

UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DA PROBABILIDADE

Gabriel de Souza Pinheiro - Rossano Evaldt Steinmetz Ribeiro

gabrielpmatematica@gmail.com - evaldt.rossano@gmail.com

UNICNEC – Brasil

Núcleo temático: Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos.

Modalidad: CB

Nivel educativo: Terciario o Bachillerato (16 a 18 años)

Palabras clave: Probabilidade, Ensino Médio, Cenários para investigação, Jogos.

Resumen

Neste trabalho relata-se uma sequência didática para o ensino e aprendizagem de conceitos básicos de Probabilidade através de jogos. A atividade foi realizada com estudantes do primeiro ano do Ensino Médio Integrado do Instituto Federal do Rio Grande do Sul (IFRS) – campus Osório. A proposta teve como objetivo apresentar e analisar uma sequência didática para o ensino de conceitos de Probabilidade para o Ensino Médio com auxílio de jogos. O estudo faz parte do trabalho de conclusão do curso de Licenciatura em Matemática do primeiro autor. As atividades foram realizadas em quatro encontros e tiveram a participação de um grupo de quinze alunos. Foram utilizados diversos jogos, sendo alguns desenvolvidos ou adaptados pelos autores, e nos quais se possibilitou aos estudantes investigar alguns conceitos Matemáticos, em especial conceitos de Probabilidade. Para o referencial teórico metodológico utilizou-se a proposta de Cenários para Investigação apresentada por Skovsmose. Verificou-se que as atividades com os jogos proporcionaram aulas mais prazerosas e participativas, possibilitando uma experiência na qual os estudantes puderam ser protagonistas na construção dos conceitos de Probabilidade através das discussões e investigações propostas.

Introdução

Este artigo apresenta uma sequência didática para introduzir alguns conceitos de Probabilidade no Ensino Médio, como por exemplo, Lei dos Grandes Números, eventos equiprováveis e problemas clássicos da probabilidade. A proposta tem como objetivo apresentar uma metodologia para o ensino de Probabilidade com auxílio de jogos, e que possibilite ao aluno investigar a Matemática presente nas situações propostas tornando-os autônomos e capazes de formular respostas para problemas de Probabilidade.

Esta proposta busca uma forma de melhorar o ensino da Probabilidade nas escolas, e também apresenta uma sugestão de metodologia que pode ser utilizada em outros conteúdos. O referencial teórico e metodológico da proposta utiliza a ideia de Cenários para Investigação apresentada por Skovsmose (2008), e tem como finalidade tornar o aluno um investigador do seu próprio conhecimento e o professor um mediador do processo de ensino e aprendizagem.

A Probabilidade é um tema de grande importância na vida do aluno, pois proporciona uma visão de mundo diferente, visto que o pensamento probabilístico nos proporciona observar que muitos fenômenos naturais são aleatórios, como na Física, na Química e na Biologia, e é importante para o desenvolvimento do aluno compreender a aleatoriedade dos fenômenos. Este trabalho proporcionou uma experiência na qual os alunos foram protagonistas na construção dos conceitos através de investigações. Além disso, destacamos, também, o crescimento pessoal e acadêmico do autor do trabalho. Acreditamos que o presente artigo pode auxiliar outros professores no ensino e aprendizagem de Probabilidade.

Cenários para investigação

Atualmente as aulas de Matemática acontecem, na maioria dos casos, com o mesmo padrão. O professor apresenta o conteúdo no quadro com o auxílio de livros ou slides e expõe algumas técnicas Matemáticas, posteriormente os alunos resolvem listas de exercícios que, em grande parte, são longas com variações de um mesmo problema. Segundo Skovsmose (2008) a sala de aula é um ambiente democrático, e a Educação Matemática crítica inclui o interesse pelo desenvolvimento da Educação Matemática como suporte à democracia. Isso implica que a sala de aula, como micro-sociedade, também deve exercer e mostrar aspectos democráticos. A Matemática não é somente um conteúdo a ser ensinado e aprendido, mas sim, um conteúdo a ser debatido, pois a mesma faz parte da cultura tecnológica que nos rodeia.

