

Una experiencia de aula utilizando la historia de las matemáticas

Jesús Salinas-Herrera

Colegio de Ciencias y Humanidades. Universidad Nacional Autónoma de México

Natividad Adamuz-Povedano

Universidad de Córdoba

Noelia Jiménez-Fanjul

Universidad de Córdoba

Resumen: *Se presentan los resultados de una experiencia de aula, en la cual, desde una perspectiva histórica, se pretende acercar a los alumnos a una comprensión no sólo técnica sino también cultural de las matemáticas. En particular, se enfoca la atención en la dimensión ideológica de los valores asociados con las matemáticas bajo la etiqueta de “racionalismo”. Se trabajan contenidos de la aritmética pitagórica para que el alumno descubra patrones aritméticos y geométricos y, se introduzca en los procesos de prueba en matemáticas. Asimismo, se destaca la percepción que tienen los alumnos acerca del enfoque histórico en el estudio de contenidos matemáticos.*

Palabras clave: *historia de las matemáticas, cultura, valores, aritmética pitagórica, Educación Matemática*

Abstract: *In this paper we present a classroom experience in which, from an historical perspective, students were approached to both technical and also cultural mathematical understanding. Especially, we focus on the ideological dimension of the mathematical values under the “rationalism” approach. Students work Pythagorean arithmetic in order to find out arithmetic and geometric patterns and to get into the procedures of mathematical proof. Furthermore, we show the students’ perception about the historical approach applied to the study of mathematical contents.*

Key words: *history, culture, values, Pythagorean arithmetic, Mathematics Education.*

INTRODUCCIÓN

La experiencia de aula que aquí se presenta se llevó a cabo en el bachillerato de la Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades, de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM).

Esta Institución es uno de los dos bachilleratos que forman parte de la UNAM. Fue fundado hace 40 años, como parte de un proyecto de renovación de la Universidad. El Colegio de Ciencias y Humanidades, como indica su nombre, proponía ligar las ciencias y las humanidades y promovía un enfoque interdisciplinario de la educación. Esta institución tenía originalmente una población de alrededor de 75 000 estudiantes. A partir de la reforma de su Plan de Estudios, en los últimos 10 años, redujo su atención a una población de aproximadamente 60.000 estudiantes, los cuales están distribuidos en 5 centros.

En esta experiencia de aula se toma un enfoque histórico para mostrar un rostro humano de las matemáticas, y se destaca su papel en la cultura (Fauvel, 1991; Bishop, 1999). Se pretende mostrar a los estudiantes que las matemáticas no sólo están constituidas por contenidos conceptuales y procedimentales que pueden ser utilizados en la solución de problemas, sino que también han jugado un papel importante en el desarrollo de la cultura (Bishop, 1999).

De esta manera, consideramos que las matemáticas, además de ser un instrumento simbólico muy importante, también promueven valores (Greenfield y Bruner 1966; Fasheh, 1982; Lancy, 1983; Bishop, 1999). Por ello, es importante hacer explícitos los valores de las matemáticas para comprender qué tipo de implicaciones tienen en la educación y en la cultura.

En este documento presentamos una experiencia de aula, en la cual, desde una perspectiva histórica, tratamos explícitamente valores de las matemáticas y los abordamos conjuntamente con contenidos conceptuales. De esta manera, nos propusimos acercar a los alumnos a una comprensión no sólo técnica de las matemáticas (Fauvel, 1991; Bishop, 1999). En particular, enfocamos la atención en la dimensión ideológica de los valores asociados con las matemáticas bajo la etiqueta de “racionalismo” (Bishop, 1999).

Asimismo, nos interesa destacar en este artículo la percepción que tienen los alumnos participantes en esta experiencia, acerca del enfoque histórico en el tratamiento de contenidos matemáticos.

MARCO TEÓRICO

Nuestra perspectiva central es que la interacción entre la historia de las matemáticas y la educación matemática ayuda a construir estrategias que contribuyen al proceso de enseñanza de las matemáticas (Fauvel y Mannen, 2000; Sierra, 1997; Meavilla, 2005; Maz, 1999, 2005) y permiten destacar su aspecto cultural (Fauvel, 1991; Bishop, 1999).

