Epsilon - *Revista de Educación Matemática* 2011, Vol. 28(1), nº 77, pp. 51-64

Historia y didáctica: el caso del escrito de L'Hôpital *Analyse des Infiniment Petits pour L'intelligence Des lignes Courbes*

Luis Augusto Campistrous
Profesor titular de la Universidad Autónoma de Guerrero
Jorge M. López Fernández
Catedrático de Matemáticas, Universidad de Puerto Rico, Río Piedras
Celia Rizo Cabrera
Profesora titular de la Universidad Autónoma de Guerrero

Resumen: *En ninguna parte del famoso texto de L'Hôpital se demuestra la regla de la cadena, es decir, la regla para la diferenciación de funciones compuestas. En los escritos de análisis de Euler tampoco se ofrece demostración alguna o justificación para tal regla. En este artículo se afirma la naturalidad de la mencionada regla en el lenguaje de los infinitésimos y los diferenciales, propios de la época. Tal circunstancia hace la regla tan evidentemente válida, al punto de no requerir demostración explícita. Además, la regla fue concebida como algoritmo para calcular las derivadas de funciones que resultan de otras funciones diferenciables luego de efectuar sustituciones de variables, también diferenciables. Es anacrónico imaginar que la regla de la cadena según empleada en los escritos de L'Hôpital y de Euler tiene alguna relación con la composición de funciones. En la historia de la matemática la noción de composición de funciones surge al menos dos siglos después de la publicación del escrito de L'Hôpital. Finalmente, se argumenta la ventaja didáctica de presentar la regla de la cadena como un algoritmo para hallar la derivada (diferencia) de una función que se obtiene a partir de otra función diferenciable efectuando una sustitución de variables, también diferenciable.*

Palabras clave: *regla de la cadena, composición de funciones, infinitesimales, diferenciales, sustitución de variables.*

Abstract: *Nowhere in L'Hôpital's famous textbook is the chain rule (the rule for differentiating the composition of two functions) proved. It is neither proved or justified in any of Euler's analysis books. In this article the authors contend that this rule is obvious in the language of infinitesimals and differentials, common in L'Hôpital times. Such a circumstance makes the chain rule so clearly valid as to require no explicit proof. Furthermore, the rule was conceived as an algorithm for calculating derivatives of functions that are obtained from other differentiable functions by* *substitution of variables that are also differentiable. It is an anachronism to imagine that the chain rule as used in L'Hôpital's and Euler's writings has any relation with the composition of functions. In the history of mathematics, the composition of functions is defined at least two centuries after the publication of L'Hôpital's work. Finally, arguments are presented to document the didactic advantage of teaching the chain rule as an algorithm to find the derivative (difference) of a function that is obtained from a differentiable function by substituting a differentiable variable.*

Keywords: chain rule, composition of functions, infinitesimals, differentials, substitution of variables.

INTRODUCCIÓN

A la escasa edad de 15 años Guillaume François Antoine L'Hôpital ganó notoriedad por haber resuelto un problema[1] planteado por Blaise Pascal relativo a la cicloide. Hoy día recordamos a L'Hôpital principalmente por la famosa regla del cálculo que lleva su nombre, la cual aparece por primera vez en su escrito *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes*, publicado en París en 1696 (véase [L'Hôpital, 1696, p. 145]). Sabemos que L'Hôpital fue un acaudalado ciudadano francés, quien ostentó varios títulos de nobleza (entre ellos el de Marqués de San Mesme), y quien se dice, aprendió el cálculo del matemático Suizo Johann Bernoulli entre los meses postreros del año 1691 y el mes de julio de 1692. Durante este período de tiempo L'Hôpital empleó a Bernoulli como su tutor de cálculo y también pactó con éste último un curioso arreglo financiero, mediante el cual, a cambio de una mesada, él pasaba a ser dueño de todos los descubrimientos matemáticos de Bernoulli. A pesar de tal arreglo, hoy día se piensa que L'Hôpital fue un matemático muy competente y de grandes méritos propios. Hoy sabemos que la famosa regla de L'Hôpital se debe realmente a Johann Bernoulli y que, de acuerdo a [Dunham, 2005, p. 36], lo mismo es cierto de gran parte del escrito de L'Hôpital. Bernoulli hizo múltiples apologías a favor de quien él llamó el "celebrado Leibniz" como inventor del cálculo, abonando así a la famosa polémica relativa a la invención de esta disciplina matemática. En el prefacio de [L'Hôpital, 1696] el autor reconoce "deber mucho a las lumbreras de los señores Bernoulli", en especial "al joven profesor de la Universidad de Groninga", refiriéndose particularmente a Johann Bernoulli. L'Hôpital puntualiza, además, refiriéndose a los dos hermanos Bernoulli así como a Leibniz, "haber empleado libremente sus resultados" y manifiesta no tener reparo alguno con que estos últimos reclamasen como suyos los resultados del escrito que quisieran y que él se contentaría con lo que "ellos tuviesen a bien dejarle". Sin embargo, el crédito otorgado a Bernoulli por L'Hôpital, parece no haber constituido suficiente reconocimiento para el primero, ya que de acuerdo a [Dunham, 2005, p. 36], Bernoulli terminó por acusar a L'Hôpital de haberse "lucrado del talento de otros". Tal acusación parecería un tanto curiosa siendo que Benoulli fue quién *literalmente* empleó su talento para lucrarse de L'Hôpital. Sobre esta misma polémica, comenta [Dunham, 2005], el