Concordamos com o fato da sala de aula ser um ambiente de debate, embora saibamos que frequentemente a Matemática é vista como uma área exata, sem necessidade de debater um tema e chegar a algum conceito, porque muitos já estão estabelecidos. O debate e a democracia são essenciais no ambiente escolar, principalmente no sentido de ceder espaço ao aluno para que ele possa opinar sobre respostas, resoluções e problemas.

Para Skovsmose (2008), um cenário para investigação é um ambiente de aprendizagem que possibilita ao aluno e ao professor aprender e ensinar, com o auxílio de uma investigação em um determinado sistema, possibilitando ao aluno produzir significados aos conceitos. Conforme Skovsmose

As práticas de sala de aula baseadas num cenário para investigação diferem fortemente daquelas baseadas em exercício. A distinção entre elas pode ser combinada com uma distinção diferente, a que tem a ver com “referências” que visam levar os estudantes a produzirem significados para os conceitos e atividades Matemáticas. (Skovsmose, 2008, p21.)

O estudo sobre as referências mostra que através delas é possível que o aluno produza diferentes significados para as atividades. Nesse contexto, a suspeita de que há uma e somente uma resposta certa não faz mais sentido, como o autor descreve.

O professor tem o papel de orientar. Novas discussões baseadas em investigação surgem: Como calcular a área frontal de um ciclista? O problema agora é a montagem de modelos de “input-output”, o que torna importante refletir sobre os resultados dos cálculos. Eles são confiáveis? Consideramos fatores relevantes? Bem, podemos comparar com as estatísticas oficiais. Mas qual desses resultados é o correto? A reflexão crítica sobre a Matemática e modelagem Matemática ganha um novo significado. (Skovsmose, 2008, p30.)

Segundo Skovsmose (2008) a Educação Matemática deve permear diversos ambientes, não abandonando por completo as listas de exercícios das aulas de Matemática. Pois, para o

autor é importante, após um trabalho de investigação, utilizar exercícios para consolidar a compreensão do conteúdo.

Caracterização da proposta e relato das atividades

A sequência didática foi aplicada em forma de oficina, realizada durante quatro encontros de uma hora e vinte minutos, no segundo semestre de 2016, com um grupo de quinze alunos de primeiro ano do Ensino Médio, do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul (IFRS), no Campus Osório.

Optamos por alunos dos primeiros anos do Ensino Médio, por ainda não terem iniciado os estudos em Probabilidade no ambiente escolar, pois a oficina tinha como objetivo introduzir os estudos nessa área, como apresentar o conceito de Probabilidade, Lei dos Grandes Números, Eventos Equiprováveis e problemas clássicos desta disciplina. A coleta de dados e resultados foi realizada por meio de gravação de áudio, fotos e anotações feitas pelo professor e pelos alunos durante os encontros. A análise teve o intuito de compreender como ocorreu a absorção dos conceitos estudados na oficina. Por tais características essa pesquisa assume um caráter qualitativo, caracterizado em estudo de caso, conforme Lüdke e André:

O estudo de caso é o estudo de um caso, seja simples e específico [...] ou complexo e abstrato. O caso é sempre bem delimitado devendo ter contornos claramente definidos no desenrolar do estudo. O caso pode ser similar a outros, mas é ao tempo distinto, pois tem um interesse próprio, singular. (LÜDKE e ANDRÉ, 1986, p.17)

No primeiro encontro, após as apresentações entre o professor e os alunos, apresentamos a proposta, destacando quais eram os objetivos e a relevância da participação dos estudantes nas atividades. Aproveitamos esta aula para realizarmos um questionário com seis questões de Probabilidade, este mesmo questionário foi aplicado no último encontro de forma a servir de subsídio para uma comparação no desempenho dos alunos após a realização da oficina.

Iniciamos as atividades apresentando a Lei dos Grandes Números, pois acreditamos que ela possibilita uma melhor compreensão do conceito de Probabilidade. Para estudarmos esse tema foi escolhido o jogo “Corrida das moedas”, que consistia em o aluno lançar uma moeda quinze vezes e tomar nota dos resultados em uma tabela padrão disponibilizada pelo professor. Nesta tabela havia espaço para anotar o número de vezes que o aluno retirou “cara” e o número de vezes que retirou “coroa”, assim como frequência relativa e frequência absoluta, conceitos que também seriam trabalhados nessa atividade.