Para el diseño de esta experiencia, con relación al desarrollo cognitivo, seguimos diferentes ideas que se articulan en la perspectiva sociocultural de Vygotsky (1995, 2009), la cual considera los procesos de mediación semiótica. Tales procesos de mediación se realizan a través de tres tipos de agentes: las herramientas culturales, los instrumentos psicológicos, es decir, los recursos simbólicos, y la interacción con otros individuos. Para Vygotsky, el proceso de aprendizaje es considerado como un proceso de apropiación de los métodos de acción de una

cultura dada. En esta apropiación los instrumentos psicológicos o simbólicos desempeñan una función esencial.

Para que una experiencia de enseñanza pueda propiciar la adquisición de instrumentos psicológicos debe cumplir tres características fundamentales: Intencionalidad, trascendencia y significado (Feuerstein, 1990). La intencionalidad se refiere a la principal función del mediador, en este caso el profesor, quien debe transformar una experiencia incidental en intencional. Esta intencionalidad se enfocó, en nuestra experiencia, llamando la atención de los alumnos hacia el carácter histórico de los conceptos matemáticos de número y figura geométrica. Nos interesó mostrar a los alumnos que estas nociones aparecieron desde la más remota antigüedad y que fueron desarrollándose en diferentes contextos históricos. La trascendencia se refiere a que la enseñanza debe conducir hacia algo que trascienda el tema específico y apunte hacia la transmisión de la cultura. En nuestro caso, más allá del aspecto práctico de las matemáticas, se señalaron los valores que sustentan el enfoque racionalista de la matemática helena, en cuanto a su carácter intelectual. Con respecto al significado, se llamó la atención sobre la importancia de identificar las propiedades de los números y su relación con las figuras geométricas.

El racionalismo es el valor central de las matemáticas. En la antigüedad la cultura helena dio preeminencia a la razón como la vía más adecuada para el conocimiento, desde entonces y representado paradigmáticamente por las matemáticas, que han privilegiado el razonamiento deductivo, el racionalismo se ha convertido en una ética primaria. Así, “el racionalismo, como opuesto a la tradición, al dogma religioso y a la experiencia o la condición personal, es el principio rector del desarrollo matemático” (Bishop, 1999). Como escribió Kline (1972):

En su aspecto más amplio las matemáticas son un espíritu el espíritu de la racionalidad. Este espíritu desafía, estimula, vigoriza y dirige las mentes humanas para que den el máximo de sí. Este espíritu pretende influir decididamente en la vida física, moral y social del hombre, pretende responder a los problemas planteados por nuestra existencia misma, se esfuerza por comprender y controlar la naturaleza y hace un gran esfuerzo para explorar y establecer las implicaciones más profundas y extremas del conocimiento ya obtenido (pp. 26-27).

METODOLOGÍA

Se propició la interacción entre los alumnos y entre el profesor y los alumnos como parte del proceso de negociación de significados. Las actividades se resolvieron en parejas. Todas las intervenciones del profesor estuvieron orientadas a describir previamente el contexto histórico y cultural en el cual se desarrolló la aritmética pitagórica y en explicar las ideas esenciales de Pitágoras acerca de los números.

Se explicó previamente a los alumnos el cambio de enfoque de la matemática helena, que dio origen a la geometría deductiva, y que representa una superación

muy importante respecto del carácter empírico, característico de la matemática de las antiguas culturas de Mesopotamia y Egipto. Los alumnos no tuvieron un papel pasivo y receptivo sino que participaron activamente. Realizaron una investigación sobre los antecedentes históricos de los sistemas numéricos y acerca del origen del pensamiento filosófico, y de las matemáticas en Grecia. Posteriormente, realizaron actividades en clase cuyos contenidos fueron tomados y adaptados de problemas de la aritmética pitagórica.

LA POBLACIÓN

La población con la que se trabajó fue un grupo de 24 alumnos de primer semestre del bachillerato del Colegio de Ciencias y Humanidades, UNAM, durante las actividades escolares de un curso ordinario. Participaron 12 hombres y 12 mujeres con edades entre 15 y 16 años.

