El rey y los castillos

Gamondi Rubén Mario(*) - *Cassoli Darío*(**)

Introducción:
Con la resolución de este problema se pretende lograr dos objetivos, en el primero se busca captar la atención de los alumnos para resolver un problema sin la utilización de conceptos matemáticos y con mucha utilización de la idea intuitiva y el segundo objetivo consiste en crear el ámbito apropiado para aplicar la herramienta matemática conocida como inducción matemática.
Este trabajo fue propuesto a alumnos de primer año de un profesorado en matemática, y con el correr del tiempo se generó un intercambio que llevó a plantear y resolver una generalización.
El problema original fue extraído de [1].

El rey y los castillos

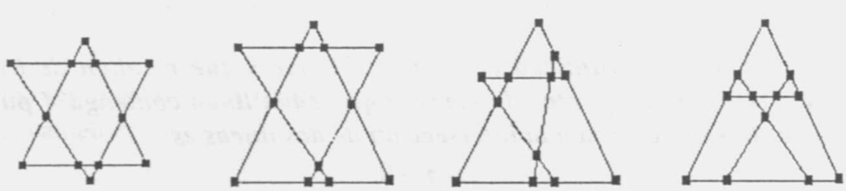
"Érase una vez, en tiempos antiguos, un poderoso rey que tenía ideas excéntricas en materia de arquitectura militar. Sostenía que había gran fuerza y economía en las formas simétricas, y siempre citaba el ejemplo de las abejas, que construyen sus panales en celdas hexagonales, para demostrar que la naturaleza lo respaldaba.
Decidió construir diez nuevos castillos en su país, todos conectados por murallas fortificadas, que debían formar cinco líneas con cuatro castillos en cada línea. El real arquitecto presentó su plano preliminar en la forma

Pero el monarca señaló que era posible atacar cada castillo desde el exterior, y ordenó modificar el plano para que la mayor cantidad posible de castillos quedaran a salvo de un ataque externo, y sólo se pudiera llegar a ellos cruzando las murallas fortificadas. El arquitecto replicó que le parecía imposible disponerlos de tal modo que aún un solo castillo – el edificio que el rey se proponía usar como residencia- se pudiera proteger de ese modo, pero Su Majestad se apresuró a explicarle como hacerlo. ¿Cómo se pueden construir los diez castillos y fortificaciones para satisfacer del mejor modo los requerimientos del rey?.

Ante esta situación se conviene en definir *punto interior* o *castillo interior*, como aquel punto que para poder llegar a él desde el exterior es necesario pasar por lo menos por una línea, y *punto exterior o castillo exterior* aquel que se accede desde el exterior sin pasar por ninguna línea.
Planteado el problema surge la siguiente respuesta por parte del alumnado, la cual coincide con [1].

El docente interviene nuevamente y propone que se analice la posibilidad de defender un castillo. Aparece la siguiente situación:

Agotado el problema, el docente propone modificar el enunciado identificando cada castillo con un punto y cada muralla con una línea, donde cada línea tiene únicamente 4 puntos y cada punto, surge de la intersección de sólo dos líneas, este enunciado se analiza para el caso de 6 líneas y 12 puntos, luego se propone a los alumnos que muestren la posibilidad de encontrar cero, uno, dos y tres puntos interiores respectivamente o tanto como sean posibles.
Para cada uno de los casos los gráficos encontrados son:



Surge por parte de los alumnos la observación de la imposibilidad de encontrar una cantidad de puntos interiores que superen a 3, en el caso de 12 puntos y 6 líneas.

Se les propone como actividad siguiente la posibilidad de realizar el mismo problema pero con la variante de 14 puntos y 7 líneas.

Luego de deducido el caso de $n = 7$ se pretende generalizar el problema, el cual consiste en: **trazar un diagrama con solamente puntos exteriores, que contenga $2n$ puntos y n líneas, con la condición que cada línea pase por sólo 4 puntos.**

La respuesta, pronto aparece con la intervención del docente al considerar un polígono (se puede pensar regular) de n lados y prolongar sus lados, se tiene que cada lado finaliza en 2 puntos y la prolongación del mismo hacia ambos sentidos se corta en dos puntos con las respectivas prolongaciones de los 2 lados vecinos.

