CB-562

ANÁLISIS DE LAS DIFICULTADES DE ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS EN EL USO DE LETRAS EN ÁLGEBRA

Ivone Patagua, Florencia Alurralde, Mirta Velasques

ivonepatagua@gmail.com, florencialurralde@gmail.com, mirtavelasques@gmail.com

Consejo de Investigación de la Universidad Nacional de Salta (CIUNSA), Universidad Nacional de Salta, Argentina

Modalidad: CB

Nivel Educativo: 7 - No especificado (Universitario)

Núcleo temático: I. Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos.

Palabras clave: Álgebra, letras, APOE.

Resumen

Las dificultades que se presentan en el aprendizaje del Álgebra en los estudiantes de primer año de la universidad, lleva a una serie de interrogantes que dieron origen al presente trabajo, centrado en el uso de las letras en Álgebra específicamente en sistemas de ecuaciones lineales, utilizados como herramientas de modelización de problemas específicos de las ingenierías y otras áreas.

En este sentido, planteamos las cuestiones a tener en cuenta:

- *¿Cuál es la dificultad para hallar el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales? ¿Por qué es tan problemático el pasaje del lenguaje coloquial al simbólico?*
- *La concepción que el alumno tiene del uso de las letras, ¿De qué forma influye a la hora de dar la solución de un sistema de ecuaciones lineales?*

A partir de un análisis de las producciones de los estudiantes de primer año universitario que cursan la asignatura Álgebra, se intenta dar algunas respuestas a estos interrogantes teniendo como marco teórico Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas (APOE).

Introducción

Las letras en Álgebra pueden utilizarse de formas diferentes

- como “incógnitas” (cuyo valor puede determinarse con exactitud, considerando las restricciones propias del problema)
- como “número general” (cuando aparece en generalizaciones y en métodos generales)
- como “variable” (en una relación funcional, entendidas como objetos matemáticos desconocidos que se manipulan como si fueran conocidos)

ISBN 978-84-945722-3-4

- como parámetro (entendidos como objetos matemáticos conocidos, sean números, conjuntos, funciones, espacios vectoriales, figuras, matrices o cualquier otro objeto matemático, que se manipulan como si fueran desconocidos) (Janvier, 1996)

Surgen así algunos interrogantes a tener en cuenta:

- ¿Cuál es la dificultad para hallar el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales? ¿Por qué es tan problemático el pasaje del lenguaje coloquial al simbólico?
- La concepción que el alumno tiene del uso de las letras, ¿De qué forma influye a la hora de dar la solución de un sistema de ecuaciones lineales?

El concepto de variable es importante en la comprensión de cualquier rama de la Matemática y aparece inicialmente en los cursos de Álgebra de manera no explícita, cuando los alumnos se enfrentan con los procesos de generalización y de modelización.

El tema ecuaciones lineales y sistemas de ecuaciones lineales se comienza a estudiar en el nivel medio, sin embargo, se observa aún en el primer año de la universidad, muchos errores en su interpretación, resolución, obtención y expresión del conjunto solución. Para poder interpretar las dificultades detectadas en la producción de los estudiantes de primer año de la universidad en el tema sistema de ecuaciones lineales, se encontró en el Marco del Constructivismo, elementos que se utilizarán como sustento teóricos en el trabajo.

A partir de un análisis de las producciones de los estudiantes de primer año universitario que cursan la asignatura Álgebra, se intenta dar algunas respuestas a estas preguntas teniendo como marco teórico *Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas* (APOE).

Marco Teórico

La teoría APOE es una interpretación de la teoría constructivista que se basa en el concepto de abstracción reflexiva, introducido por Piaget, para describir el desarrollo del pensamiento lógico en los niños, y extiende la idea a nociones matemáticas más avanzadas.

El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder a las situaciones matemáticas problemáticas en un contexto social, y construyendo acciones, procesos y objetos y organizándolos en esquemas con el fin de manejar las situaciones y resolver los problemas. (Dubinsky - McDonald, 2001, p. 276).

La construcción de un concepto está asociada con las estructuras previas de un individuo y las ideas que pueda hacerse del objeto durante su experiencia con éste. A esto se llaman *asimilación*. (Piaget y García, 2004)

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

De esta manera, asimilar es equivalente a estructurar, y responde principalmente a la construcción de nuevos esquemas en función de los precedentes o acomodación de los anteriores. Por tanto, este marco teórico ayuda a los estudiantes construir estructuras apropiadas para cada nuevo concepto, estableciendo las conexiones adecuadas con las estructuras previas, denominadas *acciones*, *procesos*, *objetos* y *esquemas*.