1. Sin duda, en compañía de otros.

afamado historiador de la matemática Dirk Jan Struik (véase [Struik, 1963]) hace una recomendación muy sucinta: "Dejemos que el buen Marqués conserve su elegante regla; después de todo él pagó por ella".

Figura 1
Portada de *Analyse des infiniment petits* y
figura de Guillaume François Antoine L'Hôpital

Es menester señalar que [L'Hôpital, 1696] es un texto de cálculo diferencial y que no incluye ningún tema de lo que hoy conocemos como cálculo integral. El propio L'Hôpital en el prefacio del escrito nos explica que su decisión de omitir el cálculo integral en su escrito surge a raíz de una carta que Leibniz le cursó en la que le indicaba su intención de publicar su trabajo corriente sobre el tema en un tratado que llevaría como título "De la ciencia infinita". L'Hôpital decidió entonces "no privar al público de esa fina pieza de trabajo" de Leibniz, en la que se discutiría "el método inverso de las tangentes aplicado a la rectificación de curvas, a la determinación de las cuadraturas de los espacios que ellas encierran, a la investigación sobre las superficies de los cuerpos que ellas describen, a la determinación de la dimensión de tales cuerpos[2] , al descubrimiento de sus centros de gravedad, etc". Otra observación importante sobre *Analysis des infiniment petits* es su parcialidad a favor del formalismo propuesto para el cálculo por Leibniz por sobre el de Newton. Manifiesta L'Hôpital que Newton también descubrió "algo parecido al cálculo diferencial" y que su "excelente *Principia*[3]", publicada inicialmente en 1687, "depende en su totalidad del empleo del cálculo mencionado". L'Hôpital agrega que la notación de Leibniz "es mucho más fácil y expedita [...que la de Newton...], sin mencionar la maravillosa ayuda que proporciona en múltiples ocasiones". Hoy sabemos que L'Hôpital manifestaba con tales palabras una conocida opinión de Johann Bernoulli, quien estuvo claramente parcializado a favor de Leibniz en la polémica relativa a la invención del cálculo. El escrito de

2. Entiéndase volumen.
3. Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica.

L'Hôpital fue determinante en la adopción del formalismo de Leibniz en toda la Europa continental. Como sabemos, esta es una de las principales razones que explica el desarrollo más acelerado del análisis en el continente europeo que en Inglaterra, donde se empleó el formalismo de Newton.

LA DEFINICIÓN DE DERIVADA EN *ANALYSE DES INFINIMENT PETITS*

El análisis que se presenta en *Analyse des infiniment petits* es, como se manifiesta en (L'Hôpital, 1696), "un nuevo tipo de análisis distinto al *análisis común*". Explica L'Hôpital que el análisis común se ocupa del estudio de *cantidades finitas* mientras que el análisis de su escrito se "extiende al infinito" ya que trata sobre números infinitos, es decir, números infinitamente pequeños (infinitésimos) o infinitamente grandes. De acuerdo a L'Hôpital, Analyse des infiniment petits recoge métodos muy poderosos, los cuales no sólo superan marcadamente los métodos para el cálculo de tangentes de curvas empleados por Descartes, Fermat y Barrow, sino que también permiten descubrir la "verdadera naturaleza de las líneas curvas". En esta sección presentamos y comentamos los fundamentos del cálculo de L'Hôpital y examinamos su definición de derivada, llamada por él *diferencia* en (L'Hôpital, 1696, Definición II, p. 2), así como su definición de la tangente a una curva dada (L'Hôpital, 1696, Sección II, Definición, p. 11).

La Definición I de la Sección Primera de la Primera Parte del escrito de L'Hôpital define una (cantidad) *variable* como aquella que "aumenta o disminuye" continuamente y una (cantidad) *constante* como una que "continúa siendo la misma mientras otras cambian". En L'Hôpital (1969) se ofrece como ejemplo el de una parábola, y se dice que las abscisas y las ordenadas de la misma constituyen variables, mientras que el "parámetro" de la parábola es una constante. Desde luego, se infiere de esta definición, un tanto oscura, que podrían existir "dependencias" entre unas variables y otras, de suerte que, en principio, uno podría observar los cambios que las variables "dependientes" experimentan mientras las variables de las cuales dependen varían, es decir, aumentan o disminuyen.