La gráfica siguiente muestra tres lados vecinos y sus prolongaciones en un polígono de n lados.

Con todas las situaciones propuestas y que quizás han sido resueltas se da una respuesta a la siguiente pregunta:

Si se tienen 2n puntos y n líneas de manera que cada línea contenga 4 puntos, que cada punto pertenezca a la intersección de únicamente dos líneas; y además con las n líneas se cubran los 2n puntos. ¿Cuál es la mayor cantidad de puntos que pueden ser interiores?.

Al hacer el análisis del caso $n = 5$, hemos visto que hay sólo dos puntos interiores.

De la situación $n = 6$, se observa que el máximo posible es de 3 puntos interiores, del caso $n = 7$ resulta un máximo de 5 puntos interiores, luego para $n = 8$ es posible encontrar a lo sumo 7 puntos interiores y para $n = 9$ son 9 los puntos interiores, esta sucesión no es otra cosa que la secuencia de números impares, excepto en el primer caso.

A partir de todo este trabajo manual surge la siguiente conjetura:

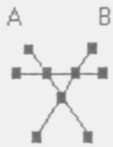
Conjetura: ***La máxima cantidad de puntos interiores que resultan de trazar n líneas que pasen por 2n puntos de manera que cada línea contenga 4 puntos y cada uno de ellos pertenezca a la intersección de dos líneas es:***

$$2 \cdot n - 9$$

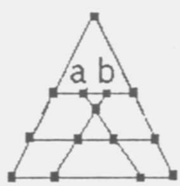
Para poder afirmar o contradecir esta suposición se debería ver cuáles son las herramientas matemáticas disponibles para resolver esta situación, una de ellas consiste en utilizar el método de inducción matemática, la idea inicial es realizar la

solucion en conjunto con el alumnado, analizando uno por uno los distintos valores de n.
En el caso $n = 6$, se ha encontrado el siguiente diagrama:

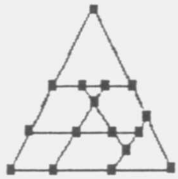
Que no es otra cosa que un triángulo (exterior) en el cual se le ha insertado el siguiente diseño:

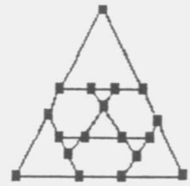


El próximo paso radica en la posibilidad de poder pasar del caso $n = 6$ al caso $n = 7$, para ello es necesario trazar un nuevo segmento y que aparezcan dos nuevos puntos en el esquema, nos bastamos de la siguiente estrategia. En la figura anterior identificamos los puntos A y B:
Luego se traza una línea de manera tal que los puntos A y B no sean los puntos extremos del segmento que formarán con otros dos puntos, de esta manera se obtiene el siguiente esquema:

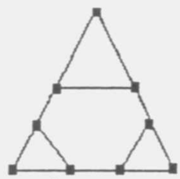


Si se repite el proceso en cada una de las dos puntas restantes del diseño insertado en el triángulo exterior, se tiene la manera de pasar a $n = 8$ y $n = 9$, obteniéndose respectivamente:





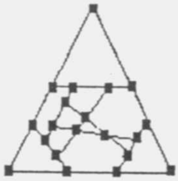
Se puede observar que para $n = 9$ se ha insertado en la figura siguiente

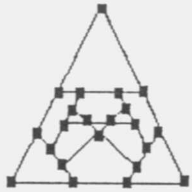


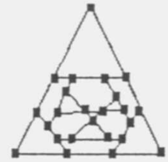
el diseño:

Repasando lo realizado hasta el momento, los diseños que permitieron pasar de 6 hasta 9, haciéndolo por 7 y 8 fueron:

A continuación se muestra los casos de $n = 10, 11 \text{ y } 12$.