A partir desse jogo, discutimos o conceito da Lei dos Grandes Números. Também utilizamos essa atividade para introduzir o conceito de eventos equiprováveis. A partir dos resultados do jogo, observados nas tabelas individuais e na tabela contendo os resultados de todos os alunos, iniciamos o conceito da Lei dos Grandes Números e apresentamos o conceito fundamental para o estudo da Probabilidade, o mesmo nos diz que “quando o número de realizações de um experimento aleatório cresce muito, a frequência do sucesso associado vai se aproximando cada vez mais de um certo valor”. (Silva, 1999, p.67). Esta aula foi muito relevante para os alunos, pois o conteúdo estudado no primeiro encontro foi utilizado no restante da oficina, pois os conceitos apresentados são a base para os estudos da Probabilidade.

No segundo encontro, os alunos foram dispostos em duplas e cada aluno ganhou um tabuleiro, uma ficha e um totem do jogo que foi desenvolvido para trabalharmos o conceito de Probabilidade. O jogo¹³ foi desenvolvido com o intuito de analisarmos as probabilidades envolvidas no lançamento de dados, para isso construímos um tabuleiro onde o aluno teria que gerar tropas para adquirir pontos e mover-se para a linha final no menor tempo e com a maior pontuação. Inicialmente, os alunos jogaram sem comentarmos as probabilidades, pois o objetivo inicial era que eles desenvolvessem suas estratégias individualmente, e que construíssem conceitos e significados com seus próprios conhecimentos, pois segundo Skovsmose (2008), não há respostas erradas, há respostas que se aproximam menos da realidade.

Após um diálogo com os alunos, sobre as variáveis contidas nos cálculos de Probabilidade, apresentamos o conceito de probabilidade de maneira informal, o qual diz que a probabilidade que ocorra um evento A é igual ao número de casos favoráveis sobre o número de casos possíveis, para formalizar esse conceito colocamos no quadro a expressão “ $P(A) = \frac{\text{O que eu quero}}{\text{O que eu tenho}}$ ”. Com a participação dos estudantes foram realizados os cálculos necessários para verificar a melhor opção de movimentação no jogo. Notamos que a intuição era uma ferramenta muito utilizada pelos alunos quando questionamos quais as estratégias adotadas para o jogo.

Esta aula ficou marcada pela participação do grupo, observamos que os alunos estavam questionando as próprias estratégias de jogo com reflexões, como por exemplo: Faz diferença meu adversário escolher a condição inicial para que eu me mova da casa um para a casa dois, qual é a melhor alternativa de gerar tropas na segunda fase? De quantas maneiras eu posso obter dez pontos no decorrer da partida, e destas, qual é a mais vantajosa?

Esses questionamentos, na maioria das vezes, feitos pelos alunos, acarretaram em uma série de discussões e cálculos para constatar qual seria a melhor alternativa. Portanto acreditamos que ao fim desta aula conseguimos alcançar os objetivos propostos, pois foi possível discutir o conceito de probabilidade, bem como saber de que forma utilizá-lo em prol de estabelecer estratégias nos jogos desenvolvidos para a oficina, além de estimular a curiosidade do aluno e fazê-lo questionar as estratégias tomadas no decorrer do jogo.

No terceiro encontro, após a revisão dos conceitos abordados na aula anterior, iniciamos uma atividade com o objetivo de discutir o conceito de eventos equiprováveis, os alunos foram organizados em trios, e cada grupo recebeu duas moedas. Colocamos no quadro um modelo de tabela para que os alunos fizessem as anotações em seus cadernos.

Posteriormente, instruímos que cada trio escolhesse uma alternativa entre as apresentadas: *Duas caras, Duas coroas, Faces diferentes*. Após as escolhas, cada trio deveria lançar as duas moedas dez vezes e anotar os resultados nas tabelas, o jogador que marcasse mais pontos, ao fim de dez lançamentos, obtinha a vitória.