Esta teoría señala que cuando un individuo inicia la construcción de un concepto matemático realiza transformaciones (acciones y procesos) sobre otros objetos construidos previamente, a fin de generar el nuevo objeto. (Dubinsky, 2005).

Para poder comprender el esquema de ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales, se detalla lo que en este trabajo se entenderá por interpretar y resolver algebraica y gráficamente una ecuación y sistema de ecuaciones.

Interpretar y resolver en el contexto algebraico, una ecuación, de manera general, requiere como requisitos: reconocer y emplear adecuadamente las propiedades del cuerpo ordenado de los números reales, hacer una correspondencia entre los Reales y la recta real,

comprender las letras como incógnitas, variables, parámetros y números generalizados, comprender nociones de conjuntos en R y operaciones (unión e intersección), graficar funciones lineales, leer e interpretar gráficos sin necesidad de sus expresiones algebraicas.

"Una **Acción** consiste en una transformación de un objeto que es percibida por el alumno como externa y se realiza como una reacción a sugerencias que proporcionan detalles de los pasos a seguir" (Alvarenga, 2003, p.202).

Por ejemplo resolver una ecuación siguiendo los pasos de resolución de otra ecuación similar, o hallar soluciones de una ecuación, sustituyendo valores y verificando si satisfacen la ecuación. Si un estudiante, frente a un concepto, se limita a realizar acciones, se dice que tiene una concepción acción de esa idea.

"Aunque una *concepción acción* sea muy limitada, la construcción de acciones es crucial al inicio de la comprensión de un concepto". (Asiala, Brown, Devries, Dubinsky, Mathews y Thomas, 1996).

Cuando una acción es repetida y el estudiante reflexiona sobre ella, entonces puede *interiorizar* esa acción en **Proceso.** Un aprendiz ejecuta un proceso cuando resuelve una ecuación sin imitar la forma de resolución de otra, puede describir los pasos necesarios para resolver una ecuación sin ejecutarla realmente, en cambio el que no posee un nivel de

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

concepción proceso de resolución de ecuación no puede ejecutar una acción en el conjunto solución sin antes haberlo determinado (De Vries, 2001)

El que posee una concepción proceso de ecuación, utiliza el conjunto solución para responder sin un determinado valor es solución o no de la ecuación, sin necesidad de sustituir ese valor en la ecuación para verificarlo.

Cuando un individuo reflexiona sobre acciones aplicadas a un proceso específico adquiere una conciencia de su totalidad, percibe que transformaciones (ya sean acciones o procesos) pueden actuar en él y es capaz realmente de reconstruirlas. Si se da tal caso, se dice que reconstruyó- o encapsuló- aquel proceso como un **Objeto** cognitivo. Así, un individuo está en un nivel de concepción objeto de una noción matemática cuando su comprensión de la idea es tan profunda que la trata como un objeto; además tiene la habilidad de ejecutar acciones en el objeto y también de desencapsular el objeto de vuelta al proceso que le dio origen cuando sea necesario. Un ejemplo de este tipo de concepción: un individuo capaz de pensar en una función como la suma de dos funciones, sin hacer referencias a ejemplos específicos, piensa en ella como un objeto (Alvarenga, 2003, p 203).

Un alumno capaz de analizar equivalencias entre ecuaciones o sistemas de ecuaciones, utilizando propiedades de los números reales tiene una concepción objeto de ecuación, es consciente del proceso como una totalidad, puede ejecutar acciones aplicando propiedades de los números reales y analizar las equivalencias.

Un esquema, para un cierto concepto matemático, abarca una colección individual de acciones, procesos y objetos, a la que se pueden agregar otros esquemas previamente construidos. Las diversas construcciones se encuentran conectadas, de manera consciente o no, en una estructura coherente en la mente del individuo, que puede ser considerada en un problema que implique al concepto en cuestión y su coherencia permite al individuo reconocer lo que se halla en el ámbito del esquema (Alvarenga, 2003, p. 203).

Se focalizará el análisis en los esquemas definido por Alvarenga, centrado en la producción de los alumnos en el tema sistema de ecuaciones lineales.

