Revisitando los conceptos de máximo y mínimo a través del libro de L'Hôpital

María Teresa González Astudillo
Universidad de Salamanca

Resumen: *En este artículo se hace una revisión de los conceptos de máximo y mínimo tal como aparecen en el libro de L'Hôpital. La necesidad de este estudio se puede justificar por la pérdida del origen y sentido de los conceptos de Análisis Matemático que, tal como se tratan en la enseñanza actual se han algebraizado perdiendo el carácter geométrico-dinámico de sus orígenes. Para el análisis de estos conceptos se tienen en cuenta los aspectos epistemológicos, socio-culturales y didácticos que permiten caracterizar la forma en la que se presentan en este libro.*

Palabras clave: *libro de texto, historia de la matemática, máximos y mínimos, educación matemática.*

Summary: *This article presents a revision of maximum and minimum concepts such as they appeared in L'Hôpital's textbook. The necessity of this study is justified by the lost of the origins and sense of Analysis concepts, because in the actual instruction they are treated in an algebraic way instead of their original geometric-dynamical character. To analyze these concepts it has been taken into account the epistemological, socio-cultural and didactical aspects that permit characterized the way they look like in this book.*

Keywords: *textbook, history of mathematics, maximum concept, minimum concept, mathematics education.*

INTRODUCCIÓN

En el ámbito de la Didáctica de la matemática han sido numerosas las razones que se han dado para adentrarnos en el mundo de la historia de la matemática desde un punto de vista educativo. La mayoría de ellas inciden en que ésta debería estar presente en el currículo escolar por lo que actualmente, son muchos los libros de texto que incluyen alguna anécdota histórica, la biografía de algunos matemáticos o el desarrollo sucinto de algunos conceptos matemáticos con cierta intención motivadora (Bagni, 2001; Kleiner, 2001).

Los argumentos que justifican la importancia del papel que juega la historia de la matemática en su enseñanza, se pueden sintetizar en tres aspectos el filosófico o epistemológico, el filogenético y el histórico (Heeffer, 2006).

El primero incide en que la historia nos ofrece la posibilidad de una aproximación contextual a los conceptos distinta a la que se presenta en las aulas como productora de una "verdad eterna y absoluta"; conocer los estados por los que ha pasado una teoría antes de formalizarse, con sus períodos de inconsistencias y verdades a medias, desmitifica su naturaleza. El conocimiento de la historia puede ayudar a comprender mejor el sentido de los conceptos matemáticos e integrar la historia en la educación matemática nos permite colocar el desarrollo de las matemáticas en el contexto científico y tecnológico de un momento particular, en la historia de la ciencia y de las ideas.

El segundo aspecto da cuenta de las dificultades que han surgido a lo largo de la historia de la matemática relacionándolas con las dificultades que muestran los estudiantes en la comprensión de los conceptos lo que debe considerar el profesor para el diseño de la instrucción. Se han realizado algunas investigaciones en este sentido como por ejemplo, Sierpinska, (1985, 1987); El Bouazzoui, (1988), Sierra, González y López (1999, 2000), Czarnocha y otros (2001) que muestran que existe una estrecha relación entre las dificultades de los alumnos y los problemas de la construcción del conocimiento matemático a lo largo de la historia.

Por último la revisión histórica nos permite descubrir los diferentes fenómenos con los que están relacionados los conceptos matemáticos, cuáles son los problemas que los originaron y las variadas heurísticas que permitieron obtener su solución. La historia de la matemática puede proporcionar formas de resolución de problemas diferentes de las utilizadas hoy en día. Esos procedimientos pueden ocultar el pensamiento que hay detrás de ellos "por eso, se debe realizar un ejercicio de descifrado para entender lo que se hizo, cuál fue el razonamiento que se oculta, y cuál es el sustrato matemático que hace que un método inusual sea válido y posiblemente general" (Arcavi e Isoda, 2007).

En este ámbito, esta investigación se desarrolló por una preocupación exclusivamente didáctica. En la literatura correspondiente a la investigación en educación matemática es ampliamente reconocida la dificultad que tienen los alumnos, en general, para comprender los conceptos del cálculo lo que les lleva a rutinizar la resolución de las actividades que se les proponen en el aula. Su pensamiento, en estos casos, es puramente algebraico y algorítmico mientras que, en muchas ocasiones, no llegan a realizar ningún razonamiento de índole analítica como correspondería a este tipo de conceptos. Esta preocupación nos llevó a estudiar la evolución que han sufrido estos conceptos a lo largo de la historia de la educación comenzando con el primer libro de texto exclusivamente de dedicado al cálculo como fue el libro de L'Hôpital (1696). Para centrar la investigación (González, 2002) nos fijamos en un concepto presente en toda la historia de la matemática como son los puntos críticos, concretamente los máximos y los mínimos y, en torno a estos conceptos, nos planteamos algunas preguntas relacionadas con los tres aspectos descritos en este apartado como: ¿Cómo se construyeron estos conceptos en la historia de la matemática? ¿Qué problemas dieron lugar a estos conceptos? ¿Cómo se abordaban inicialmente estos conceptos? ¿Cuál era el significado de estos conceptos?