Questionamos os alunos se este jogo era justo, e um aluno respondeu: “O jogo é injusto porque as chances são diferentes, a chance de sair cara em duas moedas é de 25%, duas coroas é 25% e de sair faces diferentes é de 50%.”. Destacamos que o conceito de justo, neste trabalho, está baseado nas probabilidades equiprováveis, de maneira que jogo será justo quando os jogadores têm as mesmas chances de vitória.

¹³ As regras do jogo e sua apresentação estarão nos anexos deste trabalho.

Após o primeiro momento da aula, apresentamos o segundo jogo, usualmente chamado de “Purrinha¹⁴”, e que tinha o objetivo de investigarmos os conceitos de eventos equiprováveis e estratégias de jogo com base nas probabilidades. Inicialmente os alunos jogaram sem uma análise probabilística, de forma que os próprios alunos decidiriam quem faria a primeira aposta.

As mesmas questões do jogo anterior também foram levantadas nessa atividade. Porém, os alunos relataram que este era um jogo justo, pois os oponentes tinham as mesmas chances de vitória. Perguntamos aos alunos se faria alguma diferença haver um primeiro jogador a dar o palpite do resultado da soma das mãos, e a resposta imediata que a turma deu foi que não faria diferença alguma, pois os dois teriam direito a resposta independente do momento.

Ao final do terceiro encontro foi solicitado aos alunos que comentassem o que entenderam sobre eventos equiprováveis, e que respondessem se no lançamento de dois dados às somas das faces era considerada como eventos equiprováveis, as respostas foram semelhantes por parte de todos os alunos: “Eventos equiprováveis são eventos que tenham a mesma chance de ocorrer e no lançamento de dois dados quando o que está sendo avaliado é a soma das faces, os eventos não são equiprováveis”.

O último encontro teve como propósito apresentar e resolver alguns problemas clássicos de Probabilidade. Apresentamos os seguintes problemas: *As portas de Monty Hall*¹⁵, *O problema das apostas*¹⁶, e *O problema das bolas*¹⁷. Os problemas foram apresentados de maneira crítica, fazendo um relato histórico e informando onde eles surgiram. Posteriormente, solicitamos aos alunos que resolvessem as situações com as concepções construídas durante os encontros.

Notamos o avanço dos alunos, observamos que eles questionavam o problema antes de iniciar os cálculos, faziam suposições e analisavam-nas. Verificamos que, nesse encontro, houve uma redução das respostas intuitivas. Os estudantes resolveram os problemas de forma conjunta, debateram e proporcionaram um ambiente democrático na sala de aula. Destacamos que, nesse encontro, apesar de os alunos trabalharem unidos, muitas respostas divergiram. Porém, conforme Skovsmose (2008), o professor, como mediador do conhecimento, deve enfatizar que as respostas dos alunos não estão necessariamente erradas, mas menos próximas da realidade.

Considerações finais

Este artigo relatou uma proposta de sequência didática que teve como objetivo introduzir alguns conceitos de probabilidade, utilizando como auxílio a investigação em jogos. A proposta almejou proporcionar uma nova metodologia ao professor, e aos alunos uma nova forma de estudar, fazendo com que elaborem soluções e em conjunto avaliem e

¹⁴ Cada pessoa terá três palitos consigo e terá de escolher uma quantidade a colocar na mão. Depois todos deixam a mão fechada sobre a mesa, então cada jogador apostará quanto dará a soma de todos os palitos que possa estar na mão de cada na mesa, os jogadores não podem repetir a pedida ou palpite. Ganha aquele que acertar o total de palitos da rodada.

¹⁵ Enunciado do problema será apresentado nos anexos.

¹⁶ Enunciado do problema será apresentado nos anexos.

¹⁷ Enunciado do problema será apresentado nos anexos.

investiguem situações problemas, os quais estejam habituados a fazer, no nosso exemplo, através dos jogos.

Sabendo que a docência é uma atividade democrática, o professor deve estar sempre aberto a discussões e também para as sugestões vindas por parte dos alunos. Evidenciamos o fato de que o professor deve estar sempre ciente de que o resultado de suas aulas nem sempre será positivo. Um exemplo disso, em nosso trabalho, ocorreu no segundo encontro, em que metade da turma achou o jogo muito complexo, e isto dificultou a análise do mesmo.