PROCEDIMIENTO

Se llevó a cabo la aplicación de una unidad didáctica (Wittmann, 1984) en la que se utilizaron diversas actividades. La duración fue de 6 horas.

APERTURA DE LA UNIDAD DIDÁCTICA. Con relación al pensamiento numérico de los pitagóricos, el profesor comentó que para ellos los números eran la esencia de la naturaleza pues consideraban que todas las cosas están literalmente compuestas por números, es decir, no distinguían realmente los números de los puntos geométricos, entendidos naturalmente como puntos extensos o esferas minúsculas. Así, no veían distinción alguna entre cuerpo físico y cuerpo geométrico (González-Urbaneja, 2009).

Se les informó que la aritmética pitagórica se prestaba por sí misma a una representación geométrica de los números. Los pitagóricos estudiaron las propiedades de los números y realizaron diversas clasificaciones y acuñaron nombres para los diversos tipos de números. Entre el tipo de números que caracterizaron están los números poligonales. Estos números se van formando como suma de los términos de ciertas sucesiones de números enteros.

DESARROLLO DE LA UNIDAD DIDÁCTICA. Los estudiantes resolvieron algunos problemas de la aritmética pitagórica. Las actividades las realizaron en parejas constituidas por ellos mismos. Se utilizaron dos sesiones de hora y media cada una.

Primera Sesión.

1. Indica los números triangular, cuadrado, pentagonal y hexagonal que siguen a los que aparecen en la Fig. 1, y dibújalos.

números poligonales		orden				
		1	2	3	4	5
tipo	triangulares					
	cuadrados					
	pentágonos					
	hexágonos					
		1	3	6	10	15
	1	4	9	16	25	
	1	5	12	22	35	
	1	6	15	28	45	

Figura 1

Representación de los números triangulares, cuadrados, pentagonales y hexagonales. Fuente (González-Urbaneja, 2009)

Todos los alumnos reconocen el patrón geométrico y aritmético que se encuentra en la fig. 1. La mayor parte de ellos vinculan ambos registros de representación y dan continuidad a las secuencias de números poligonales solicitados. No obstante que no se pide en esta actividad, casi la mitad de las parejas (41.6%) proponen expresiones algebraicas para el término n-ésimo.

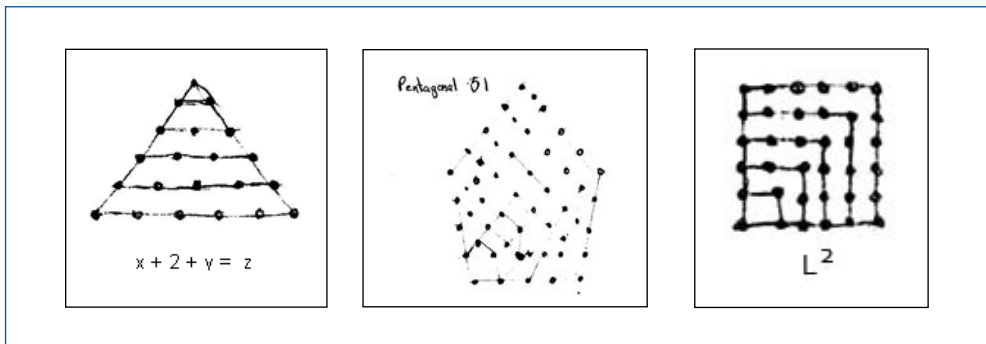


Figura 2, 3 y 4

Diferentes respuestas donde indican el siguiente número triangular, cuadrado y pentagonal

Segunda Sesión.

1. Indicar las series a partir de las cuales se forman los números poligonales que aparecen en la Fig. 1.
2. Escribir los números poligonales que siguen, hasta los números decagonales. Asimismo, escribir las series que permiten formar dichos números.
3. Identificar el patrón geométrico que permite construir las figuras de la tabla (Fig.1).