DESCRIPCIÓN DEL ESTUDIO

El objetivo de este estudio es analizar los conceptos de máximo y mínimo presentes en el libro de L'Hôpital considerando los aspectos socio-culturales, epistemológicos y didácticos que determinan su configuración estableciendo las consecuencias que se puedan derivar en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Para llevar a cabo nuestro propósito realizamos una investigación de carácter descriptivo y cualitativo considerando los siguientes *puntos de interés* para caracterizar el texto analizado: contextualización de la obra e intencionalidad del autor, estructura del material, organización de los conceptos e interpretación heurística**.** La *estructura del material* nos ofrece una primera visión general de la obra concretada en cuestiones como la extensión, la secuenciación de los contenidos y nociones de los capítulos y las características relativas a la impresión o la presentación. La *contextualización de la obra e intencionalidad del autor* nos informa en primer lugar acerca del momento histórico en el que fue escrito el libro, las circunstancias que hicieron que fuera escrito en el modo en que ha llegado a nosotros, las repercusiones que tuvo en el mundo educativo y científico del momento; pero también nos proporciona información acerca de cuáles son los objetivos que se pretenden, la forma de ver el Análisis Matemático, las innovaciones que se introdujeron a partir de la obra así como la metodología de demostración usada. Para abordar el siguiente apartado, *organización de los conceptos*, se han descrito las definiciones, reglas de cálculo, tipos de problemas abordados y métodos de solución de dichos problemas.

Por último para realizar la *interpretación heurística* se ha considerado necesario, en función del objetivo de este trabajo, considerar tres aspectos: el **socio-cultural** que nos indicará la visión relativa al Análisis Matemático así como de la aplicabilidad de los conceptos, el **epistemológico** referente al status que se refleja en el material de los distintos contenidos desarrollados y, por último, el aspecto **didáctico** en el que se resaltarán aspectos relacionados con la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, y en particular del Análisis Matemático. En los siguientes apartados iremos describiendo los resultados obtenidos a partir de la minuciosa revisión de este libro.

ESTRUCTURA DEL MATERIAL

Guillaume-François-Antoine, marqués de L´Hôpital (1661-1704) escribió el libro *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes* siendo publicado en 1696 en París por De l'imprimerie royale. Se suele considerar como el primer libro de texto que se publicó de Análisis Matemático aunque, de hecho, sólo trata el cálculo diferencial. Se publicaron numerosas ediciones de él a lo largo de la mayor parte del siglo XVII y se utilizó como libro de texto en prácticamente todas las Escuelas Politécnicas, escuelas militares, Universidades y Academias.

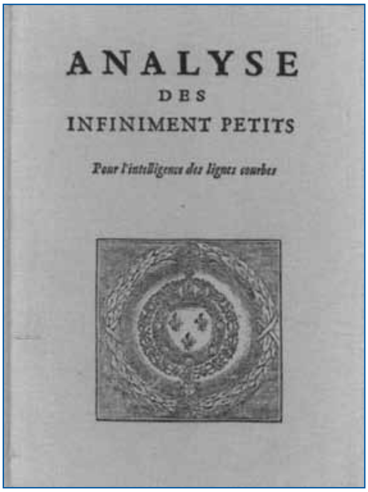


Figura 1
Portada del libro del L'Hôpital

La estructura de la obra es la clásica de los libros de matemáticas, heredando la forma de hacer de los matemáticos griegos. A partir de unas definiciones iniciales en las que se establece el significado de los conceptos "primarios" que van a aparecer a lo largo del texto, se suceden las diferentes proposiciones que caracterizan las propiedades, estructura, reglas de cálculo en los que están involucrados dichos conceptos. Con cada una de dichas proposiciones se incluye un problema o ejercicio resuelto con la pretensión de ejemplificarlo.

La obra tiene 181 páginas y se divide en diez secciones a través de las cuales se hace un repaso de todo el cálculo diferencial. Desde los principios del cálculo de diferencias, el cálculo las tangentes a las cuestiones relativas a máximos y mínimos o los puntos de inflexión y de retroceso. También se descubre el uso de las envolventes de M. Hugens para todo tipo de curvas, se trata de cómo obtener cáusticas tanto por reflexión como por refracción y del cálculo de límites de forma indeterminada El libro finaliza con una observación en la que se indica que los métodos utilizados son generales y se pueden extender también a curvas trascendentes

Todas las proposiciones incluidas en el texto son muy generales porque, para L'Hôpital, los libros que contienen sólo proposiciones particulares no tienen ningún valor y su lectura sólo "faire perdre du temps à ceux qui les font" (p.ij) y es exclusivamente en la sección nueve donde presenta algunos problemas que, según su opinión, son "curieux, & qu'ils font très-universeles" (p. Ij). En el libro aparecen algunas aplicaciones a la Física, pero el mismo L'Hôpital, en el prólogo, dice que le hubiera gustado añadir una sección sobre el maravilloso uso que tiene el cálculo de diferencias en la física y la precisión que podemos lograr pero una enfermedad se lo impidió.