La noción de variable fue precursora de la noción moderna de función, pero en la época de L'Hôpital tal noción no se había formulado aún, e incluso la forma moderna de expresar esta relación de dependencia entre unas variables y otras empleando funciones no existía. Poco menos de un siglo más tarde, en (Euler, 1748), se discute extensamente la noción de función[4] , aunque Euler no emplea la notación funcional. En los cursos introductorios de cálculo modernos aún se emplea este vocabulario y se dice, específicamente, que y es la variable *dependiente* y que x es la variable *independiente*. En la Definición II de L'Hôpital (1696, p.2) se dice que la *diferencia* de una cantidad variable es la porción "infinitamente pequeña" por la que aumenta o disminuye la cantidad; véase la Figura 2. Esto es lo más cercano que llega L'Hôpital a definir la derivada, es decir, para L'Hôpital una *diferencia* corresponde a lo que hoy día llamaríamos un *diferencial*, noción que, como

4. La noción euleriana de función según definida en [Euler, 1748, p. 4, 4] dista mucho de su versión moderna; véase, por ejemplo, la discusión en [Euler, 1748, p.8, 11] sobre "funciones biformes".

se sabe, está íntimamente relacionada con la noción de derivada. Empleando la notación funcional moderna, la diferencia de la variable $y=f(x)$, en símbolos dy, se define mediante la relación $dy = f(x+dx) - f(x)$, donde dx es un infinitésimo.

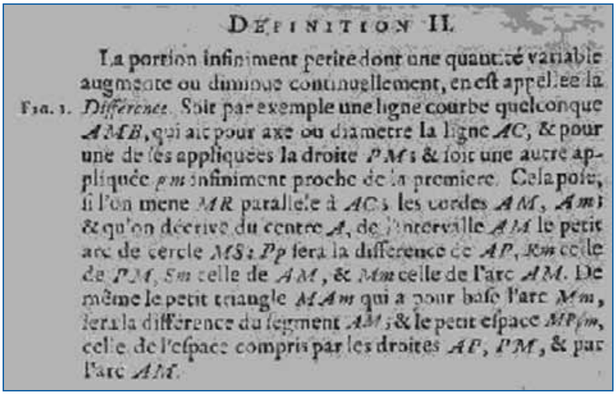
DEFINITION II.

Fig. 1. La portion infiniment petite dont une quantité variable augmente ou diminue continuellement, en est appellée la *Différence*. Soit par exemple une ligne courbe quelconque *AMB*, qui ait pour axe ou diametre la ligne *AC*, & pour une de ses appliquées la droite *PM*; & soit une autre appliquée *pm* infiniment proche de la premiere. Cela posé, si l'on mene *MR* parallele à *AC*; les cordes *AM*, *Am*; & qu'on décrive du centre *A*, de l'intervalle *AM* le petit arc de cercle *MS*: *Pp* sera la difference de *AP*, *Rm* celle de *PM*, *Sm* celle de *AM*, & *Mm* celle de l'arc *AM*. De même le petit triangle *MAm* qui a pour base l'arc *Mm*, sera la différence du segment *AM*; & le petit espace *MPpm*, celle de l'espace compris par les droites *AP*, *PM*, & par l'arc *AM*.

Figura 2
Definición de diferencia en *Analyse des infiniment petits*

Aunque, en general, dy es un infinitésimo, las variables en las que L'Hôpital está interesado son precisamente aquellas para las cuales el cociente dy/dx es *finito* para todo infinitésimo distinto de cero dx. Es menester apuntar que en L'Hôpital (1696, Art. 2 p.2) se toma como principio básico o supuesto el que afirma que en todo argumento matemático se podrá "emplear indistintamente cualquiera de dos cantidades que difieran una de la otra por un infinitésimo". Como se verá, este principio es fundamental en el cálculo de diferencias. La Fig. 1 a la que se hace referencia en la Definición II se ha incluido como la Figura 3 de nuestro escrito[5]. He aquí nuestra traducción de la Definición II:

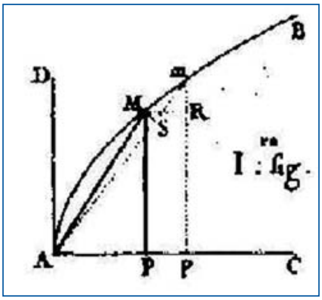

Figura 3
Figura asociada a la definición II de *Analyse des infiniment petits*

5. Por razones de índole tipográfica propias de la época, las figuras de *Analyse des infiniment petits* aparecen en páginas aparte, separadas del texto principal del escrito.

La porción infinitamente pequeña por la que aumenta o disminuye continuamente una cantidad variable se llama la *diferencia* de tal cantidad. Por ejemplo, sea *AMB* una línea curva cualquiera, la cual tiene como eje o diámetro la línea *AC*, sea la recta *PM* una de sus ordenadas y sea la recta *pm* otra ordenada infinitamente cerca de la primera. Así pues, si se dibuja el segmento *MR* paralelo a *AC* y se trazan las cuerdas *AM* y *Am*; y desde el centro *A* con distancia *AM* se describe el pequeño arco circular *MS*, entonces: *Pp* es la diferencia de *AP*, *Rm* la de *PM*, *Sm* la de *AM*, *Mm* la del arco *AM*. De manera análoga, el pequeño triángulo *MAm* teniendo como base el arco *Mm* será la diferencia del segmento *AM* y el espacio pequeño *MPpm* será la diferencia del espacio contenido entre las rectas *AP* y *PM* y el arco *AM*.

