2\tilde{\alpha}$.



Por lo tanto

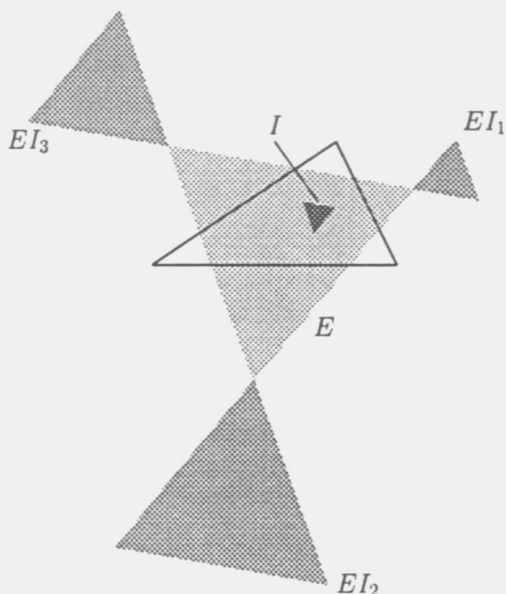
$$T_1' = S_{A_2} S_{\overline{AB}} = S_{\overline{AC}} S_{A_1}.$$

Análogamente para $T'_2 = R_2^2 T_2$ y $T'_3 = R_3^2 T_3$ tenemos

$$T'_2 = S_{B_2} S_{\overline{BC}} = S_{\overline{BA}} S_{B_1}$$

$$T'_3 = S_{C_2} S_{\overline{CA}} = S_{\overline{CB}} S_{C_1}$$

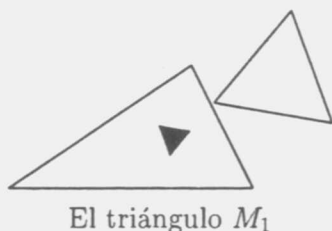
Ahora no resulta difícil determinar los triángulos correspondientes a ternas compuestas solamente por 0 y 240. En estos casos, los vértices a, b, c serán intersecciones de ciertas trisectrices interiores y/o exteriores (Figura 6). Por ejemplo, los vértices del triángulo correspondiente a $(240, 240, 240)$ son los puntos de intersección de trisectrices exteriores adyacentes. Los otros tres se obtienen combinando trisectrices interiores y exteriores. El siguiente dibujo muestra los 5 triángulos así obtenidos.



Algunos triángulos de Morley

Los triángulos correspondientes al resto de las ternas, aquellas con alguna coordenada igual a 120, se obtienen de igual forma, la única diferencia es que las rectas que intervienen para determinar los vértices de los correspondientes triángulos no serán las trisectrices que vemos (interiores o exteriores). Si $T'_1 = R_1 T_1$ las rectas involucradas serán aquellas que forman un ángulo de $\alpha + 60$ con los del triángulo (con vértice común A), pues el ángulo de rotación de T'_1 es $2\alpha + 120$.

Ejemplo 2.1. En la figura mostramos el triángulo M_1 correspondiente a la terna $(0, 120, 240)$. Dejamos como ejercicio para el lector, la construcción de las trisectrices necesarias para determinar sus vértices.



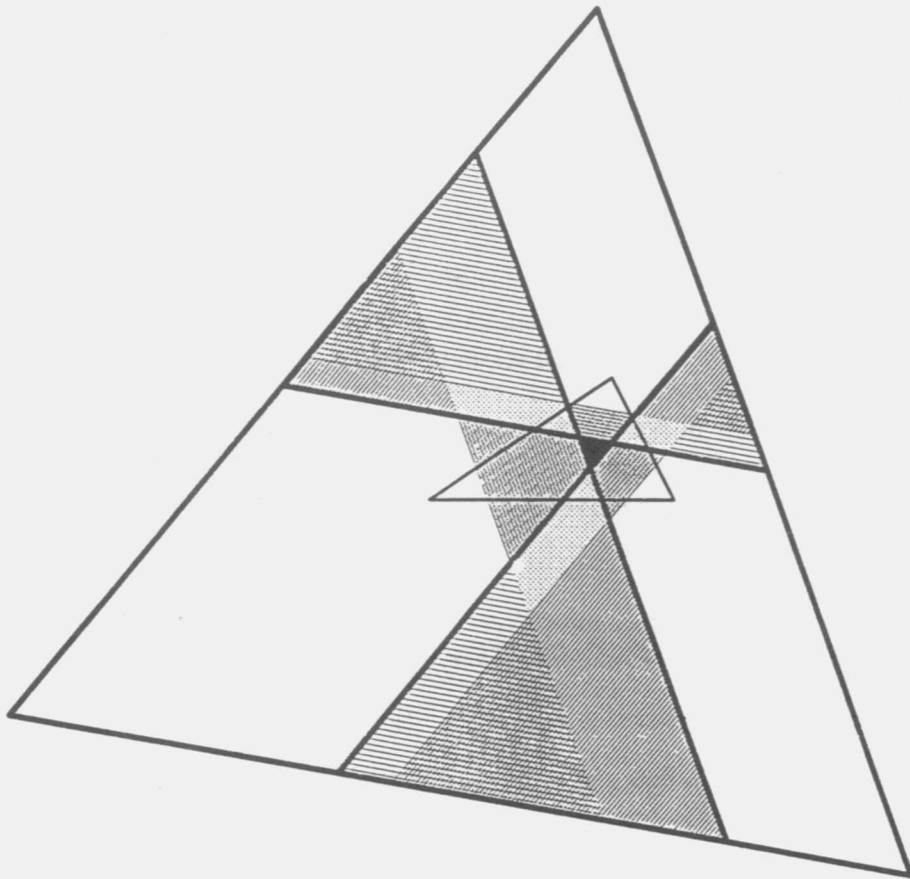
Para completar nuestro análisis sobre el teorema de Morley falta completar la construcción de algunos triángulos equiláteros. Recomendamos especialmente esta tarea, que dejamos al lector en los siguientes ejercicios.

Ejercicios 2.1.

1. Mostrar que los triángulos J_1 , J_2 y J_3 son los que aparecen contenidos en E y cuya intersección es I (ver Figura 10). ¿Cuál es cuál?
2. Construir los triángulos M_1 , M_2 y M_3 .
3. Identificar en la figura que sigue cada uno de los 18 triángulos de Morley, sabiendo que los triángulos de trazo grueso son P_1 , P_2 , P_3 y Q , siendo Q el más grande.

En la figura que sigue se distinguen 14 triángulos por su fondo o rayado. Además se ven 7 triángulos de trazo grueso y fondo blanco. De éstos, sólo los 4 con todos sus vértices sobre los lados del más grande son de Morley. Los restantes 3, que comparten un vértice con el triángulo I (de fondo negro) no son de Morley, es decir, no se corresponden a ninguna de las ternas de la tabla. Notamos, de todos modos, que son equiláteros.

Por último, destacamos el hecho, seguramente ya observado por el lector, que los 18 triángulos tienen sus lados paralelos a alguno de los lados del triángulo I .



Los 18 triángulos de Morley

Referencias

- [1] Baker C. y Oakley C., *The Morley trisector theorem*, Amer. Math. Monthly **85** (1978), 737-745.
- [2] Connes A., *A new proof of Morley's theorem*, I.H.É.S. - Les relations entre les mathématiques et la physique théorique. Festschrift for the 40th anniversary of the IHÉS (1998), 43-46.
- [3] Coxeter H.S.M. y Greitzer S.L., *Geometry Revisited*. Washington, DC: Math. Assoc. Amer. 1967 (pp 47-50).

CIEM - FA.M.A.F. UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA