

## EXPERIENCIA DIDÁCTICA EN LA INTRODUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN ESTUDIANTES DE BACHILLERATO

Rebeca Antonio Zambrano, Dinazar Escudero-Ávila, Eric Flores-Medrano.  
[azare82@hotmail.com](mailto:azare82@hotmail.com), [eadinazar@hotmail.com](mailto:eadinazar@hotmail.com), [eflores@fcfm.buap.mx](mailto:eflores@fcfm.buap.mx)  
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México.

Núcleo temático: Recursos para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

Modalidad: Comunicación breve (CB)

Nivel educativo: Nivel Medio Superior

Palabras clave: Derivada, secuencia didáctica, registros de representación.

### Resumen

*Uno de los conceptos fundamentales en el Cálculo es el de derivada puesto que es sumamente útil para describir fenómenos que van cambiando con el tiempo, de tal manera que podamos predecir su comportamiento. Dentro de la investigación en Matemática Educativa, el concepto de derivada ha sido estudiado desde distintos enfoques y con distintos intereses, lo cual permite al profesor tener una base de resultados de investigación con los que se pueden diseñar secuencias didácticas aplicables directamente al aula.*

*En este trabajo mostraremos el diseño y algunos de los resultados de aplicación de una secuencia didáctica basada en resultados de investigación. El objetivo de la secuencia es introducir el concepto de derivada en estudiantes de bachillerato que tienen un primer acercamiento con este contenido de manera que se logre la comprensión del concepto a través del trabajo en dos ejes: la idea de variación y cambio implícito en el concepto y la idea de coordinación entre registros de representación.*

### Introducción

En la naturaleza existen diversos fenómenos que van cambiando conforme cambia el tiempo. De acuerdo con Vrancken y Engler (2014) es necesario utilizar la matemática para estudiar algunos de estos fenómenos y las variaciones que en estos se producen. El Cálculo nos da herramientas para llevar a cabo este estudio y predecir el comportamiento de fenómenos que presentan cambios. En específico, la derivada nos sirve para describir este tipo de comportamientos (Cordero, 2008).

Dentro de la investigación en Matemática Educativa existen variados estudios alrededor del concepto de derivada. En general, han tenido la finalidad de acercar a los estudiantes a la comprensión del concepto utilizando diferentes enfoques: aproximaciones para llegar al

cociente de un límite, lenguaje variacional, pendiente de recta tangente a una curva, entre otras (Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2008).

En la mayoría de los currículos de Cálculo de Nivel Bachillerato lo que se pide a los estudiantes es que encuentren la derivada de una función, primero con la fórmula de límite y luego utilizando alguna fórmula de derivación (Cantoral & Mirón, 2000). Sin embargo, no todos los estudiantes pueden hallar la derivada solicitada, presentan obstáculos, dado que no manejan los conocimientos previos necesarios (Vrancken y Engler, 2014) o no dan un significado a la derivada de acuerdo al contexto en el que estén trabajando (Sánchez-Matamoros et al., 2008). Esto genera un problema con respecto a la forma en la que se aborda el concepto y suscita dudas en cuanto a las maneras más propicias para secuenciar las actividades que se utilizan para abordar este concepto por primera vez.

Un punto importante a resaltar acerca de las investigaciones sobre el concepto de derivada es que, en su mayoría, son propuestas de trabajo para estudiantes que ya han tenido un acercamiento previo con el concepto de derivada. En este trabajo mostramos el diseño de una secuencia didáctica para estudiantes de bachillerato que por primera vez tienen contacto con el tema a través de la idea de variación y el tránsito entre distintos registros de representación en términos de Duval (2006).

Con base en la problemática que hemos planteado y la literatura de investigación que hemos consultado, se ha diseñado una secuencia en la que el estudiante logre la comprensión del concepto de derivada a través de dos enfoques, la idea de variación y cambio implícita en el concepto y la coordinación entre los diferentes registros en los que este se puede representar, para que pueda aplicarla según el contexto en el que se encuentre. Así, nos planteamos la siguiente pregunta de investigación: ¿qué efectos tiene en los estudiantes de bachillerato el trabajo con secuencias didácticas que propicien la coordinación entre diferentes registros y que son contextualizados a través de la variación para apropiarse del concepto de derivada?

### **Principales elementos teóricos empleados en el trabajo**

Los trabajos de investigación realizados por García (2011), García y Dolores (2016) y Vrancken y Engler (2014) nos sugieren la idea de realizar una secuencia didáctica tomando como enfoque principal el Pensamiento y lenguaje variacional. Nos hemos basado en García y Dolores (2016) para generar la estructura de la secuencia, es decir, cuántas actividades se

propusieron en la secuencia y lo que se solicita en cada actividad, además de la cantidad de estudiantes a los que se aplicará la secuencia didáctica.

En la actividad matemática un objeto puede ser representado en distintos registros como el numérico, gráfico, algebraico y verbal (Sánchez-Matamoros, et al., 2008; Flores, 2007; García y Dolores, 2016). Dentro de la literatura toma especial importancia el reconocimiento de los distintos registros de representación asociados al concepto de derivada. Duval (2006) menciona que un estudiante ha comprendido un concepto como parte del lenguaje matemático, cuando es capaz de reconocer el mismo concepto matemático en distintos registros.

De Sánchez-Matamoros et al. (2008) hemos tomado la clasificación que se hace de algunos registros de representación del concepto de derivada:

- *Gráfico:* Se analiza que ocurre cuando el cambio de longitudes en el eje X cambia con respecto a la longitud en el eje Y. Dentro de este registro se pueden hacer transformaciones, por ejemplo pasar de la gráfica de la función a la gráfica de su derivada y viceversa, como pendiente de la recta tangente a una curva.
- *Verbal:* En el que se presenta propiamente como parte del lenguaje matemático. Como pendiente de una recta tangente, como razón de cambio instantáneo.

En Cálculo las gráficas son utilizadas para analizar comportamientos de funciones como concavidades, crecimiento, máximos o mínimos, etcétera. Suarez y Cordero (2010) utilizan las gráficas para estudiar como varia la posición y las relaciones entre velocidad y aceleración, en general establecen un significado a la variación mediante la modelación-graficación. Flores (2007) menciona que las gráficas funcionan como estrategia para el análisis de funciones en contextos matemáticos y extramatemáticos. Por su parte, Dolores (2007) menciona que las gráficas, además de servir como herramientas didácticas que proporcionan información, son útiles en el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes.

### **Metodología**

La secuencia didáctica se aplicó a un grupo de 27 estudiantes de bachillerato de entre 16 y 18 años de edad que estaban cursando por primera vez el curso de Cálculo Diferencial. Es importante señalar que este estudio utiliza un método de observación participante, puesto que la profesora del grupo es también la diseñadora de la secuencia y la investigadora que analiza

los datos. Sin embargo, esto no representa un obstáculo metodológico en tanto que, para evitar sesgos en la información y mantener la objetividad se recurrió a un método de triangulación de investigadores (Carrillo y Muñoz-Catalán, 2011).

Como primer paso se diseñó una secuencia didáctica, cuyo objetivo es dar sentido al concepto de derivada asociándolo con la idea de variación y cambio, de manera que el estudiante logre la apropiación y comprensión del concepto, considerando que las actividades que se propusieron permitieran la coordinación entre distintos registros de representación. En una segunda parte se implementó la secuencia a lo largo de dos semanas, repartidas en 4 sesiones de 100 minutos cada una. Para cada una de las sesiones se formaron nueve grupos de trabajo, de forma que en cada grupo estuviera un estudiante con habilidades matemáticas alto, medio y bajo, mismas que fueron determinadas por la docente encargada del grupo de acuerdo con su experiencia previa de trabajo con el grupo.

Los datos se recogieron a través de audio, videograbaciones y notas hechas por los estudiantes. En adelante nos referimos a los equipos como “Equipo #” y a los estudiantes como “E#”.

### **Análisis de resultados**

A continuación mostraremos los resultados preliminares de esta investigación. Se muestra el análisis de las producciones de los estudiantes para la primera de tres actividades realizadas en la secuencia.

#### *Actividad 1. Coordinación entre el registro verbal y gráfico*

En esta actividad se busca que los estudiantes tracen la gráfica que modela un movimiento a partir de un problema planteado verbalmente:

*Instrucciones: Traza la gráfica posición – tiempo que representa el movimiento de Juan en la siguiente situación.*



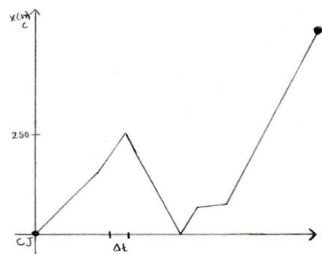
Juan sale de su casa para ir a estudiar a casa de su compañero. No es necesario tomar el camión, pues su amigo vive en una colonia próxima a la suya. Cuando sale de casa contesta un mensaje avanzando con paso lento los primeros 250 metros, en cuanto envía el mensaje continúa caminando más rápido. Cuando han transcurrido 8 minutos recuerda que olvidó su libreta y regresa a casa corriendo. Llega a casa, toma su libreta y, como ya es tarde, camina a la esquina y espera 3 minutos para tomar un taxi que lo lleva a la casa de su compañero.

Nuestra intención es utilizar el enunciado para hacer la coordinación entre el registro gráfico y el registro verbal, además de hacer uso de la gráfica como un medio para desarrollar el pensamiento y lenguaje variacional (Dolores 2007).

Una vez aplicada la secuencia al grupo de estudiantes se procede al análisis de la información tomando como base cuatro categorías que permitan organizar los resultados obtenidos en la aplicación y analizar la coordinación entre el registro gráfico y el registro verbal:

*Categoría 1. Identificar la presencia de variables y las relaciones entre ellas*

En los nueve equipos formados se logró trazar la gráfica estableciendo la relación existente entre la posición y el tiempo. Esto nos muestra que los estudiantes pueden establecer una determinada relación entre las variables del problema.



*Figura 1. Gráfica de Equipo 8*

En el Equipo 2 se muestran evidencias de que, además de establecer la relación entre la posición y el tiempo, se establece una relación entre la distancia y el tiempo:

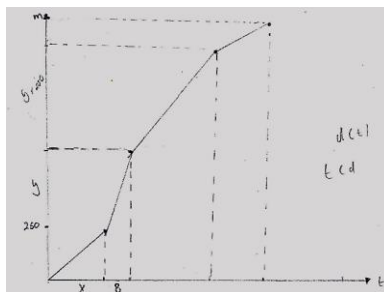


Figura 2. Gráfica distancia contra tiempo del Equipo 2

DOCENTE: En esta gráfica, ¿qué estoy representando? [Señalando la gráfica distancia contra tiempo del Equipo 2]

E5: La distancia que recorre

DOCENTE: ¿Por qué la gráfica tiene esa forma?

E5: Porque la distancia que recorre todo el tiempo va aumentando, crece.

*Categoría 2. Los alumnos identifican puntos de referencia para trazar la gráfica*

De los nueve equipos con los que se trabajó, en tres se establecieron la casa de Juan y la casa de su compañero como puntos de inicio y fin. De estos tres equipos dos colocaron la casa de su compañero al final de la gráfica que trazaron. Cuando se les preguntó en dónde está la casa de Juan y en dónde colocarían la casa del compañero a los demás equipos, algunos tuvieron problema en mencionar que el origen de las abscisas representa la casa de Juan y la mayoría contestó que la casa del compañero estaba al final de la curva.

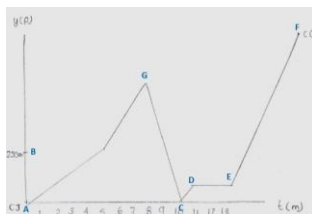


Figura 3. Gráfica de Equipo 3

DOCENTE: ¿Dónde está la casa de Juan?

E7: Fue un problema en el que entramos porque decimos que está aquí [Se refiere a la gráfica de la Figura 3 señalando el punto A] pero de alguna forma no puede estar específicamente acá [vuelve a señalar A], porque cuando regresa tenemos que regresar ahí y no podríamos regresar específicamente en este punto [continúa señalando el punto A]. Ahí no supimos bien cómo explicarlo así que a la conclusión que llegamos es que tendría que ser todo este eje [Señalando el eje X] aunque no podemos explicar por qué, la casa va a estar fija pero sin depender del tiempo ni la distancia.

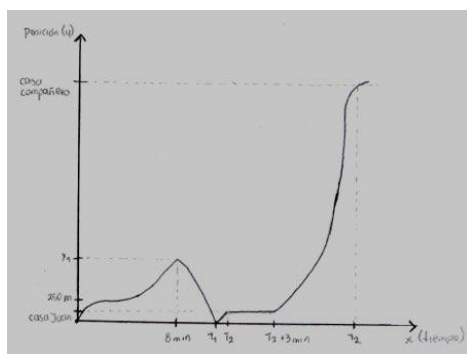
Otros puntos que utilizaron como referencia son los 250m y los 8min que se mencionan en el problema. Durante la discusión grupal se observa cómo hay problema para establecer las casas como puntos de referencia.

En la situación descrita se identifican siete momentos clave de acuerdo con la posición de Juan. De los nueve equipos, dos identificaron todos estos momentos y en los equipos restantes coincidieron en omitir el tiempo que pasa cuando Juan regresa a casa en busca de su libreta.

*Categoría 3. La gráfica muestra las variaciones en la posición de Juan*

Observamos que 8 de los nueve equipos trazaron la gráfica formada por segmentos lineales. En cada sección, representaron el movimiento de Juan de forma constante. Los estudiantes muestran que conocen la función lineal y que con ella se pueden modelar cambios constantes, además de saber qué tipo de función les ayuda a modelar el problema.

El Equipo 4 fue el único que consideró que había variaciones que no eran constantes en la posición y las representa con otro tipo de funciones que no son lineales. Esto pone de manifiesto que los estudiantes saben que las gráficas que representan las funciones que no tienen incrementos o decrementos constantes no son rectas:



*Figura 5. Gráfica del Equipo 4.*

## Conclusiones

Para la actividad 1, los estudiantes logran establecer relaciones entre las variables del planteamiento para plasmarlos en el plano cartesiano; utilizaron expresiones que están relacionadas con la idea de variación y cambio. En todos los grupos de trabajo se mencionó a la función de primer grado como una herramienta principal para modelar cambios constantes, además de reconocer a la pendiente de la recta como el elemento que nos modela dichos cambios. A pesar de que en los diferentes grupos de trabajo se omitió al menos una

característica planteada en el enunciado, se logró la conversión entre el registro gráfico, el registro verbal y el registro algebraico.

La gráfica nos permite analizar el comportamiento de la situación que describe cambios que varían en cuanto al tiempo, además de establecer análisis puntuales y globales con respecto al movimiento en diferentes secciones al contrastar con el realismo de la situación (Buendía & Carrasco, 2009). La división de la gráfica en diferentes intervalos nos apoya para analizar las predicciones que realizan los estudiantes en cuanto a las razones de cambio en un instante dado. Analizar si la velocidad crece o decrece y cómo es su comportamiento alrededor de un punto de inflexión fue otra parte de la actividad que nos permite localizar en aspectos concretos para la construcción de la derivada (se aborda en las siguientes dos actividades, las cuales se encuentran en proceso de análisis).

### **Referencias bibliográficas**

Buendía, G., & Carrasco, E. (2009). Gráficas de Variación: Reflexiones sobre la visualización de la curva. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 22 (pp. 35-43), México, D. F.: Clame.

Cantoral, R., & Mirón, H. (2000). Sobre el estatus de la noción de derivada: de la epistemología de Joseph Louis Lagrange al diseño de una situación didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 3(3), 265-292.

Carrillo, J., & Muñoz-Catalán, M.C. (2011). Análisis metodológico de las actas de la SEIEM (1997-2010) desde la perspectiva de los métodos cualitativos. Reflexión en torno a un caso. En M. Marín, G. Fernández, L. Blanco, & M. Palarea (Eds.), *Memorias del XV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 99-116). Ciudad Real, España: SEIEM.

Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R.M Farfán, J. Lezama, y V. Romo (Eds.). *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano* (pp. 265-286). Reverté-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. A. C.



- Dolores, C. (2007). Usos de las gráficas y sus representaciones en el aprendizaje de las Matemáticas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 20 (pp. 499- 503), Camagüey, Cuba: Clame.
- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La gaceta de la RSME*, 9(1), 143-168.
- Flores C. (2007). Las Formas Básicas de Graficación y su Relación con Situaciones de Movimiento. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 20 (pp. 485- 489), Camagüey, Cuba: Clame.
- García, M., & Dolores, C. (2016). Diseño de una situación de aprendizaje para la enseñanza del concepto de derivada. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 46, 45-70.
- García, M. (2011). *Una situación de Aprendizaje para Contribuir a la Mejora del Concepto de Derivada*. Tesis de maestría no publicada, Guerrero, México: UAGro.
- Sánchez-Matamoros, G., García, G., Blanco, M., & Llinares, S. (2006). El Desarrollo del esquema de la Derivada. *Enseñanza de las ciencias*. 24(1), 85-98.
- Sánchez-Matamoros, G., García, M., & Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 11(2): 267-296.
- Suarez, L., & Cordero, F. (2010). Modelación – graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(4), 319-333
- Vrancken, S., & Engler, A. (2014). Una Introducción a la Derivada desde la Variación y el Cambio: resultados de una investigación con estudiantes de primer año de la universidad. *Boletín de Educación Matemática*, 28(48), 449-468.