Aquel alumno que puede analizar equivalencias entre ecuaciones y obtiene el conjunto solución, demuestra coherencia para interpretar y resolver ecuaciones.

Dentro de las Dificultades se focalizará el análisis en las concepciones de error. El error es un objeto de estudio para la Educación Matemática. Socas considera necesario, tener

ISBN 978-84-945722-3-4

elementos de análisis de los errores, que caracteriza en tres grupos: 1º) los errores que tienen su origen en un obstáculo, 2º) los errores que tienen su origen en una ausencia de significado, 3º) los errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales.

Como ejemplo de 1º) el autor cita las dificultades que los niños tienen en álgebra con la naturaleza abstracta de los elementos utilizados, por ejemplo ven en expresiones algebraicas enunciados incompletos como en 7+x.

En el caso 2º) podemos nombrar a) errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética, por ejemplo errores en operaciones con fracciones, uso de paréntesis, potencias, etc.

b) errores de procedimientos: uso inapropiado de fórmulas o de algunas reglas de procedimientos.

c) errores de álgebra debidos a las características propias del lenguaje algebraico. Estos errores no tienen referencia a la aritmética .Ejemplo de ello son el sentido del signo "=" en su paso de la aritmética al álgebra, y la sustitución formal.

Objetivo

- Analizar el uso de las letras en Álgebra en la producción de los estudiantes de 1 año de la Universidad en el tema sistema de ecuaciones y su incidencia en la expresión del conjunto solución.

Desarrollo

En este trabajo se analizaron evaluaciones parciales de la asignatura Matemática 1 de la Facultad de Ciencias Exactas, correspondiente al primer año de las carreras Licenciatura y Profesorado en Química, Licenciatura en Bromatología y Analista Químico, focalizando en el tema sistemas de ecuaciones lineales. Se tomó una muestra de 30 evaluaciones sobre un total de 50.

En este sentido, se tiene sólo en cuenta el ejercicio relacionado al tema

Ejercicio N°3

Analice los valores del parámetro m para que el siguiente sistema tenga, de ser posible: Solución única, Infinitas Soluciones y Ninguna Solución. Exprese el conjunto solución sólo en el caso de infinitas soluciones.

$$\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = 1 \end{cases}$$

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Los temas involucrados en la evaluación corresponden a los temas: Matrices-Sistemas de ecuaciones- Método de resolución de SEL. Gauss

Para resolver el **Problema** los alumnos deben interpretar el enunciado y aplicar el método de resolución correcto.

Este ejercicio requiere el uso de las letras como variable y como parámetro. Se espera que los alumnos además de resolver correctamente el sistema, por el método de Gauss o por sustitución, sean capaces de determinar el valor que debe tomar el parámetro k para cada tipo de solución posible de un sistema de ecuaciones lineales. Para ello es necesario que identifiquen correctamente los tipos de solución que puede presentar un sistema y optar por los valores adecuados del parámetro k en cada caso de tipos de soluciones.

Categorías de análisis

Teniendo en cuenta el marco teórico APOE, y en base al trabajo de Alvarenga (2003), se elaboró específicamente cuatro categorías de análisis a priori para poder estudiar la producción de los estudiantes en el problema propuesto en la evaluación (Alurralde, 2013)

a) Selección de un método de resolución adecuado a las restricciones del problema implica la capacidad de elegir el método de acuerdo a las características del sistema, lo que supone el conocimiento de dichos métodos

b) Aplicación del método de resolución implica manipular las ecuaciones, donde las letras pueden ser parámetros o incógnitas o variables, cualquiera sea la operación involucrada, para establecer los valores que pueden dar la solución al problema

c) Identificación del tipo de solución de un sistema de ecuaciones a través del estudio del parámetro: Implica determinar el valor del parámetro para que se obtenga un tipo de solución específico: única (sistema compatible determinado), infinitas (sistema compatible indeterminado) o ninguna (sistema incompatible).

d) Expresión del conjunto solución: implica la capacidad de expresar el conjunto solución de un problema de manera clara y precisa, en su forma vectorial.

e) Verificación: Implica reemplazar los valores encontrados en la solución en el problema inicial, comprobando las igualdades.