Como corolario de la Definición II, L'Hôpital establece de inmediato que las diferencias de las variables constantes son cero y señala que habrá de reservar la letra *"d"* para denotar las diferencias en su escrito. Acto seguido L'Hôpital da nombre a todas las variables involucradas en la Definición II e indica la representación geométrica de cada una de ellas. Esta información se resume en forma tabular en la Figura 4.

El resto de la sección primera de *Analyse des infiniment petits* se dedica a la demostración de las reglas usuales de las diferencias. Por ejemplo, en el Problema planteado en la Proposición II (L'Hôpital, 1696, p.4), se demuestra la regla para calcular el producto de dos variables. Si se quiere calcular la diferencia del producto xy, se incrementa cada una de las variables en un infinitésimo y se calcula la diferencia:

$$(x + dx), (y + dy) - xy = xdy + ydx + dx, dy$$

Por el Artículo 1 (L'Hôpital, 1696, p. 4), la expresión de la derecha se puede sustituir por $xdy+ydx$ ya que esta última expresión difiere de la original por un infinitésimo, es decir,

$$(x + dx), (y + dy) - xy = xdy + ydx$$

y esta es la regla para determinar la diferencia de un producto. Expresado de otro modo,

$$d(xy) = xdy + ydx,$$

Para terminar esta sección comentamos sobre la definición de la recta tangente a una curva dada propuesta en L'Hôpital (1696, p. 11). Como se había indicado en la discusión de la Figura 3, las ordenadas *PM* y *pm* están infinitamente cerca la una de la otra y la recta tangente a la curva dada en el punto *M* se define como la prolongación del segmento infinitésimo *Mm*. En el caso que tal recta corta el eje horizontal, digamos, en el punto *T* distinto de *P*, L'Hôpital demuestra que

$$PT = \frac{ydx}{dy}.$$

Variable		Diferencia		Descripción
AP	x	*Pp*	dx	abscisa
PM	y	*Rm*	dy	ordenada
AM	z	*Sm*	dz	longitud de radio vector
arco AM	u	*arco Mm*	du	longitud de arco
área APM	s	*área MPpm*	ds	área debajo de la curva en coordenadas rectangulares
segmento AM	t	*MAm*	dt	área en coordenadas polares

Figura 4
Tabla de las variables y las diferencias discutidas por L'Hôpital

Esto indica, desde luego, que en el caso descrito si uno de dx o dy son infinitésimos distintos de cero, también lo es el otro y dx/dy es *finito* y *constante*; comentarios análogos aplican a dy/dx. Hoy día, empleando el análisis no estándar (véase la Sección IV de este artículo), diríamos que todos los cocientes dy/dx para infinitésimos dx distintos de cero están infinitamente cerca de un número real único. Este número real se describe como la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto M definido según la discusión de L'Hôpital. Claro está, hoy pensaríamos en la curva dada como la gráfica de una cierta función, diferenciable en la abscisa del punto M. Empleando la notación funcional moderna, diríamos que la gráfica de la función[6] $y = f(x)$ tiene una recta tangente en el punto de su gráfica cuya abscisa es $x = c$ si existe un número real único $f^1(c)$ (la pendiente de la recta tangente) tal que para todo infinitésimo dx tenemos que dy está infinitamente cerca de $f^1(c)dx$; nótese que no hay que hacer excepción alguna con el caso $dx = 0$.

UNA OMISIÓN NOTABLE EN *ANALYSE DES INFINIMENT PETITS:* LA REGLA DE LA CADENA

Se pensaría que alguien con buena imaginación (y se presume, con cierta afición al pensamiento metafórico) dio el nombre de "regla de la cadena" a la regla de diferenciación de funciones compuestas. Supongamos que $y = f(u)$ y $u = g(x)$ son funciones que se pueden componer, es decir, que la función $y = f(u) \equiv f(g(x))$ existe (digamos) en algún intervalo abierto que contiene al punto $x = c$. Entonces el enunciado moderno más general de la regla de la cadena para funciones de una variable real es el siguiente:

Teorema 1 (Regla de la cadena) Si $u = g(x)$ es diferenciable en un punto x y $y = f(u)$ es diferenciable en el punto $u = g(x)$ entonces la función compuesta $y = f(g(x))$ es diferenciable en x y la siguiente relación se cumple:

6. O también, una función cuyas coordenadas x y y están dadas como funcionones de un parámetro t.

$$(f \circ g)^{1}(x) = f^{1}(g(x)) \cdot g^{1}(x); \quad (1)$$

aquí el símbolo "∘" es el usualmente empleado para designar la composición de dos funciones. El enunciado (1) es muy preciso ya que indica con toda claridad la dependencia de la derivada de la función compuesta $y = f(g(x))$ con las derivadas de cada una de las funciones dadas (es decir, $y = f(u)$ y $u = g(x)$) y, además, indica explícitamente dónde se evalúan tales derivadas. Más aún, (1) muestra que la derivada de la composición, pensada ésta como una "multiplicación", se transforma en el "producto" de las derivadas de las funciones individuales. Sin embargo, esta interpretación de la regla de la cadena no es aplicable a los escritos de L'Hôpital y de Euler. Quizás el lector moderno se sorprenda al saber que transcurrieron casi dos siglos antes de que la regla de la cadena se pudiese interpretar como una aseveración sobre la diferenciación de funciones compuestas.

La demostración de la regla de la cadena en el análisis que L'Hôpital llamaría "común" es una, sin duda, un tanto artificial. La demostración comienza bien desde el punto de vista didáctico, pero luego se torna un tanto artificiosa y poco intuitiva. Para los detalles supondremos que $y = f(g(x))$, $\Delta x \neq 0$, y que $\Delta u \neq g(x + \Delta x) - g(x)$. Entonces,

$$\frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \quad , (2)$$

y tomando límites en ambos lados de esta expresión cuando $\Delta x \to 0$, obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad . (3)$$

Esta es la regla de la cadena y en esta notación, la regla parece una relación trivial entre dos fracciones. Esta "demostración" parecería muy sugestiva y clara si no fuera porque adolece de un grave error: no podemos suponer que en la relación anterior que $\Delta u \neq 0$. A pesar de ello, la "demostración", no está falta de sutilezas teóricas, ya que para deducir (3) es necesario observar de paso que

$$lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dy} \quad . (4)$$

El grave defecto de este argumento, dicho sea de paso, se puede "reparar" como hacen muchos textos modernos de cálculo. Sin embargo, como veremos, se podría decir que la "reparación" hace mucho menos natural a la prueba. Veamos. Empleando la misma notación, definimos la función

$$\varphi(\Delta u) = \begin{cases} \frac{\Delta y}{\Delta u} \; si \; \Delta u \neq 0 \\ \frac{dy}{du} \; si \; \Delta u = 0 \end{cases} \quad . (5)$$

Claramente,

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = \varphi(\Delta u)\ \frac{\Delta u}{\Delta x} \quad (6)$$

es siempre válida, ya que si Δu = 0, la relación se reduce a 0 = 0 la relación , y de lo contrario es obvia. Por la continuidad de φ *en* Δu = 0, vemos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}\ . \quad (7)$$

De nuevo, (7) es la regla de la cadena.

Sin embargo en el "análisis infinito" de L'Hôpital la regla es harto evidente y apenas requiere explicación alguna. Si $y = f(u)$ y $u = g(x)$ son funciones diferenciables y "componibles" entonces, empleando la notación funcional y las definiciones introducidas anteriormente, tenemos

$$dy = (f(u + du) - f(u){\sim}f'(u)du{\sim}f'(g(x))g'(x)dx; \quad (8)$$

aquí *du* y *dx* son ininitésimos y el símbolo "~" significa "estar infinitamente cerca de". En otras palabras, la regla de la cadena resulta muy natural y obvia, y parecería que la misma se reduce a un asunto de una mera "sustitución" de variables. Ciertamente el argumento presentado anteriormente como prueba de la regla de la cadena, parecería, por decirlo de algún modo, irrelevante e impertinente, y levanta un "falso" problema relativo a una división por cero. Ciertamente la demostración en el análisis de infinitésimos tiene un "aire" de mucha naturalidad y falta de sorpresas.

Algo que podría resultar sorprendente a un estudioso moderno de la matemática al leer a L'Hôpital (1696) es la ausencia total de la regla de la cadena en su escrito. En efecto, en *Analyse des infiniment petits* no hay discusión alguna sobre algún procedimiento equivalente a la regla. Ni siquiera merece comentario alguno su aplicación. Sin embargo, podría considerarse aún más insólito que en ningún lugar de Euler (1748 y 1755) aparece comentada o demostrada la regla de la cadena. A nuestro juicio, este dato, tan particular y curioso, es muy revelador ya que aporta al entendimiento del desarrollo histórico de la matemática en general y del cálculo en particular. Además, el dato lleva, como veremos, a reflexiones interesantes sobre la didáctica del Cálculo.

Parecería que la primera mención de la regla de la cadena en la literatura ocurre en la memoria inédita de Leibniz traducida por J. M. Child (Leibniz, 2005). En ella Leibniz indica como hallar $d(\sqrt{(a + bz+cz^2\ )})$ mediante la sustitución $x = a + bz\ cz^2$. Es esta memoria no hay demostración o explicación de la regla, e incluso hay varios errores en el cálculo de la diferencia ilustrada. Las ideas originales del cálculo de Leibniz aparecen publicadas en 1684 en una memoria de apenas seis páginas donde el presenta las ideas básicas de su cálculo, las reglas para calcular diferencias así como su definición de tangente. De acuerdo a Klein

(1972, p. 377), los hermanos Bernoulli comentan respecto al escrito[7] de Leibniz que el mismo constituye "un enigma más que una explicación".

