Orígenes y Evolución del Teorema de Rolle

Carlos O. Suárez Alemán
Departamento de Matemáticas
Universidad de Cádiz

Resumen: *Suele considerarse que Michel Rolle era un analista y que su famoso teorema fue fruto del incipiente análisis matemático. En este artículo se ofrece un recorrido por los principales hitos históricos que llevaron a la creación del teorema dentro del álgebra, verdadero campo de investigación de su autor, y cómo lentamente tuvo una larga transición hacia el campo del análisis.*

Palabras Clave: *Historia del análisis, teorema de Rolle, resolución de ecuaciones, Educación Matemática.*

Abstract: *Michel Rolle is generally considered as analyst and that his famous theorem was a result of mathematical analysis newborn. This article offers an overview of the historical milestones that led to the creation of the theorem in algebra, the original research by his author, and how slowly, and step by step, the theorem suffered a long transition to the field of analysis.*

Keywords: *Analysis history, Rolle's theorem, equation solving, Mathematics Education.*

INTRODUCCIÓN

Dentro del Análisis Matemático de una variable se considera que uno de los principales resultados es el conocido como Teorema de Rolle:

> *Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, derivable en intervalo abierto $]a,b[$ y verifica que $f(a)=f(b)$. Entonces existe al menos un valor c del intervalo $]a,b[$ tal que la derivada de la función se anula en él.*

Este resultado, tan importante para el análisis, tiene una historia interesante y a su vez, de forma sorprendente, bastante alejada del mismo. En este artículo se intentará dar un paseo por esta curiosa historia.

Una de las conclusiones que se suelen ofrecer de este teorema es la que indica que una función continua y derivable verifica que entre cada dos raíces consecutivas de la función hay una raíz de la derivada. Y es precisamente en esta consecuencia que de forma natural presentan los profesores del teorema donde está su origen histórico.

En muchos libros de texto de bachillerato se indica que el teorema indicado recibe el nombre de *Teorema de Rolle* porque es quien lo formuló por primera vez y que lo demostró utilizando el recién nacido cálculo diferencial. Y no es exactamente así.

Las primeras referencias que se tienen de este teorema se remiten a Bhaskara (1114-1185) y su libro *Siddhanta Shiromani.* A partir de los trabajos de su predecesor Manjula (ca 930 a.C.) que había llegado a obtener relaciones del tipo

$$sen\ w - sen\ w' = (w - w')\ cos\ w',$$

Bhaskara llegó a deducir que el seno y el coseno mantienen una relación del tipo que hoy indicamos como "derivada" una de la otra. A partir de aquí llegó a la conclusión de que cuando la ecuación de un planeta está en su punto más distante o en su punto más próximo a la tierra, la ecuación del centro se anulaba y también obtuvo que para una cierta posición intermedia, la ecuación "diferencial" de la ecuación del centro se anula. Esta es en sí la primera expresión que se realiza de este teorema (Gheverghese, 1996). Si bien es cierto que no existía un cálculo diferencial propiamente dicho, sino una interesante aproximación al mismo.

Posterior a esta expresión no se encuentran más indicaciones de este resultado hasta la versión ofrecida por el propio Michel Rolle (1652, 1719) que lo expone en su *Traité d'algèbre* publicado en 1690, aunque en el mismo no aportó una prueba convincente del mismo. La intención real de Rolle era dar un método para localizar las raíces de un polinomio de cualquier grado. Un asunto de gran interés en la época. A pesar de que el libro tuvo una gran aceptación, Rolle fue objeto de grandes críticas, según señala Smith (Smith, 1959, pp 253-260), por no incluir demostración alguna de este resultado. Rolle se vio obligado a publicar en 1991 un pequeño opúsculo *Démonstration d'une Methode pour resoudre les égalitez de tous les degrez;…* donde incluye la demostración de su método de cascadas.