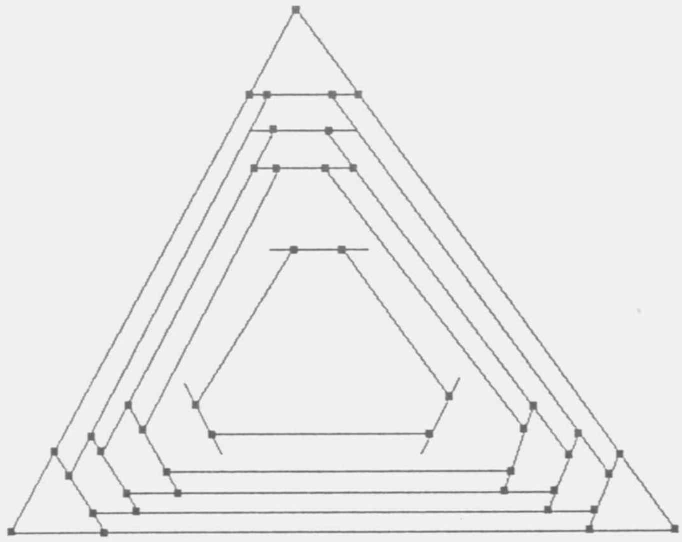




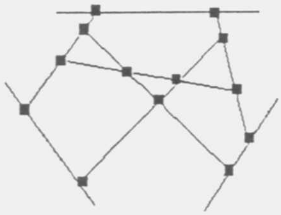


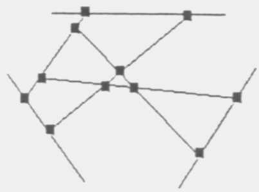
Se nota que los tres últimos casos, tienen en común la figura "exterior" siguiente:

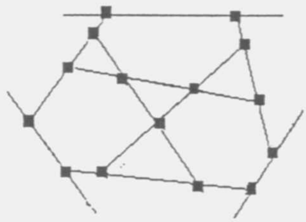
Y los diseños interiores inscriptos son los mismos que los que permitieron el paso de 6 hasta llegar a 9.
Mediante la repetición de este proceso, es posible pasar a diagramas exteriores del tipo:



Que luego con alguno de los diseños siguientes antes elaborados se puede construir el caso que se requiera:







Puesto que en el triángulo exterior, sólo hay dibujados 9 puntos, estos serán en consecuencia los únicos puntos exteriores del total. Entonces se tiene una demostración geométrica del siguiente teorema:

Teorema: ***Sea $n > 5$, consideremos 2n puntos, y n líneas, el número máximo de puntos interiores que resultan de trazar n segmentos por 2n puntos de manera que cada segmento contenga 4 puntos y cada uno de ellos esté en la intersección de dos segmentos es 2n-9.***

Con la resolución de este problema, se tiene una idea intuitiva que creemos que permitirá explicar con mayor facilidad el proceso inductivo.

Bibliografía:

[1]-. *El Acertijo del Mandarín y otras diversiones matemáticas*. Henry Dudeney. Juegos & co./Zugarto ediciones. 1992.

[2]-. *Para pensar Mejor.* Guzmán M. Editorial Labor . Barcelona 1991.

[3]-. *Matemáticas, discreta y combinatoria.*Grimaldi, Ralph P. Addison - Wesley Iberoamericana. 1989.

[4]-. *Matemáticas Discretas.* Ross, Kennet A. Wright, Charles. Prentice Hall, Hispanoamericana 1990.

[5]-. *Handbook of Applicable Mathematics. Combinatorics and Geometry.* Jhon Wiley & Sons. 1961.

{*} NUCOMPA – Facultad de Ciencias Exactas. UNICEN.
Tandil (7000). Prov. de Buenos Aires.
rgamondi@exa.unicen.edu.ar

{**} Inst. Sup. Formación Docente N ° 27 – Bolívar.