La primera indicación del tratamiento peculiar de la regla de la cadena en *Analyse des infiniment petits* comienza en L'Hôpital (1696). En esta parte del escrito, L'Hôpital, además de definir la derivada de una variable (más bien, *la diferencia*, como señalamos antes), calcula las diferencias de sumas, restas, productos y cocientes de variables. Más adelante, se plantea el problema de calcular la diferencia de una potencia "perfecta o imperfecta" (es decir, entera o racional) cualquiera, y se demuestra la regla usual: $dx^r=rx^{r-1}dx$ para un exponente racional cualquiera r. Resulta entonces muy curioso que el primer ejemplo para ilustrar la aplicación de esta regla en el caso $r = 3$ es el cálculo de la diferencia de $(ay - x^3)^3$ (véase L'Hôpital, 1696, p. 9, Exemples). Desde luego, para completar este cálculo es necesario emplear la regla de la cadena, y L'Hôpital lo hace sin haberla comentado o demostrado antes. La relación (8), escrita en lenguaje moderno, nos hace ver que la demostración de la regla de la cadena es poco más o menos que trivial cuando se emplea el lenguaje de infinitésimos.

Claro está, la notación funcional aludida brilla por su ausencia en *Analyse des infiniment petits* y lo más sorprendente es que también ocurre lo mismo en Euler (1748, 1755). Sin embargo, en sus escritos Euler emplea constantemente el término "función" y dedica el primer capítulo al tema de las funciones en general (Euler, 1748). En los capítulos II y III de Euler (1748), se tocan los temas "Sobre la transformación de funciones" y "Sobre la transformación de funciones por sustitución" y esto es, hasta donde sabemos, lo más cercano que llega Euler a la noción de "composición" de funciones. En efecto, de acuerdo a Cajori (1929), el primer ejemplo del empleo de un símbolo especial para representar a una función de una cierta variable aparece en Bernoulli (1728) donde se emplea el símbolo "φ". También, en Bernoulli (1728), se escribe $dx{:}dy = \varphi\xi \pm c{:}a$; nótese que no se emplea paréntesis para delimitar el argumento de la función. Además, Cajori (1929) menciona que Euler empleó la expresión funcional siguiente:

$$f\left(\frac{x}{a}+C\right)$$

Cajori (1929) presenta otros ejemplos de D'Alembert y Euler relativos al empleo de este tipo de notación funcional para funciones de una y dos variables.

Es importante notar que ninguno de los ejemplos de Euler provienen de sus escritos más conocidos sobre el cálculo, es decir, de Euler (1748, 1755). En Euler (1755, p. 83) se explica "cómo hallar el diferencial de una potencia arbitraria cuyo diferencial podemos hallar". En esta discusión él emplea la regla de la cadena, al igual que hace L'Hôpital, sin presentar demostración o explicación alguna más allá de lo que ya se ha indicado. Es entonces prudente concluir que esta notación funcional era poco común en la época de L'Hôpital y de Euler y prueba de ello es el empleo de expresiones como la siguiente: "considere la función racional

7. Acta Eruditorum, 3, 1684, 467-473.

$(1 - z^2)/(z^2(1+z^2))$… ” (Euler, 1748, p. 32). Claro está, en la última expresión no se indica dependencia alguna entre la variable z y la variable dependiente de z, la cual se omite por completo. Todo esto apunta a que la regla de la cadena, lejos de ser una regla para la diferenciación de la composición de funciones, como la entendemos modernamente, es más bien, una regla para manejar las *diferencias* de funciones que surgen de las sustituciones de ciertas expresiones en otras.

Al examinar a Cauchy (1821, p. 19) al comienzo del Capítulo I, el cual trata sobre el tema de las "funciones reales", vemos que se explica el empleo de la notación $f(x)$ o $F(x)$. Dice Cauchy que la notación "se empleará para designar una función explícita de una sola variable sin tener que determinar la naturaleza de tal función".

La definición moderna de función de Dirichlet se publicó en 1863 y, de acuerdo a Luzin (1940), la definición de Dirichlet[8], que aún se acepta hoy día, es la siguiente: "y es una función de una variable x definida en a<x<b si a cada valor de la variable x en el intervalo indicado, corresponde un valor definido de la variable y.