Como era al uso en la época, el libro contiene unas hojas desplegables del tamaño de página y media con las gráficas a las que se alude a lo largo del texto. La construcción de estas gráficas es la utilizada por Descartes en su *Geometrie* incluida en su

Discurso del método (1637), es decir, a partir de una línea recta vertical u horizontal (AC) que actúa de eje sobre el que varían las indeterminadas (coupées para L'Hôpital y abscisas para nosotros), se levantan líneas perpendiculares que corresponden a las llamadas aplicadas[1] (ordenadas en la nomenclatura actual). La notación relativa a la curva recuerda la utilizada para nombrar objetos geométricos como ángulos o polígonos indicando ciertos puntos notables (vértices) que determinan la figura en cuestión, en este caso los puntos AMB son puntos de la curva de forma que mientras M identifica un punto genérico, A hace referencia a un punto particular. De forma similar, las abscisas son segmentos AP siendo A, el origen de coordenadas. Debemos resaltar que se considera la noción de aplicada como una línea y no como una coordenada tal como entendemos actualmente, de esta forma, a medida que la aplicada varía sobre la curva, recorre el área que hay bajo ella. Para denotar ordenadas infinitamente cercanas a otras se utilizan las letras minúsculas, pm.

> Soit par exemple une ligne courbe quelconque AMB qui ait pour axe ou diametre la ligne AC, & pour une de ses appliquées la droite PM ; & soit une autre appliquée pm infiniment proche de la premiere. Cela posé, si l'on mene MR parallele à AC ; les cordes AM, Am &qu'on décrive du centre A, de l'intervalle AM le petit arc de cercle MS ; Pp sera la différence de AP, Rm celle de PM, Sm celle de AM, & Mm celle de l'arc AM. De même le petit triangle MAm qui a pour base l'arc Mm, sera la différence du segment AM ; & le petit espace MPpm, celle de l'espace compris par les droites AP, PM, & par l'arc AM. (p. 2)

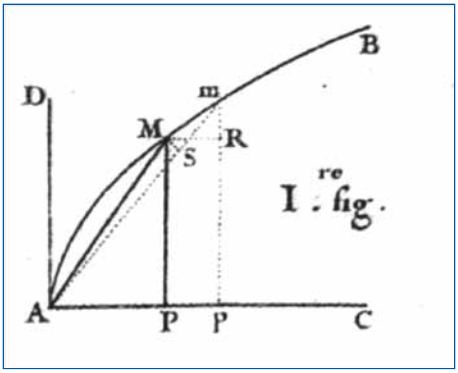


Figura 2
Gráfica de las diferencias de L'Hôpital

Hay que destacar que todas las expresiones utilizadas se refieren a familias de funciones, x representa la abscisa que varía AP, y, la ordenada correspondiente

1. Descartes los denomina *appliquées par ordre* o, en versión latinizada *omnes applicatae* (todos añadidos por orden) o abreviadamente *applicatae*. Así surgieron las palabras con igual significado *applicatae* y *ordinate* respectivamente. La primera cayó después en desuso. A partir de esta idea se acuñó en el siglo XVII la palabra abscissae (del latín *abscindere*, derivado de *scindere*, escindir, cortar).

PM, y a=AC es la magnitud del eje horizontal sobre el que se representa la función y que también interviene en la expresión simbólica.

CONTEXTUALIZACIÓN DE LA OBRA E INTENCIONALIDAD DEL AUTOR

El Análisis infinitesimal moderno, como cuerpo de conceptos y resultados aplicables con cierta generalidad, nace a finales del siglo XVII, siendo considerados Newton (1643-1727) y Leibniz (1646-1716) como sus fundadores. Su origen se debe al interés ciertos problemas que se pueden clasificar en dos bloques (Grattan-Guinnes, 1984) según la materia de la que tratan: problemas mecánico-físicos y problemas geométricos. Los primeros hacen referencia a cuestiones como el tiro, la caída libre, el movimiento de los planetas, en general, todos los que requieran el estudio de los procesos de movimiento. El segundo tipo de problemas están relacionados con el cálculo de las tangentes y áreas, longitudes o volúmenes.

El cálculo de Newton y Leibniz eran radicalmente distintos, así, mientras el de que aquel era de carácter dinámico, Leibniz concebía las curvas como agregados de segmentos infinitesimales, lo que dotaba a su cálculo infinitesimal de un carácter básicamente estático.

En 1684 y 1686 Leibniz publicó sendos artículos en el *Acta Eruditorum* (revista científica fundada por él mismo) que, a pesar de presentar esta nueva rama de las matemáticas, no tuvieron mucha repercusión puesto que eran bastante breves, tenían erratas y eran difíciles de comprender. Los hermanos Bernoulli, Jacob (1654-1705) y Jean (1667-1748) estudiaron dichos artículos a partir de 1687, y en 1690 demostrando haber conseguido dominar los conceptos en ellos expuestos, lo que se puede comprobar a raíz de sus publicaciones en la misma revista *Acta Eruditorum*. El menor de los hermanos, Jean Bernoulli, conoce hacía 1692 al Marqués de L'Hôpital (1661-1704) estableciéndose entre ambos un contrato según el cual, a cambio de un salario regular, se comprometía a enviarle a L'Hôpital sus descubrimientos en matemáticas para que los utilizase según su voluntad[2]:

> I shall give you with pleasure a pension of three hundred livres, which will begin on the first half of the year, and I shall send two hundred livres for the first half of the year because of the journals that you have sent, and it will be one hundred and fifty livres for the other half of the year, and so in the future. I promise to increase this pension soon, since I know it to be very moderate and I shall do this as soon as my affairs are a little less confused… I am no so unreasonable as to ask for this all your time, but I shall ask you to give me occasionally some hours of your time to work on what I shall ask you –and also to communicate to me your discoveries, with the request not to mention them to others. I also ask you to send neither to Varignon nor to others copies of the notes that you let me have, for it

2. Se ha especulado durante mucho tiempo acerca de algún acuerdo que hubiera habido entre Bernoulli y l`Hôpital para la publicación de los resultados obtenidos por el primero de ellos, pero no ha sido hasta 1955 en que se publicó la correspondencia de Jean Bernoulli cuando se ha descubierto la existencia de este contrato realizado en 1694 entre ellos.