Observamos que a oficina atendeu em média quinze alunos, sendo que normalmente as turmas do Ensino Médio tem um número maior de estudantes. No entanto, consideremos que a sequência didática sugerida pode ser aplicada com grupos maiores, observando-se suas peculiaridades e evidentemente que isso pode se refletir no tempo de aplicação e profundidade das discussões. Na oficina apresentada utilizamos oito períodos para realizar a sequência didática, porém, este tempo pode variar de acordo com as características das turmas onde será aplicada.

Iniciamos a oficina com quinze alunos, mas apenas oito compareceram no último encontro, no qual foi aplicado o questionário final. Portanto, fazendo uma breve análise dos oito participantes. Houve uma melhora no desempenho depois das aulas, apenas um aluno não acertou todas as questões. Apesar de termos uma amostra relativamente pequena para avaliarmos a sequência didática, podemos afirmar que a metodologia utilizada foi essencial para o desenvolvimento crítico do aluno, notamos esse fato nas respostas do questionário final, assim como nas resoluções dos problemas do último encontro, onde os alunos debateram, socializaram e concluíram as respostas junto.

Portanto, conseguimos mostrar para os alunos que a Probabilidade, tema principal do trabalho, é um conteúdo presente em muitos lugares, inclusive em situações do dia-a-dia dos alunos, desde o embaralhar de cartas até os cálculos de risco em uma cirurgia, assim como na previsão do tempo e análises de alguns fenômenos naturais, aproximando os mesmos da conteúdo e da curiosidade, fator motivacional para os estudos e compreensão de mundo.

Referências

Lüdke, M. & André. M. (1986). *Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas*. São Paulo: EPU.

Silva, P.A.L. (1999). Probabilidade e Estatística: conceitos, modelos e aplicações no Excel. Reichmann & Affonso (ed). Rio de Janeiro, RJ: Reichmann & Affonso.

Skovsmose, O. (2008). Cenários para investigação. En: O. Skovsmose, Desafios da reflexão em educação matemática crítica, capítulo 1, p. 15 – 40. Campinas: Papirus.

Anexos

1. O Jogo: Guerra nas Estrelas

Número de jogadores: Dois ou no máximo quatro.

Material

Um tabuleiro por jogador, dois dado de seis faces com números de um a seis, um dado de seis faces contendo em cada face um sinal diferente do conjunto (Maior que, menor que, igual a, maior ou igual, menor ou igual, aluno escolhe), caso o dado não possa ser confeccionado, uma variação seria outro dado de seis faces com números de um a seis com variações de acordo com cada valor. Abaixo estão as regras e objetivos do jogo.

Dado das Condições

- 1 = Maior que;
- 2 = Menor que;
- 3 = Igual a;
- 4 = Maior ou igual;
- 5 = Menor ou igual;
- 6 = Jogador escolhe;

Objetivo do jogo

Criar tropas de rebeldes, tropas aéreas e Millenium Falcon e assim invadir a estrela da morte e derrotar o império, dentro da estrela da morte é possível gerar tropas de Jedi.

Tabuleiro

- Nível 1 (Base): O nível um abrange somente uma casa (1), nesse nível para criar tropas é necessário apenas um dado, as tropas geradas nesse nível são de um ponto;
- Nível 2: O nível dois abrange as casas 2,3,4,5 e 6, nesse nível são necessário o uso de dois dados para fazer as lançamentos. As tropas geradas nesse nível são de dois pontos;

- Nível 3: O nível três abrange as casas 7,8,9,10 e 11, nesse nível são necessários dois dados para fazer os lançamentos, as tropas geradas nesse nível valem três pontos;
- Nível 4: O nível quatro abrange a casa 12, nesse nível são necessários dois dados para fazer os lançamentos, as tropas geradas na casa 12 valem quatro pontos;

12

Gerar Tropas
Para gerar tropas no nível 4 será necessário que você tire a soma doze nos dois dados arremessados, nessa posição serão gerados Jedi que te concederão 4 pontos.

Movimento
A partir dessa casa você não precisará se mover e não conseguirá recuar.