MICHEL ROLLE (1652-1719)

Nacido en Amber (Francia), era hijo de un tendero que tan solo pudo proporcionarle una educación muy elemental. Comenzó trabajando como escribiente en notarías y despachos de abogados hasta que a la edad de veinte años se trasladó a París. Casado y pasando por grandes dificultades económicas, tuvo tiempo para interesarse de forma independiente en el estudio del álgebra y del análisis diofántico. En 1682 consiguió publicar en *Journal des sçavans* una elegante demostración de un problema publicado por Ozanam para encontrar cuatro números de manera que la diferencia de cada dos es la suma de los tres primeros y a su vez un cuadrado perfecto. Este hecho le supuso un gran reconocimiento social e incluso la posibilidad de dar clases particulares a la familia de un ministro que le permitió mejorar su situación económica. En 1699 consiguió un puesto como geómetra en la Academia de París, puesto que mantuvo hasta que en 1708 sufrió un primer ataque de apoplejía del que logró recuperarse, pero no resistió el segundo en 1719.

Su actividad principal se centraba en el álgebra de ecuaciones, campo de las matemáticas en el que logró una gran reputación y que le permitió publicar en 1690 su *Traité d'algèbre*, su libro más famoso. Como curiosidad, en este libro se publica por primera vez el símbolo para la *n*-ésima raíz de *a* siguiendo una idea sugerida en una carta de Albert Girard (1590-1633) en 1629 y que rápidamente fue aceptada (Cajori, 1993-p. 372).

Algèbre contiene interesantes consideraciones para la resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones, donde Rolle utiliza algoritmos euclidianos para resolver ecuaciones diofánticas lineales y para la obtención del máximo común divisor de dos polinomios.

Por otro lado, cuando en 1696 se publica el *Analyse des infiniment petits* por L'Hospital, entre los miembros de la Academia de París se produjo una división de opiniones sobre este análisis infinitesimal. Por un lado estaban los seguidores del nuevo cálculo y por otro los críticos sobre él. Rolle adoptó una postura muy crítica con los infinistesimales pues consideraba que estos no estaban basados en sólidas bases de razonamiento y mantuvo un famoso enfrentamiento dialéctico con las ideas de Pierre Varignon (1654-1722) que defendía el uso de los mismos y que puede estudiarse en el artículo de (Mancosu, 1989). Para diversos historiadores del análisis, Rolle es uno de los principales exponentes de lo que se considera el primer gran ataque en contra del rigor del nuevo análisis, más concretamente contra la viabilidad de los infinitesimales. El segundo gran ataque surgiría unos años más tarde en Inglaterra con el conocido *The analyst; or a discourse addressed to an Infidel Mathematician wherein it is examined whether the Object, Principles, and Inferences of the modern Analysis are more distinctly conceived, or more evidently deduced, than Religious Mysteries and Points of Faith* (El analista, o un discurso dirigido a un matemático infiel en donde se examina si el objeto, principios e inferencias del análisis moderno son más claramente concebidos, o más evidentemente deducidos, que misterios religiosos y los puntos de Fe) artículo del obispo George Berkeley (1685 - 1753) que tuvo una gran influencia posterior en el desarrollo y fundamentación del análisis matemático.

Se puede considerar a Michel Rolle como un hábil algebrista que rompió con las técnicas cartesianas, dominantes hasta su época y totalmente opuesto a las nuevas técnicas infinitesimales surgidas del nuevo cálculo diferencial.

MÉTODO DE LAS CASCADAS

En este punto, es evidente que existe una gran contradicción entre el hecho de que hoy se conoce al Teorema de Rolle como un importantísimo resultado del análisis matemático y sin embargo su origen lo encontramos en un matemático contrario al uso de estas técnicas.

Desde los inicios de la matemática, la búsqueda de las soluciones de una ecuación ha sido una constante en la investigación. De forma paralela a la búsqueda de algoritmos directos para resolver ecuaciones, cuyo punto más álgido fueron los trabajos de Girolamo Cardano (1501-1576), encontramos las aportaciones en la búsqueda de métodos iterativos de resolución de ecuaciones. De este modo podemos encontrar interesante métodos desde Mesopotamia hasta nuestros días (Chabert, 1999). Pero en todos ellos como indica (Goldstine, 1977) la eficacia está condicionada a la utilización de una primera aproximación de las raíces que se buscan, para lo que era necesario conocer cuántas puede haber y cómo localizarlas. Para dar respuesta al primer apartado, Girard estableció, sin aportar prueba alguna, en *L'invention nouvelle en l'Algèbre* de 1629 que toda ecuación polinómica de grado n tiene n raíces "si se cuentan las raíces imposibles (complejas) y si se tienen en cuenta las repetidas" (Kline, 1994, p. 361]), enunciando por primera vez el conocido Teorema Fundamental del Álgebra. René Descartes (1596-1650) incluyó este mismo resultado en *La géométrie* aunque se centra principalmente sobre las raíces reales y como es conocido Carl F. Gauss (1977-1855) demostró finalmente en su disertación de 1799 *Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse* (Nuevas pruebas del teorema donde cada función integral algebraica de una variable puede resolverse en factores reales de primer o segundo grado).