> would not please me if they were made public, Send me your answer to all this and believe me. Monsieur tout à vous (le M de L'Hôpital, citado en Historical Topics for Mathematics classroom, N.C.T.M. 1969).

Uno de los resultados de este acuerdo, fue la publicación del primer libro sobre Cálculo Diferencial, *Analyse des infiniment petits,* en París en 1696 en el que se recogen las enseñanzas recibidas por el marqués. Un ejemplo de esta colaboración es que se haya conocido como “regla de L'Hôpital” para límites indeterminados, una de las contribuciones principales de Bernoulli que data de 1694 y que apareció por primera vez en este texto.

Este libro según Cantoral (1995) se adapta al paradigma de la **etapa de difusión del saber**, caracterizada por “una especie de pedagogía impresionista que pretende en el lector evocar una serie de impresiones que contextualicen al concepto o campo de conceptos que el texto trasmite. Esto supone de quien lo lea un ejercicio mayor que aquel que se requiere para dar seguimiento a un razonamiento lógicamente encadenado. En cierto sentido solicita del lector una especie de joroba matemática que le permite, por así decirlo, leer entre líneas” (Cantoral, 1995). Esto podemos observarlo en las primeras definiciones incluidas en el libro, la primera de las cuales indica que:

> On appelle quantités variables celles qui augmentent ou diminuent continuellement; & au contraire quantités constantes celles qui demeurent les mêmes pendant que les autres changent. Ainsi dans une paraboles les appliquées & les coupées sont des quantités variables, au lieu paramètre est une quantité constante (p. 1).

En ella, se define lo que se entiende por cantidades variables y cantidades constantes pero no se explica el significado de “aumentan o disminuyen continuamente”, con lo que se supone en el lector la noción de variación continua, como señalaba Cantoral.

El libro de L'Hôpital, se basa en dos postulados, en el primero se establece que se pueden tomar como iguales dos cantidades que difieren sólo en una cantidad infinitamente pequeña:

> I DEMANDE OU SUPPOSITION. On demande qu’on puisse prendre indifféremment l’une pou l’autre deux quantités qui ne diffèrent entr’elles que d’une quantité infiniment petite; ou (ce qui est la même chose) q’une quantité qui n’est augmentée ou diminuée que d’une quantité infiniment moindre, qu’elle, puisse être considérée comme demeurant la même (p. 2).

Mientras que, en el segundo, se consideran las curvas como formadas por segmentos rectos infinitamente pequeños que determinan, por medio de los ángulos que forman unos con otros, la curvatura de la curva, de esta forma se expresa simplemente la manera en que concebían los matemáticos de aquella época las curvas, como la traza de un punto que la recorre.

> II DEMANDE OU SUPPOSITION. On demande qu'une ligne courbe puisse être considérée comme l'assemblage d'une infinité des lignes droites, chacune infiniment petit ou (ce que est la même chose comme un poligône d'un nombre infini de côtes, chacun infiniment petit, lesquels déterminent par les angles qu'ils font entr'eux, la courbure de la ligne (p. 3).

El primer postulado establece las reglas para el manejo algebraico, extendiendo la noción usual de igualdad, mientras que el segundo, lo hace en un contexto geométrico. Estos dos principios difícilmente se podrían considerar aceptables hoy, pero L'Hôpital los veía:

> D'allieurs les deux demandes ou suppositions que j'ai faites au commemcement de ce Traité, &sur lesquelles seules il est appuyé, me paroissent si évidentes, que je ne croy qu'elles puissent alisser aucun doute dans l'esprit des Lecteurs attentifs.

Tal como era al uso en la época, el *Analyse* comienza dando las definiciones de variable y de sus diferencias, así como postulados sobre estas diferencias y se obtienen las fórmulas de las diferencias básicas para las funciones algebraicas a la manera de Leibniz. La noción que tiene L'Hôpital de la diferencial es un poco diferente del de Leibniz. Las diferenciales de Leibniz son diferencias infinitamente pequeñas entre valores sucesivos de una variable; L'Hôpital, en cambio, no considera las variables como recorriendo una sucesión de valores infinitamente próximos, sino como creciendo o decreciendo de manera continua, y entonces las diferencias son las partes infinitamente pequeñas en que aumentan o disminuyen las variables. Así la definición de diferencia que se da es la siguiente:

> La portion infiniment petite dont une quantité variable augmente ou diminue continuellement, en est appellée la *Différence* (p. 2)[3].