Resultados del Análisis del Problema

ISBN 978-84-945722-3-4

- En cuanto a la selección y aplicación del método de resolución, el 90% de los estudiantes selecciona el método de Gauss, ante la advertencia del enunciado que solicita los tres tipos de solución en un sistema de ecuaciones. El 85% aplica el método correctamente.
- En relación a la identificación del tipo de solución, se observa dificultad en el 45% de los estudiantes cuando deben obtener el valor del parámetro para las distintas soluciones. El 55% lo hace correctamente, pero el resto comete errores que se acentúan en el valor del parámetro para que el sistema sea compatible indeterminado o no responden.
- En cuanto a la expresión del conjunto solución, es bajo el porcentaje de estudiantes que lo hacen bien, solo el 34%.
- En cuanto a la verificación, no hay alumnos que la realicen.

Conclusiones

El hecho que pocos estudiantes expresen en forma clara y correcta el conjunto solución, muestra la escasa o nula utilización del lenguaje conjuntista.

En el caso de sistema compatible determinado, o sea con única solución, el 70% lo hace correctamente, Cuando se pide que el sistema sea incompatible, es decir que no haya solución, el 80% responde bien. Del análisis anterior, pareciera que la mayor dificultad en los alumnos que cursan Álgebra, en cuanto al uso de las letras, se presenta cuando deben utilizar las letras como variables en relación funcional y cuando aparecen las variables libres. Los errores más frecuentes son los que corresponden a la segunda categoría de Socas, es decir los errores que tienen su origen en una ausencia de significado, ya sea por el uso inapropiado de fórmulas o reglas de procedimientos, o por errores propio del lenguaje algebraico, donde se muestran dificultades del paso de lo aritmético a lo algebraico en la sustitución formal, esto se manifiesta claramente en los porcentajes altos de errores cometido cuando la letra es una variable, sobre todo cuando se debe interpretar a la variable como libre, impidiendo a los estudiante poder expresar correctamente el conjunto de infinitas soluciones en los sistemas compatibles indeterminados. No diferencian la variable del parámetro k en la última ecuación escalonada, consideran k como una incógnita a despejar, confundiendo el rol de las letras, esto muestra que el estudiante no tiene claro el concepto de ecuaciones equivalentes que se van obteniendo al escalonar la matriz del sistema. Este error observado, no permite que el alumno resuelva e interprete el sistema de ecuaciones lineales planteado, de acuerdo a lo que significa interpretar y resolver en el marco APOE. Este tipo de error está catalogado según

ISBN 978-84-945722-3-4

Socas como los del 2º tipo donde hay ausencia de significado, específicamente en el uso de las letras como variables, lo que limita el nivel alcanzado por los estudiantes en este tema, logrando solo un nivel de **acción** en el tema sistema de ecuaciones con parámetros, según la Teoría APOE.

Se debe insistir, cuando se enseña el tema sistema de ecuaciones lineales, en el concepto de variable libre y en la manera de representar las infinitas soluciones de un sistema.

Referencias bibliográficas

Alurralde, F. (2013). *El uso de las letras en álgebra: Dificultades de los alumnos de primer año de ingeniería en la interpretación de soluciones de sistemas de ecuaciones lineales*. Tesis de Maestría no publicada, Universidad Nacional de Tucumán, Argentina.

Alvarenga, K. B. (2003). La Enseñanza de inecuaciones desde el punto de vista de la teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 6(3). 199-219.

Asiala, M., Brown, A., Devries, D. J, Dubinsky E., Mathews D. y Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *CBMS Issues in Mathematical Education*, 6, 1-32.

De Vries, D. (2001). RUMEC/APOS theory glossary. Recuperado el 01 de Marzo de 2013 de htpp:// www.cs.gsu.edu/ rumec/Papers/Glossary.html

Dubinsky, E. y M. Mc. Donald. (2001). The Teaching and Learning of Mathematics at University. APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics. En D. Holton (Ed.), *Education Research* (pp. 273-280). Nueva York: Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E, Welley K., Mc Donald M. y Brown A. (2005). Some Historial Issues and Paradoxes Regarding the concepto of Infinity: An Apos Analysis: Part 2. *Educational Studies in Mathematics*, 60(2), 253-266.

Janvier, C. (1996). Modeling and the initiation into algebra. En N. Bednarz, C. Rieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 225-236). The Netherlands: Kluwer.

Piaget, G. y García R. (2004). *Psicogénesis e Historia de la Ciencia*. México: Siglo XXI.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. En L. Rico (Coord.) *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 124-154). Barcelona: ICE/Horsori.

ISBN 978-84-945722-3-4