En el campo de la localización de raíces Thomas Harriot (1560-1621) en *Artis Analyticae Praxis ad Aequationes Algebraicas Resolvendas* (publicado en 1631, diez años después de su muerte) publica por primera vez, aunque de nuevo sin prueba, un resultado en este sentido. La regla consistía en afirmar que el número máximo de raíces reales positivas de una ecuación polinómica es el número de variaciones de signo de los coeficientes, y que el número máximo de raíces reales negativas es el número de apariciones de dos signos «+» o dos «-» consecutivamente. Posteriormente, René Descartes publicó las mismas reglas, también sin demostración alguna, en *La géométrie* (Descartes, 1987, pp. 340-343). Hubo que esperar hasta 1741 para obtener una prueba de estos resultados de la mano de Abbé Jean-Paul de Gua de Malves (1712-1785) quien probó estos resultados en *Demonstrations de la règle de Descartes* (Gua, 1741 a y b).

En este contexto de localización de las raíces de una ecuación polinómica, Rolle es el primero que aporta un método algebraico para localizar las raíces de una ecuación polinómica de cualquier grado. De este modo, dada una ecuación polinómica $f(x) = 0$, Rolle define una cierta multiplicación de la función $f(x)$ por una progresión e iguala a 0, así obtiene lo que él denomina una *cascada*. Aunque su método es válido para cualquier progresión, solía utilizar la progresión 0, 1, 2, 3..... Después de la multiplicación de cada término de $f(x)$ por el correspondiente término de la progresión, la expresión resultante se dividía por x e igualaba el cociente a cero.

Es decir, dada

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n = 0$$

Al multiplicar cada término por 0, 1, 2, 3 … , respectivamente, obtenemos

$$0 \cdot a_0 + 1 \cdot a_1 x + 2 \cdot a_2 x^2 + \cdots + (n-1) \cdot a_{n-1} x^{n-1} + n \cdot a_n x^n = 0$$

o lo que es lo mismo

$$a_1 x + 2a_2 x^2 + \cdots + (n-1)a_{n-1} x^{n-1} + na_n x^n = 0$$

dividiendo por x se obtiene la penúltima cascada

$$a_1 + 2a_2 x + \cdots + (\mathrm{n}-1)a_{n-1} x^{n-2} + na_n x^{n-1} = 0$$

Si observamos bien, vemos que este proceso conduce a lo que hoy conocemos como la derivada de $f(x)$ igualada a cero, $f'(x) = 0$, pero obtenida de forma algebraica.

Rolle repite este proceso hasta llegar a una cascada que no sea más que una ecuación de primer grado. En un ejemplo obtenido del propio *Algèbre*, tenemos la siguiente cascada completa

$$x^4 - 24x^3 + 198x^2 - 648x + 473 = 0$$

$$4x^3 - 72x^2 + 396x - 648 = 0$$

$$12x^2 - 144x + 396 = 0$$

$$24x - 144 = 0$$

Hay que indicar que Rolle solía escribir las cascadas al revés de cómo lo hemos indicado, empezado por la última y terminando por la primera.

Observemos que en este ejemplo todas las raíces son positivas, puesto que los signos de los coeficientes son todos alternos. El método se aplica siempre a este tipo de ecuaciones. Antes de comenzar Rolle “preparaba” la ecuación para conseguirlo de la forma que más adelante indicamos. De este modo acota las raíces con unos “límites” que son, como límite inferior 0, pues todas son positivas. Los siguientes “límites” son las raíces exactas o aproximadas que obtiene de la cascada anterior y como “limite” superior el entero inmediatamente mayor al resultado sumar uno al cociente resultante de dividir el valor numérico del coeficiente negativo con mayor valor absoluto por el coeficiente de la x de mayor grado.