En el libro de L'Hôpital se tratan por primera vez las magnitudes infinitas comparando las diferencias infinitas de las magnitudes finitas y descubriendo las razones entre estas diferencias. Además, este Análisis se extiende más allá del infinito, ya que sus límites no son las diferencias infinitamente pequeñas, sino que se descubren las relaciones de las diferencias de estas diferencias, alcanzando las diferencias terceras, las cuartas, etc.

En esta época de nacimiento, el Análisis Matemático consistía en una colección de métodos analíticos para resolver problemas sobre curvas, y los conceptos principales que se manejaban eran **cantidades geométricas variables**. Con el paso del tiempo a medida que se fueron haciendo más complicados los problemas y el manejo de las fórmulas más intrincado, el origen geométrico de las fórmulas se fue haciendo más remoto, y así el cálculo fue cambiando hasta convertirse en una disciplina que se ocupaba simplemente de las fórmulas con lo que se fue algebrai-

3. Hay que hacer notar que las expresiones anteriores están expresando diferencias infinitesimales y no como concebimos ahora el diferencial como variación infinitesimal de una variable respecto a otra, en cuyo caso estaríamos ante una razón o proporción.

zando. Es importante, además, hacer notar que es el estudio de esas diferencias tanto infinitamente grandes como infinitamente pequeñas, de lo que va a tratar esta rama de las Matemáticas, de ahí el nombre de Cálculo Diferencial.

PUNTOS MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE UNA CURVA

La definición que se ofrece de puntos máximos y mínimos es una descripción del comportamiento de la curva en el entorno de estos puntos. Hace referencia a la concepción de curva como traza, es totalmente dinámica y la notación es estrictamente geométrica:

> Soit une ligne courbe MDM dont les appliquées PM, ED, PM soient paralleles entr'elles, & qui soit telle que la coupée AP croissant continüellement, l'appliquée PM croisse aussi jusqu'à un certain point E, aprés lequel elle diminuë; ou au contraire qu'elle diminüe jusqu'à un certain point E, aprés lequel elle croisse. Cela posé, La ligne ED sera nommée *La plus grande,* ou *la moindre* appliquée (p. 41).

Dicha definición se da a partir de la construcción de una curva, y en ella se observa la concepción de L'Hôpital como ordenadas que crecen o decrecen continuamente en función de las abscisas, con lo que tiene un carácter fundamentalmente **geométrico-dinámico** basado en la descripción del comportamiento de la curva en un entorno del punto. A partir de esta definición se establece en qué consisten los problemas de máximos y mínimos consisten:

> La nature de la ligne courbe MDM étant donnée; trouver pour AP une valeur AE telle que l'appliquée ED soit la plus grande ou la moindre de ses semblables PM. (p. 41).

Se establecen dos métodos para el cálculo de los máximos y los mínimos. El primero de ellos está relacionado con la noción de tangente y se configura a partir de un discurso descriptivo y la noción de *diferencia.* El razonamiento se basa en que cuando la variable (dependiente) aumenta la **diferencia** es positiva (crecimiento de la función), mientras que si disminuye, la **diferencia** será negativa (decrecimiento de la función) y para que la diferencia pase de positiva a negativa o viceversa la diferencia ha de ser cero o infinito, por lo que la conclusión a la que se llega es:

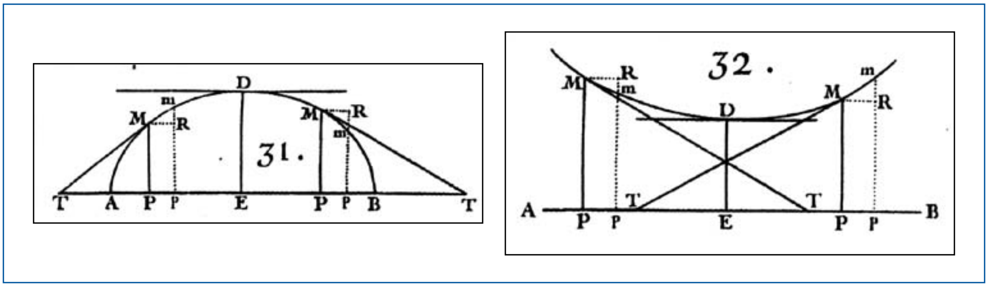
> D'où il fuit que la différence d'une quantité qui exprime un *plus grande* ou un *moindre*, doit être égale à zero ou à l'infini (p. 42).

Es decir, hay que calcular los puntos en los que la **diferencia** de L'Hôpital es cero por lo que en ellos la tangente a la curva es horizontal o, aquéllos en los que dicha diferencia sea infinita y, por lo tanto, la tangente será vertical.