Además, Dirichlet indica que la forma en que se establece la correspondencia de la definición entre una variable y otra es "totalmente irrelevante". Usualmente la variable y se conoce como la variable dependiente y la variable x como la independiente. En Luzin (1940) se hace una exposición muy lúcida sobre la relación que tiene la definición de Dirichlet con el trabajo sobre las soluciones a la ecuación de onda asociada a una cuerda vibrante realizado por Euler, Daniel Bernoulli y Lagrange, y además con el trabajo realizado por Fourier en 1807 relativo a la expansión de funciones como sumas de series trigonométricas. De la discusión queda meridianamente claro que las "transformaciones" y las "sustituciones" discutidas en Euler (1748), tardaron alrededor de un siglo en concebirse como "acciones" de funciones capaces de "componerse" unas con otras. Por ello, la interpretación de la regla de la cadena como una regla para la diferenciación de funciones compuestas es totalmente anacrónica y falta de realidad histórica cuando la misma se trata de aplicar a los escritos de L'Hôpital y Euler. Esta regla, se tomaba más bien como algoritmo para calcular diferencias de funciones que se transformaban mediante sustituciones de variables. Es posible que esta forma de discutir la regla en el contexto de los diferenciales de hoy día (según justificados por el análisis no estándar), provea alguna ventaja didáctica para comprender y aplicar la mencionada regla.

LOS NÚMEROS HIPERREALES Y EL ANÁLISIS NO ESTÁNDAR

Existe un sistema numérico, inicialmente desarrollado por el matemático Abraham Robinson, llamado "el sistema de los números hiperreales", el cual contiene

8. [Lakatos, 1977, p. 151] disputa tenazmente la adjudicación de autoría a Dirichlet de esta definición y critica severamente a E. T. Bell así como a Bourbaki por contribuir a la perpetuación de este falso rumor. En [Sánchez, Fernández, 2007, p. 142] se ofrece una explicación de la forma en que el estudiante de Dirichlet, Hermann Hankel, contribuyó a la difusión de esta historia.

al conjunto de los números reales y en el que el conjunto de los enteros positivos constituye un conjunto acotado. Este conjunto contiene números infinitamente pequeños o infinitésimos y también contiene números infinitamente grandes[9]. El análisis que se desarrolla con este sistema numérico se conoce como *análisis no estándar*; el análisis de los epsilones y los deltas desarrollado por Cauchy y otros, hoy se conoce como el *análisis estándar*. Los matemáticos que protagonizaron el desarrollo inicial del cálculo sólo tenían a su haber estas ideas de números infinitamente pequeños o infinitamente grandes y con sólo esto desarrollaron la gran mayoría de las ideas que hoy se estudian en los cursos de cálculo introductorio de las escuelas y universidades modernas. Por ejemplo, como se ha mencionado anteriormente, L'Hôpital propuso que en los argumentos del cálculo, dos cantidades cuya diferencia es un infinitésimo (es decir, que están infinitamente cercanas una de la otra) se pueden "tomar indistintamente una por la otra" (L'Hôpital, 1696, p. 2). También propuso que las "curvas" son "polígonos de un número infinito de lados" (L'Hôpital, 1696, p 3]). La idea de los infinitésimos fue central en el desarrollo del cálculo ya que convertía muchos de sus argumentos en unos sencillos y directos.

Ya hemos tenido ocasión de comentar sobre la idea de L'Hôpital al referirse a las virtudes del formalismo de Leibniz como vehículo para el "cálculo de diferencias". Queremos terminar presentando aquí el argumento no estándar para la demostración de la regla de la cadena. En el análisis no estándar se dice que la función $y = f(x)$ es diferenciable en x si para todo infinitésimo dx distinto de cero, el cociente $(f(x + dx) - f(x))/dx$ es un número finito[10] y el número real del cual está infinitamente cerca, $f'(x)$, se conoce como la derivada de $y = f(x)$ en el punto x. Entonces, si $y = f(x)$ es diferenciable en algún valor de x, vemos que $f(x + dx) - f(x)$ está infinitamente cerca de $f'(x)dx$ para todo infinitesimal dx. Así pues, el argumento para la regla de la cadena sería el siguiente:

> Sean $y = f(u)$ y $u = g(x)$ dos funciones capaces de "componerse", y suponga que g es diferenciable para un valor de x y f es diferenciable para el valor correspondiente de $u = g(x))$. Como y es una función, al mismo tiempo, de x y también de u, y como $dy = f'(u)du$ y $du = g'(x)dx$ tenemos
>
> $$dy = f(u + du) - f(u) \sim f'(u)du = f'(g(x))du \sim f'(g(x))\, g'(x)dx.$$

Desde luego, esto dice que $f'(g(x))g'(x)$ es la derivada de $y = f(g(x))$. De algún modo, este argumento es, quizás, totalmente transparente, por lo que apenas merece escribirse de forma explícita.

9. Un número σ es un *infinitésimo* si $|\sigma| < r$ para todo número real positivo r. Decimos que H es un número *infinito* o *infinitamente grande* si $|H| > r$ para todo número real positivo r. En el sistema de los números reales no existen infinitésimos ni números infinitos.