Inicia el proceso de localización de raíces del siguiente modo: de la última cascada, la ecuación de primer grado, obtiene la raíz, esto es $x = 6$. Toma la penúltima cascada, $12x^2 - 144x + 396 = 0$, considera el mayor coeficiente negativo, en este caso -144, toma su valor absoluto, lo divide por el coeficiente de la potencia mayor, suma 1 y redondea por exceso si es necesario, esto es $144 : 12 + 1 = 13$, por lo que obtiene los valores 0, 6 y 13 como “límites” que acotan cada una de las raíces de la ecuación $12x^2 - 144x + 396 = 0$.

El siguiente paso es realizar una estimación de las raíces. En este ejemplo Rolle comienza tomando como primera aproximación el valor medio entero entre *6* y *13*, esto es *9'5*, pero como *6* y *9* toman valores opuestos en la ecuación, $12(6)^2-144(6)+396<0$ y $12(9)^2-144(9)+396>0$, sabe que la solución está en medio. Vuelve repetir el proceso, tomar un valor entero intermedio entre *6* y *9*, esto es *8*. Y siguiendo así con este proceso llega a considerar que la raíz está comprendida entre *7* y *8*. Finalmente se queda con *7* al estimar que es una buena aproximación de la raíz. Hace lo mismo con los límites iniciales *0* y *6* llegando finalmente a que *4* es una aproximación de la raíz.

Ahora toma la siguiente cascada, $4x^3 - 72x^2 + 396x - 648 = 0$. Repitiendo el proceso para determinar los límites, calcula el "límite" superior de las raíces, $648:4+1=163$ y de este modo obtiene que las raíces están comprendidas entre los números *0, 4, 7* y *163* al considerar *0* como el menor por ser todas positivas, *163* como la mayor y *4* y *7*, las intermedias por ser las raíces de la cascada anterior.

Aplicando el mismo proceso de aproximación, Rolle llega a calcular que *3, 6* y *9* son las raíces de la tercera cascada. Esto conduce a que las raíces del polinomio están comprendidos entre los valores *0, 3, 6, 9* y *649* que son los "límites" de las raíces de $x^4 - 24x^3 + 198x^2 - 648x + 473 = 0$. Usando su proceso de aproximación, llega a encontrar que 1 es una raíz exacta, y después indica que *6, 8* y *10* son raíces aproximadas.

En el caso de que no todas las raíces sean positivas, Rolle realiza una transformación previa basada en el cambio de variable $y=x-h$, donde h es un número suficientemente grande para hacer que todas las raíces sean positivas. Por ejemplo, en el caso

$$x^5 +10x^4+2x^3-110x^2+x-120=0$$

no tiene todas las raíces reales positivas puesto que hay signos positivos consecutivos, entonces haciendo el cambio $y = x -10$, obtenemos

$$(y-10)^5+10(y-10)^4+2(y-10)^3-110(y-10)^2+(y-10)-120=0$$

de donde se obtiene

$$y^5-40y^4+602y^3-4170\ y^2+12801y-13130=0$$

que tiene todos los coeficientes con signos alternos, por lo que sus raíces son todas positivas.

La justificación de Rolle, aportada en *Démonstation…* se basa en el siguiente resultado:

> *Corol. III De la misma manera, es evidente que las raíces (todas positivas y distintas) son números colocados cada uno entre estos límites, y por consiguiente, si las raíces son substituidas en una ecuación cuyas raíces son estos*

límites, esta substitución dará resultados alternadamente positivos y negativos, o negativos y positivos.

Una idea de la demostración, en notación actual, sería la siguiente. Consideremos un polinomio mónico $P(z)$ de grado n con raíces reales positivas y distintas $a > b > c > \ldots > m$, multiplicamos $P(z)$ termino a término por la progresión aritmética $y, y + v, y + 2v, \ldots , y + nv$. Necesitamos mostrar que la cascada resultante $C(z)$ toma valores positivos y negativos (o negativos y positivos) para cada dos raíces consecutivas a, b de $P(z)$, tomadas a, b como límites de las raíces de $C(z)$.