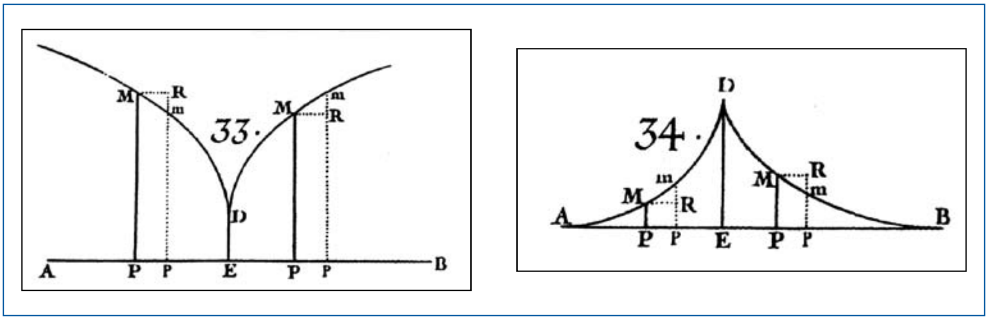
El otro método se configura a partir de éste y se basa en la noción de subtangente ya que la variación que sufre esta subtangente a medida que la abscisa se aproxima al máximo o al mínimo, se puede utilizar también como indicador de los puntos en cuestión. Cuando la variable se acerca por la izquierda al máximo o mínimo, la subtangente aumenta hasta alcanzar infinito en dicho punto y posteriormente disminuye. En ningún momento se establece un criterio para distinguir los máximos de los mínimos como el que se utiliza ahora con la derivada segunda.

> C'est-porquoy pour aider l'imagination, soient entenduës des tangents aux points M, D, M; il est clair dans les courbes où la tangent en D est parallele à l'axe AB, que la soutangente PT augmente continüellement à mesure que les points M, P approchent des points D, E; & que le point M tombant en D, elle devient infinie; & qu'enfin lorsque AP surpasse AE, la soutangente PT devient negative de positive qu'elle étoit, ou au contraire (p. 42).

Las gráficas que se utilizan para ilustra la situación son de tipo **ideograma**; en ellas se representa el concepto que se quiere estudiar o analizar junto con ciertos elementos gráficos (rectas tangentes, subtangentes, triángulos infinitesimales), que ilustran mediante comparación los criterios para establecer si se tiene un punto máximo y uno mínimo. De esta forma se puede deducir a partir de dichas gráficas, si las subtangentes crecen o decrecen cuando se va acercando la abscisa al punto extremo o qué ocurre con los triángulos construidos sobre los puntos de las curvas.



Figuras 3 y 4
Máximo y mínimo con tangente horizontal



Figuras 5 y 6
Mínimo y máximo con tangente vertical

Los problemas que se incluyen a modo de ejemplo para practicar y demostrar la potencia de este método hacen referencia a situaciones geométricas o fenómenos físicos-mecánicos. Los primeros recurren a curvas clásicas expresadas, bien de forma algebraica como el Folium de Descartes o la parábola semicúbica de Neile, o bien de forma descriptivo-geométrica a partir de la traza de un punto que cumple unas determinadas condiciones como la **roulette** Pascal (que se obtiene cuando un punto se mueven sobre una base fija) o haciendo referencia a diferentes figuras geométricas (segmentos, rectángulos, cono, paralelepípedos) para las que se establecen ciertas condiciones. En cuanto a los problemas de índole físico-mecánico se incluyen varios problemas de recorridos mínimos uno relacionado con la refracción de la luz y el otro referido a un viajero. Además hay un problema en el que se plantea la posición que debe tener una polea y el último hace referencia a una cuestión relativa a la geodesia. Por cuestiones de extensión sólo se va a incluir un problema de cada uno de los dos tipos escogidos buscando cierta similitud con los que se plantean hoy en día en la educación secundaria.

El siguiente ejemplo se puede considerar un antecedente de los actuales problemas aritméticos, en los que a partir de un número que se divide en dos cantidades, se crea otra cantidad. En este caso, como la situación planteada está en un contexto geométrico lo que se divide no es una cantidad sino una línea (en realidad, un segmento).

> EXEMPLE IV
>
> Couper la ligne donnée AB en un point E, en sorte que le produit du quarré de l'une des parties AE par l'autre EB, soit le plus grand de tous les autres produits formés de la même maniere (p. 44).

En este problema hay que dividir la longitud de una línea a en dos partes x y a-x, de forma que $x^2(a\text{-}x)$ sea un máximo. Para resolverlo, se calcula dy $= \frac{2axdx-3xxdx}{aa}$, se iguala a 0, se busca la solución de la ecuación resultante y se obtiene el punto $AE(x) = \frac{2}{3}a$. Dos cuestiones merecen ser mencionadas en torno a este procedimiento. Por un lado el cálculo de la diferencia de L'Hôpital se hace consiguiendo una expresión homogénea, hemos de recordar que se está trabajando con magnitudes geométricas de forma que los literales hacen referencia a esas magnitudes y, por la herencia griega, se sigue manteniendo la norma de configuración de este tipo de expresiones. Por otro lado no se tiene en cuenta la solución x=0 que da lugar a un mínimo sin indicar en el texto el porqué.

A continuación se generaliza para el caso $x^m(a\text{-}x)^n$, obteniéndose como abscisa del máximo x=$\frac{m}{m+n}$ y se concluye mediante la interpretación tanto de la situación planteada como del resultado obtenido en diferentes casos particulares para m y n, siendo en algunos de ellos uno de los exponentes negativos, en cuyo caso la línea de partida hay que prolongarla a partir de los extremos de partida para poder obtener el punto en cuestión. Se puede observar que las funciones que se utilizan hacen referencia a una familia de curvas, en lugar de a una en concreto de forma que los resultados que se obtienen son los más generales posibles.

El siguiente es un problema de recorridos mínimos en dos medios en los que las velocidades son distintas y hay que encontrar el punto que hace mínimo el recorrido.