10. Es decir, está infinitamente cerca de un número real único.

CONCLUSIÓN

La visión de la regla de la cadena como una regla relacionada a la composición de funciones es moderna (al menos, posterior a Cauchy), razón por la que no figuraba en absoluto en los esquemas teóricos de L'Hôpital o de Euler. Además, dada la total naturalidad de la regla en el lenguaje de infinitésimos y diferenciales, se podría argumentar que la misma no requirió justificación teórica alguna en los escritos de L'Hôpital y Euler. Posiblemente, la regla de la cadena se empleó como un algoritmo para calcular las derivadas (o diferencias) de las funciones que surgen como resultado de la sustitución de expresiones diferenciables en funciones que comienzan siendo diferenciables. Este punto de vista tiene una gran ventaja didáctica porque promueve una mejor comprensión de la regla de la cadena, ya que la sustitución de variables es una noción conceptualmente más manejable por los alumnos que la noción de composición de funciones (véase Santiago, 2008[11]).

Esta conclusión podría ser vista, desde un punto de vista más general, en cuanto al tratamiento actual de estos temas en la escuela y promover una reflexión, en el plano didáctico, sobre la conveniencia de volver a reconsiderar algunos de estos elementos del análisis no estándar en la concepción de dicho tratamiento.

Los autores están agradecidos por las conversaciones sostenidas con los profesores Robert Knighten de la Universidad del Estado de Portland, Oregon y la profesora Concepción Valdés de la Universidad de La Habana, Cuba quienes fueron de gran ayuda en la dilucidación de algunas de las sutilezas históricas y matemáticas de los temas que se tocan en este artículo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bernoulli, J. (1718). *Memoires d. L'acad. d. sciences de Paris. Opera* (Lausanne et Geneve, 1742), Vol. II, p. 243, 246, 250.

Cajori, F. (1928). *A History of Mathematical Notations Vol 1, Notations in Elementary Mathematics.* London: The Open Court Company Publishers.

Cajori, F. (1929). *A History of Mathematical Notations, Vol 1, Notations Mainly in Higher Mathematics*. Chicago: The Open Court Company Publishers

Cauchy, A. L. (1821). *Cours D'Analyse de L'École Royale Polytechnique*. Edición Facsimil. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Dunham, W. (2005). *The Calculus Gallery, Masterpieces from Newton to Lebesgue*. Princeton and Oxford: Princeton University Press

11. Algunas experiencias realizadas en el curso introductorio de cálculo no estándar en el Departamento de Matemática de la Universidad de Puerto Rico refuerzan la idea que son mayores para los alumnos las dificultades conceptuales asociadas a la comprensión de la operación de composición de funciones al comparárselas con aquellas asociadas a la sustitución algebraica. En general, es más dificil para los estudiantes visualizar una función dada como composición de otras funciones más "elementales" que identificar sustituciones que a partir de una función básica y manejable llevan a funciones más complicadas.

Euler, L. (1840). *Comment. Petropol ad annos 1734-1785*, Vol. VII, Referencia tomada de J. Tropfke, op. cit., Vol. II (2d ed., 1921).

Euler, L. (1748). *Introductio in analysin infinitorum. Vol 1* (Introducción al análisis del infinito, Vol 1, Edición Facsimil- Sevilla: SAEM Thales -Real Sociedad Matemática Española.

Euler, L. (1748/1990). *Introductio in analysin infinitorum Vol 2*, (introduction to the Analysis of the Infinite, Book II). New York: Springer Verlag.

Euler, L. (1755/2000). *Institutiones calculi differentialis*. (Foundations of Differential Calculus). New York: Springer Verlag.

Kline, M. (1972). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. New York: Oxford University Press.

Lakatos, I. (1977). *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery*. New York: Cambridge University Press.

Leibniz, G. W. (1982). *Escritos Filosóficos*. (Traductor R. Torretti) Edición de Ezequiel de Olaso. Buenos Aires: Editorial Charcos.

Leibniz, G. W. (2005). *The Early Mathematical Manuscripts of Leibniz*. (J. M. Child, tranlator). Mineola: Dover Publications.

L'Hôpital (1696). *Analyse des infiniment petits, Pour l'intelligence des lignes courbes*. Paris: L'Imprimerie Royale.

Luzin, N. (1940). *Function*. En La gran Enciclopedia Rusa, V. 59, p. 314-334.

Newton, I. (1686). *Mathematical Principles of Natural Philosophy and System of the World.* Vol 1 y Vol 2 (Traducción de Andrew Motte, 1729). Berkeley: University of California.

Sánchez, C. y Valdés, C. (2007). *Las Funciones; un paseo por su historia*. Madrid: Nivola.

Santiago, C. I. (2008). *Los números hiperreales y la comprensión del concepto derivada de una función en el curso de Cálculo*. Propuesta de disertación doctoral, Facultad de Educación, Universidad de Puerto Rico, Río Piedras.

Struik, D. J. (1963). *The origin of L'Hôpital's ruleMathematics Teacher*, vol. 56, p. 260.