Primero consideremos que podemos escribir $P(z) = (z - a)(z - b)\, K(z)$, donde $K(z)$ es un polinomio Mónico de grado $(n - 2)$. Multiplicamos el producto $(z - a)(z - b) = ab - (a + b)z + z^2$ término a término por y, y + v, y + 2v, de donde obtenemos la cascada parcial $C^*(z) = aby - (a + b)z(y + v) + (y + 2v)z^2 = aby - ayz - byz - avz - bvz + yz^2 + 2vz^2$. Ahora calculamos $C^*(a)$ y $C^*(b)$ obteniendo

$$C^*(a) = (a - b)va \qquad \text{y} \qquad C^*(b) = (b - a)vb.$$

Obsérvese que tanto $C^*(a)$ como $C^*(b)$ no dependen de y, sino sólo de v, razón por la que el teorema es válido para la multiplicación por cualquier progresión aritmética, aunque realmente Rolle, no señala esta puntualización. También podemos observar como ambos valores $C^*(a)$ and $C^*(b)$ tendrán signos opuestos. Y es claro que en el caso de utilizar el polinomio $P(z)$, se obtendría la cascada completa $C(z)$, y en este caso $C(a) = (a - b)vaK(a)$ y $C(b) = (b - a)vbK(b)$. Donde tenemos que considerar que $K(a) \neq 0$, $K(b) \neq 0$ y además $K(a)$ y $K(b)$ tienen el mismo signo puesto que $K(z) = (z - c) \ldots (z - m)$ y habíamos considerado que a y b son mayores que las raíces de $K(z)$.

En las proposiciones siguientes Rolle llega a probar que estos resultados son los mismos cuando se considera cualquier pareja de raíces consecutivas del polinomio, por lo que su método sería válido.

Es importante destacar dos aspectos. Como indica (Barrow-Green, 2009), el primero es que el resultado que Rolle demuestra tiene una gran generalidad, puesto que utiliza cualquier progresión aritmética, no sólo la que produce la derivada 0, 1, 2, 3, … . Por otro lado, la demostración aportada por Rolle en *Démonstrations…* es el resultado inverso a lo que afirmaba en *Algèbre*. Las raíces de cada polinomio son los "límites" de la cascada siguiente, la de mayor grado. Mientras que lo que demuestra es que las raíces de cada Polinomio son los "límites" de cada cascada de grado inferior. Esto es lo que (Cajori, 1911, 301) llama el corolario de Rolle, aunque en realidad era la regla original de Rolle. Pero en definitiva, la importancia de la demostración radica en el hecho de que el método de las cascadas ofrece las garantías necesarias para localizar todas las raíces reales de la ecuación original.

EL TEOREMA DE ROLLE DURANTE LOS SIGLOS XVIII Y XIX

Este resultado fue aceptado con normalidad y difundido en Europa con rapidez, así lo podemos encontrar en 1708 en libro de Charles-René Reyneau *Analyse demontrée ou la methode de résoudre les problêmes des mathematiques* (Análisis demostrado o los métodos para resolver problemas matemáticos) (Reyneau, 1708) y en un artículo de Colin Maclaurin (1698-1746) publicado en *Philosphical Transactions* en 1729 e incluido en su tratado póstumo de álgebra de 1748 (Maclaurin, 1748). Pero en ninguna de estas referencias el Teorema de Rolle fue considerado como un teorema del cálculo, sino dentro de su contexto original: un resultado de álgebra.

La primera vez que se encuentra este teorema en un tratado relacionado con el Cálculo es de la mano de Leonhard Euler (1707-1783) en 1755 cuando incluye una versión del Teorema en *Institutiones calculi differentialis* (Euler,1755, 657–660). El teorema sigue apareciendo dentro de un contexto de resolución de ecuaciones, pero ahora por primera vez aparece expresado en términos del lenguaje del cálculo.