> EXEMPLE IX. La ligne AEB étant donnée de position sur un plan avec deux points fixes C, F; & ayant mené à un de ses points quelconques P deux droites CP (u), PF (z); soit donnée une quantité composée de ces indetermines u & z, & de telles autres droties dones a, b &c. qu'on voudra. On demande quelle doit éter la position des droites CE, EF, afin que la quantité donnée, qui en est composée, soit plus grande ou moindre que cette même quantité lorqu'elle est composée des droites CP, PF. (p. 47)

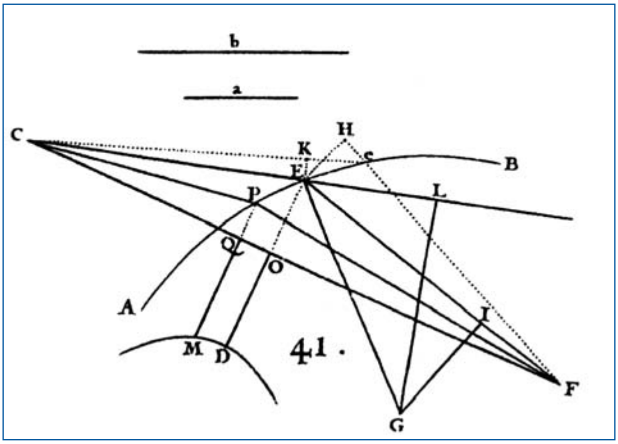


Figura 7
El problema de la refracción de la luz

Este ejemplo se plantea de forma muy general; no se hace referencia ni a una función ni a una solución concreta, se parte de una curva AB sobre la que inciden líneas a partir de un punto C y de la que parten otras líneas que llegan a otro punto F del otro lado de la línea. Las magnitudes de dichas líneas están multiplicadas por sendas cantidades a y b fijadas de antemano (que pueden referirse a velocidades). La curva divide al plano en dos semiplanos, en cada uno de los cuáles la recta cumple unas determinadas condiciones, como si fueran dos medios distintos, en realidad se refiere a un problema relativo a la refracción de la luz. Se trata de buscar un punto E de la curva para el que la expresión obtenida sea la mínima posible. La curva MD se dibuja trazando perpendiculares desde las soluciones posibles.

Para resolver el problema se utiliza por un lado la noción de diferencia y por otro la semejanza de triángulos y se explica mediante un ejemplo, tratando de minimizar la expresión *au+zz*. Por medio del criterio establecido, se calcula la diferencia de la expresión anterior obteniéndose que *adu+2zdz=0* y como consecuencia *du.-dz::2z.a*. La expresión anterior se interpreta indicando que, como *dz* debe ser de signo contrario en relación con *du*, la posición de las rectas CE, EF debe ser tal que mientras *u* crece, *z* disminuye.

Para el cálculo del punto E utilizando la noción de semejanza de triángulos se escoge primeramente un punto cercano a E, *e*, y se forman los triángulos rectángulos ELG y EKe, EIG y EHe, semejantes entre ellos. Se restan a los ángulos rectos GEe y LEK el mismo ángulo LEe, para que las diferencias, LEG y KEe, sean iguales, y por tanto los ángulos IEG, HEe serán iguales. A partir de ahí y de la expresión generada anteriormente, se establece la siguiente relación: *GL.GI::Ke(du). He(-dz)::2z.a*. La conclusión a la que se llega es que la posición de las rectas CE, EF debe ser tal que calculada la perpendicular EG sobre la línea AEB, el seno GL del ángulo GEC será al seno GI del ángulo GEF, como las cantidades que multiplican a *dz* son a las que multiplican a *du*, con lo que se establece la ley de Snell correspondiente a la refracción de la luz.

El razonamiento y la notación utilizados, totalmente geométrico, recuerda los métodos euclídeos de demostración. A continuación se aplica la solución de este problema a otros dos: uno relativo al recorrido de un viajero y otro planteado de forma estrictamente geométrica.

INTERPRETACIÓN HEURÍSTICA

La publicación de este libro está marcada por el momento histórico en el que surgió, por lo que su estructura es la clásica de los libros de matemáticas, heredando la forma de hacer de los matemáticos griegos. A partir de unas definiciones iniciales en las que se establece el significado de los conceptos “primarios” que van a aparecer a lo largo del texto, se van a suceder las diferentes proposiciones que caracterizan las propiedades, estructura, reglas de cálculo en los que están involucrados dichos conceptos. Con cada una de dichas proposiciones se incluye un problema o ejercicio resuelto con la pretensión ejemplificarla. L`Hôpital trató de escribir un buen libro de texto que explicase el Cálculo Diferencial que hasta entonces había sido ajeno a prácticamente toda la comunidad de matemáticos y de estudiantes. Todo ello configura una visión *didáctica* de acercamiento a estos conceptos que se va a mantener intacta durante mucho tiempo.