9 **10** **11**

STAR WARS **STAR WARS** **STAR WARS**

7 **8**

STAR WARS **STAR WARS**

4 **5** **6**

STAR WARS **STAR WARS**

2 **3**

STAR WARS **STAR WARS**

1

Gerar Tropas
Para gerar tropas no nível 3 é necessário de que você use dois dados para tirar a soma que resulta no valor da posição onde está localizado o gerador de tropas.

Movimento
Para se mover no nível três é necessário que você escolha uma operação da tabela do dado das condições e cumpra com o que você optou, a condição será referente ao número da casa que você deseja ocupar.

Gerar Tropas
Para gerar tropas no nível 2 é necessário de que você use dois dados para tirar a soma que resulta no valor da posição onde está localizado o gerador de tropas.

Movimento
Para se mover no segundo nível é necessário de um dado para as condições e dois dados para realizar o que se pede. Primeiro você joga o dado das condições e verifica a tabela para ver qual é a condição que terá que cumprir.

Gerar Tropas
Para gerar tropas de rebeldes na primeira fase, o oponente a sua direita deverá escolher um número para que você tire no dado. Nessa fase, você é obrigado a cumprir com a condição do oponente, e terá apenas uma tentativa!

Movimento
Na primeira fase é necessário jogar o dado das condições e realizar o que se pede. Ex.: Você está na Base (casa 1) e pretende ir para a casa 3, nesse caso se o dado das condições cair em maior que, você deverá jogar o dado e tirar um número maior que 3.

Movimentação

Esse jogo é dividido em quatro níveis, e a movimentação é diferente em cada nível, segue abaixo as regras de movimentações:

- Primeiro nível: Para se mover no primeiro nível é necessário o uso do dado das condições e cumprir o que se pede com apenas um dado.
Ex.: Você pretende ir para a casa número três, então se joga o dado das condições e, supostamente, você recebe “menor ou igual”, logo é necessário que você tire um, dois ou três para conseguir se mover até a casa número três.
- Segundo, terceiro e quarto nível: No segundo nível é necessário que você utilize dois dados para cumprir com as regras solicitadas pelo arremesso do dado das condições, valendo o exemplo no nível um estendido para dois dados.

Gerar Tropas

Em todos os níveis, para gerar as tropas, é necessário que o jogador consiga obter o número da casa como a soma dos dois dados que serão lançados, com a exceção da primeira fase, nesta, o jogador lançará apenas um dado.

Fim do Jogo

O jogo termina quando algum dos jogadores obtiver dez pontos na casa doze, a rodada acaba no primeiro jogador (Ex.: Ao total estão jogando quatro pessoas (A,B,C e D), a rodada começou com o jogador A e o B chegou à casa número doze com dez pontos, ele não é o vencedor pois os jogadores C e D ainda não tiveram chances de chegar à casa número doze pois a rodada encerra com o fim das ações do jogador D), caso acabe a rodada e haja mais de um jogador na casa doze, ganha quem tiver mais pontos.

2. Enunciado das questões

¹ Um apresentador de um programa de TV solicita que “você” escolha uma porta dentre três que estão disponíveis, atrás de uma porta há um carro e atrás de outras duas, há uma cabra em cada uma. Suponhamos que você escolha uma porta, que pode ou não haver um carro, o apresentador sabendo onde está o prêmio maior, abre uma porta que há uma cabra e pergunta se você deseja trocar de escolha. A partir disto, qual é a sua melhor chance, continuar com a escolha inicial, ou trocar sua escolha e optar abrir outra porta?

² Dois jogadores A e B resolvem lançar uma moeda, cada jogador escolhe uma face, ganha quem conseguir cinco faces desejadas primeiro. Quando A está a um ponto para

ganhar e para B ainda faltam três pontos, os jogadores resolvem parar de jogar. No entanto, queriam receber o prêmio. De que maneira o montante apostado por ambos os jogadores deve ser dividido de forma justa?

³ (OBMEP-2010) André, Bianca, Carol e Dalva querem sortear um livro entre si. Para isto, colocam 3 bolas brancas e 1 preta em uma caixa e combinam que, em ordem alfabética de seus nomes, cada um tirará uma bola, sem devolvê-la à caixa. Aquele que tirar a bola preta ganhará o livro. A chance de André tirar a bola preta é diferente da chance de Dalva tirar a bola preta?