Supongamos la ecuación $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - \ldots = 0$ con raíces distintas $p < q < r < \ldots$. Euler considera la función general $z = x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \ldots$ en la que x viene creciendo desde "$-\infty$"

> […] que conforme x va tomando valores mayores, es evidente que z tomará valores mayores que cero o menores que cero, pero no se anula antes de poner $x = p$, en cuyo caso $z = 0$. Como los valores de x se incrementan más allá de p, los valores de z serán positivos o negativos, hasta llegar al valor $x = q$, en cuyo caso nuevamente $z = 0$. Por tanto es necesario, ya que los valores del movimiento de z son desde 0 hasta 0, en medio, z tendrá o bien un valor máximo o mínimo (Euler 1755, p. 657-658).

Euler había demostrado anteriormente que los valores de x que hacen máxima o mínima la función z son las raíces de la ecuación diferencial

$$\frac{dz}{dx} = nx^{n-1} - (n-1)\,Ax^{n-2} + \cdots = 0,$$

y así podría seguir la discusión:

> Dado que entre dos raíces reales cualesquiera de la ecuación $z = 0$ este es uno de los casos, la función z alcanza un máximo o mínimo, se deduce que si la ecuación $z = 0$ tiene dos raíces reales, entonces la ecuación $\frac{dz}{dx} = 0$ tiene necesariamente una raíz real. Igualmente, si la ecuación $z = 0$ tiene tres raíces reales, entonces la ecuación $\frac{dz}{dx} = 0$ sin duda tiene dos raíces reales. Y, en general, si la ecuación $z = 0$ tiene m raíces reales, la ecuación $\frac{dz}{dx} = 0$ necesariamente tiene por lo menos $(m - 1)$ raíces. (Euler 1755, p. 660-661).

Esta presentación del Teorema de Rolle por Euler es bastante diferente de la de sus predecesores. Por un lado, por primera vez, con la ayuda del cálculo, no necesita del método de las cascadas, aunque sí se sigue manteniendo en el contexto de las ecuaciones polinómicas.

La siguiente versión, bastante más abreviada la encontramos en el *Traité de la résolution des équations numériques*… de Joseph Louis Lagrange (1736-1813):

> En primer lugar está claro que la ecuación $F(x) = 0$ de grado m tendrá m raíces reales y que la ecuación $F'(x) = 0$ de grado $m - 1$ necesariamente tendrá $m - 1$ raíces reales, ya que entre dos raíces reales consecutivas de la ecuación $F(x) = 0$, siempre hay una raíz real de la ecuación $F'(x) = 0$. (Lagrange 1798, Nota VIII, p. 12).

Aunque Lagrange hace referencia en párrafos anteriores a la Regla dada por Rolle, tal como figura en el *Algèbre*. Lagrange se refirió en este teorema a la propia versión dada por Euler en *Institutiones calculi differentialis* en su discusión posterior. Es decir, Lagrange no atribuye el teorema a Rolle en esta versión más moderna.

En años posteriores el teorema apareció en una serie de libros de texto sobre la teoría de ecuaciones, pero seguía sin ser asociado con Rolle. Según indica Cajori (Cajori 1911, 309), la primera persona que otorga el nombre de "Teorema de Rolle" es Wilhelm Drobisch (1802-1896). Drobisch, fue profesor de matemáticas en la Universidad de Leipzig y destaca "Sätze Rolle" en un libro de texto de 1834 (Drobisch, 1834, 179). Incluyendo una cita en la indica cómo la Nota VIII de Lagrange fue su fuente a pesar de que el propio Lagrange no la había asociado con él.

Seis años más tarde, François Moigno (1804-1884), profesor de matemáticas en College Sainte Geneviève de París, incluye la frase de "El teorema de Rolle" en el título de un artículo que trata sobre la determinación de las raíces (Moigno, 1840). Lo mismo hace el matemático e historiador de las matemáticas, Orly Terquem en 1844.

Poco tiempo después, Joseph Liouville (1864, 84) demostró una extensión del teorema para raíces complejas, y lo describió como "le Théorème celebre de Rolle". Sin embargo, según Cajori (1911, 309), debemos esperar hasta 1868, cuando el teorema se atribuye definitivamente a Rolle. Es a partir de una edición alemana del célebre *Cours d'algèbre supérieure* del Joseph Serret (1819-1885) cuando la asociación con Rolle se hizo más conocida.