Desde el punto de vista de la *epistemológico*, hay que considera que para entender la concepción de L'Hôpital acerca del Análisis Matemático, en general, y del Cálculo Diferencial, en particular, es esencial comprender los dos primeros postulados establecidos en su libro: en el primero: “Se pueden tomar como iguales dos cantidades que difieren sólo en una cantidad infinitamente pequeña, p.2”, se establece la regla para cálculo con magnitudes pues permite ampliar la noción que se tenía hasta el momento de igualdad; y el segundo: “una curva puede ser considerada como formada por segmentos rectos infinitamente pequeños que determinan, por medio de los ángulos que forman unos con otros, la curvatura de la curva, p.3”, plantea el significado geométrico de la noción de curva, tratándose de una concepción inicialmente estática en la que se considera como formada por trozos rectos de longitud infinitesimal. Esta concepción inicial se trasforma en un tratamiento dinámico cuando se ofrece tanto la definición de diferencia como la de los conceptos de máximo y mínimo puesto que los relaciona con el crecimiento o decrecimiento de las ordenadas. Por otro lado, dado que no se maneja el concepto de función, se realiza un estudio de curvas descritas por los geómetras griegos, como: el Folium de Descartes, la Parábola semicúbica de Neile, o la Concoide,... y las demostraciones que se incluyen se basan en razonamientos de tipo geométrico por lo que se puede considerar que la visión del Análisis es de tipo geométrico. En realidad, el objeto de estudio no son las curvas sino las familias de esas curvas cuyo comportamiento se presume similar.

Las aplicaciones nos ofrecen los aspectos *socio-culturales* en los que se enmarca este libro. Entre ellas resalta l`Hôpital el estudio de la curvatura de las curvas, el cálculo de tangentes y perpendiculares, el análisis de los puntos máximos y mínimos y el estudio de los rayos que se reflejan o se refractan. Se establecen, por lo tanto, una colección de métodos analíticos necesarios para resolver problemas sobre curvas, considerando las cantidades desde un punto de vista geométrico. Las situaciones planteadas, utilizan un contexto geométrico en el que las cantidades son consideradas más como magnitudes de objetos geométricos, que como números, aún en el caso de los problemas de tipo aritmético. Además de los problemas de índole geométrico, se abordan otros como los relacionados con la reflexión y la refracción de la luz, el recorrido mínimo, el movimiento de una polea o el estudio del crepúsculos, que eran, en aquella época, el tipo de problemas en los que estaban involucrados todos los matemáticos.

La revisión realizada nos ofrece una visión del Análisis muy distinta de la que se presenta en la educación actual. Recuperar algunos de los aspectos tratados podría dotar de sentido a estos conceptos que para los alumnos resultan tan abstractos y ajenos a los fenómenos que les dieron origen y, para los que, generalmente, se limitan a memorizar ciertas reglas "algebraicas" que simplifican los procedimientos de cálculo pero que obscurecen su significado. El carácter geométrico-dinámico que dio origen a esta rama de las matemáticas podría recuperarse utilizando, en la enseñanza, software de geometría dinámica que, además, permitiría el estudio de funciones y curvas complejas relacionadas con las aplicaciones que dan sentido a estos conceptos. Tanto el estudio de fenómenos de carácter geométrico como físico-mecánico podrían tanto motivar a los alumnos como organizar los conceptos en esquemas significativos que les permita comprender los conceptos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arcavi, A. e Isoda, M. (2007). Learning to listen: From historical sources to classroom practice. *Educational Studies in Mathematics, 66, 111-129.*

Bagni, G. T. (2001). La introducción de la historia de las matemáticas en la enseñanza de los números complejos. Una investigación experimental en la educación media superior. *RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4*(1), 45-62.

Cantoral, R. (1995) Acerca de las contribuciones actuales de una didáctica de antaño: el caso de la serie de Taylor. *Mathesis* 11(1), 55-101.

Czarnocha, B., Dubinsky, E. Loch, S., Prabhu, V, y Vidakovic, D. (2001). Conceptions of area: In Students and in history. *College Mathematics Journal, 32*(2)*,* 99-109.

El Bouazzoui, H. (1988). *Conceptions des èleves et des professeurs a propos de la notion de continuité d'une fonction.* Theses du grade de Ph.D. Université Laval.

González, M.T. (2002). *Sistemas Simbólicos de Representación en la Enseñanza del Análisis Matemático: Perspectiva Histórica acerca de los Puntos Críticos*. Tesis Doctoral. Universidad de Salamanca.

Grattan-Guinnes, I. (1984) *Del cálculo a la teoría de conjuntos.* Madrid: Alianza Editorial.

Heeffer, A. (2006). The methodological relevance of the history of mathematics for mathematics education. *International Conference on 21st Century Information Technology in Mathematics Education* .Chang Mai, Thailand.

Kleiner, I. (2001). History of the infinitely small and the infinitely large in calculus. *Educational Studies in Mathematics, 48*, 137-174.

NCTM (1969) *Historical Topics for Mathematics classroom.* Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles èpistemologiques relatifs a la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathematiques,* 6(1), 5-67.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics.* 18, 371-397.

Sierra, M., González, M.T. y López, C. (1999) Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de Bachillerato y Curso de Orientación Universitaria: 1940-1995. *Enseñanza de las Ciencias,* 17 (3), pp. 463-476.

Sierra, M.; González, M.T. y López, C. (2000) Concepciones de los alumnos de bachillerato y Curso de Orientación Universitaria sobre límite funcional y continuidad. *RELIME*, 2 (1), 71-85

Sánchez, C. y Valdés, C. (2001) *Los Bernoulli.* Madrid: Síntesis