Hasta mediados del siglo XIX, el Teorema seguía asociado a la resolución de ecuaciones y según indica Cajori (1911, 310) fue Pierre-Ossian Bonnet (1819-1892) quien asocia los dos teoremas fundamentales del Análisis: el Teorema del Valor medio y El Teorema de Rolle, aportando la demostración del primero a partir del segundo.

Y finalmente, es Charles Hermite (1822-1901) quien en 1873 utiliza el Teorema de Rolle en el contexto de la Teoría de series de Taylor dando la autoría del Teorema de forma clara a Rolle en su *Cours d'analyse*:

> "Cuando una función continua es igual a cero para dos valores x_0 y X, la derivada, si ella misma es continua, se anula para un valor comprendido entre x_0 y X.
>
> Esta última proposición, es decir, el teorema de Rolle, junto con las reglas de la aritmética y álgebra permiten calcular con facilidad las derivadas de las sumas, productos y potencias de funciones, es suficiente para determinar las series de Taylor (Hermite 1873, p. 48).

A inicios del Siglo XX volvieron a surgir ciertas dudas sobre la auténtica autoría de Rolle. Esto fue debido a que se había extendido entre los matemáticos únicamente la parte breve expresada en *Algèbre* y no la versión de *Démonstratio*… Finalmente, cuando Gustaf Eneström (1852-1823) afirma en un artículo en *Bibliotheca mathematica* (1906, 301-302), después de haber leído Reyneau (1708), que la lectura de *Démonstration*… era suficiente para despejar cualquier duda, el asunto sobre la autoría fue zanjado definitivamente.

CONCLUSIONES

En realidad, como se muestra la aportación de Rolle no contiene nada que tenga relación alguna con el recién nacido cálculo diferencial. De hecho el nombre de Michel Rolle en los textos sobre historia del análisis matemático solo figura como uno de los principales críticos respecto a las recién nacidas cantidades infinitesimales. Puede resultar sorprendente que uno de los principales teoremas del cálculo diferencial tenga su origen en el álgebra, y más sorprendente aún que el autor del mismo fuera una persona contraria al uso de tales técnicas.

Si se tienen en cuenta los orígenes hindúes del mismo dados por Bhaskara se observa que hay en él una componente intrínseca que tiende a este resultado final, a pesar de que la motivación que llevaron a Michel Rolle a formularlo, así como las técnicas utilizadas en su demostración, sean puramente algebraicas, por lo que esta "sorpresa" se transforma en una llamativa anécdota.

No debemos olvidar que en su proceso histórico, la mayor parte de la vida del teorema se ha mantenido en sus orígenes, como un teorema algebraico de gran utilidad en el campo del análisis. La transición del teorema desde álgebra hacia el análisis tiene su origen en la genialidad de Euler, y aun así, a pesar de la devoción que la comunidad matemática tenía de tan notable autor, el teorema tardó más de un centenar de años para convertirse en un resultado importante en el cálculo.

El hecho de que Serret y Hermite lo transformen en un resultado del análisis se comprende bien si se tiene en cuenta la obra del Serret y Hermite. El creciente interés en una correcta fundamentación de los principios del cálculo a finales del siglo XIX llevó a autores como Serret y Hermite a buscar y usar principios del álgebra como elementos esenciales de la teoría del análisis.

Concomitante a esta transición fue el creciente reconocimiento de Rolle como el autor original del teorema. Ahora bien, debido al creciente interés por el teorema en el cálculo diferencial y abandono de sus orígenes del mismo, la asociación con Rolle también se ha alejado de sus orígenes. Es lamentable ver como el artículo sobre el Teorema de Rolle en Wikimatematica (y en libros de texto de bachillerato) indican versiones tan alejadas de la realidad como la siguiente:

> El teorema de Rolle, llamada así en honor del matemático francés Michel Rolle (1652-1719), quien publicó por primera vez el teorema de Rolle en un libro titulado "Méthode pour résoudre les égalitéz" en 1691. Sin embargo, tiempo después, se volvió un fuerte crítico de los métodos de su época y atacó de manera directa al cálculo. Su teorema decía lo siguiente: si una curva regular sale y llega a la misma altura, en algún punto tendrá tangente horizontal. Si la función empieza subiendo, tendrá luego que bajar para reencontrar su valor inicial, entre la subida y la bajada, hay un punto donde la función alcanza un máximo, y en éste, f ' se anula. Lo mismo sucede si la función empieza bajando, y f ' es nula en el mínimo de f."

Donde claramente se confunden versiones de unos y otros autores como se ha expuesto anteriormente.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Barrow-Green, J. (2009). From cascades to calculus: Rolle's theorem. En Eleanor Robson and Jacqueline Stedall (Eds) *The Oxford handbook of the history of mathematics*. 737-754. New York: Oxford University Press Inc.

Cajori, F. (1911). On Michel Rolle's book "Methode pour résoudre les egalitez" and the history of "Rolle's Theorem". *Bibliotheca mathematica*, 11, 300–313.

Cajori, F. (1993). *A History of mathematical notations*. (Two volumes bound as one.) New York: Dover publications, Inc.

Chabert, J. L. (ed) (1999). *A history of Algorithms.* Berlin: Springer.

Descartes, R. (1987). *Discurso del Método, Dióptrica, Meteoros y Geometría*. Madrid: Ediciones Alfaguara.

Drobisch, M. W.(1834). *Grundzüge der Lehre von den höheren numerischen Gleichungen.* Leipzig.

Eneström, G. (1906). Kleine Mitteilungen. *Bibliotheca mathematica*, 7, 282–309.

Euler, L. (1755). *Institutiones calculi differentialis*. St Petersburg.

Gheverghese J. G. (1996.) *La Cresta del Pavo real. Las matemáticas y sus raíces no europea*s. Madrid: Pirámide.

Goldstine, H. H. (1977). *A history of numerical analysis from the 16th through the 19th century*. New York: Springer Verlag.

Gua de Malves, A. J. P. (1741.a). Demonstrations de la règle de Descartes. *Memoires de l'Academie Royale de Sciences de París*, 72–97.

Gua de Malves, A. J. P. (1741b). Recherche du nombre des racines réelles ou imaginaires. *Memoires de l'Academie Royale de Sciences de París*, 435–495.

Hermite, C. (1873) *Cours d'analyse de l'École Polytechnique*. Paris.

Kline, M. (1994). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*. Madrid. Alianza

Lagrange, J. L. (1798). *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés*. Paris.

Mancosu, P. (1989) The Metaphysics of the Calculus: A Foundational Debate in the Paris Academy of Sciences, 1700-1706. *Historia Mathematica*, 16, 224-248.

Maclaurin, C. (1729). A second letter [...] concerning the roots of equations. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 36, 59–96.

Maclaurin, C. (1748). *A treatise of algebra, in three parts*, London.

Moigno, F. (1840). Note sur la détermination du nombre des racines réelles ou imaginaires d'une équation numérique comprises entre des limites données. Théorèmes de Rolle, de Budan ou de Fourier, de Descartes, de Sturm et de Cauchy. *Journal de mathématiques Pures et Appliquées*, 5, 75–94.

Reyneau, C. (1708). *Analyse demontrée ou la methode de résoudre les problêmes des mathematiques*. Paris.

Rolle, M. (1690). *Traité d'algebre*. Paris: Michallet

Rolle, M. (1691). *Démonstration d'une Methode pour resoudre les égalitez de tous les degrez; suivie de deux autres Methodes, dont la premiere donne les moyens de resoudre ces mêmes égalitez par la Geometrie, et la seconde, pour resoudre plusieurs questions de Diophante qui n'ont past encore esté resoluës*. Paris.

Smith, D. E. (1959). *A Source book in mathematics*. New York. Dover

Terquem, O. (1844) Théorèmes de Descartes, de Rolle, de Budan et Fourier, de Mm. Sturm et Cauchy deduits d'un seul principl. *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3, 188–194, 209–213, 555–565, 577–580.

American Council of Learned Societie (1991). *Biographical dictionary of mathematicians* New York: Charles Scribner's sons.