Prácticamente el 100% de estudiantes responden correctamente las dos primeras preguntas. En general, los resultados encontrados reflejan que los alumnos realizan un cierto análisis estructural de números que comparten un mismo patrón de representación, y obtienen el desarrollo aritmético de los términos de una misma secuencia. Por consiguiente, establecen conexiones entre la secuencia numérica, la secuencia de representaciones geométrica y la secuencia de desarrollos aritméticos. Estos resultados son congruentes con los obtenidos en otros estudios (Castro, 1997; Castro, Rico y Romero (1997).

Asimismo, aplican estas conexiones para caracterizar otros números poligonales. Esto refleja una cierta interiorización del diagrama de la fig. 1, que está operando como un instrumento psicológico en la realización de las actividades. Finalmente, con relación a dibujar el patrón geométrico que permite dibujar a los números poligonales de un mismo tipo, 66.6% de los estudiantes responde correctamente.

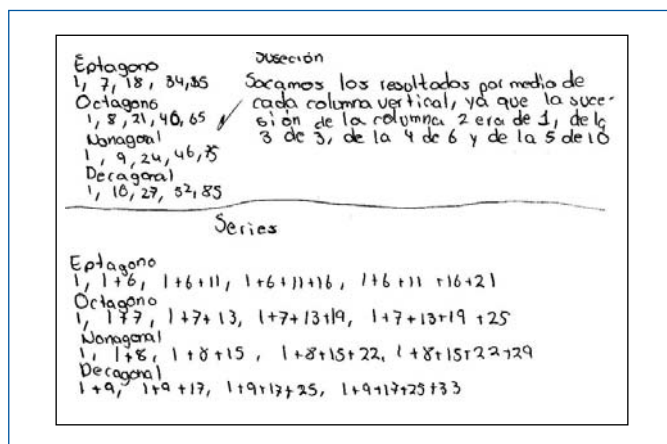


Figura 5

En esta respuesta una pareja de alumnas indica las sucesiones de números poligonales que siguen a los de la figura 1 y las series que forman dichos números.

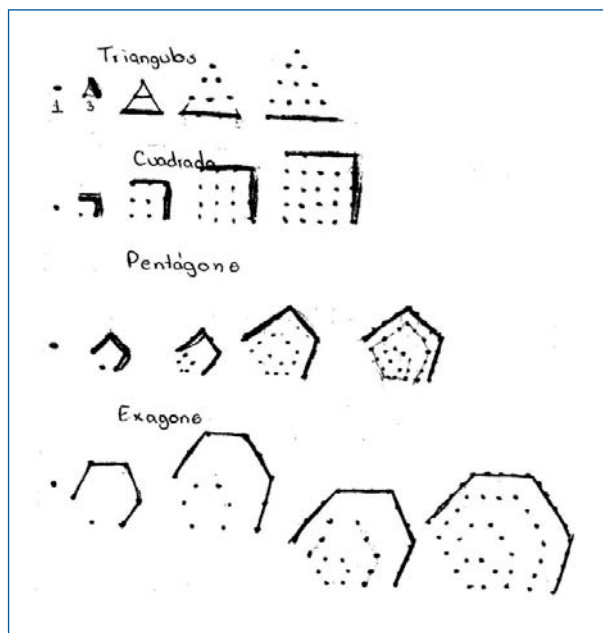


Figura 6

Respuesta que indica el patrón geométrico que permite construir diferentes números poligonales.

CIERRE DE LA UNIDAD DIDÁCTICA. Se les pidió probar un teorema de la aritmética pitagórica. La duración de la sesión fue de una hora.

Tercera Sesión.

Actividad. Mostrar que: Todo número cuadrado es la suma de dos números triangulares sucesivos.

En ningún caso los argumentos que dan los alumnos pueden ser calificados completamente como una demostración. Sin embargo, todos elaboran pruebas con diferentes características (Balacheff, 2000). El mayor número de alumnos, ocho parejas (66.6%), solo responden poniendo ejemplos. Dibujan casos de dos números triangulares sucesivos y el número cuadrado resultante. Sin embargo, algunas parejas presentan indicios de percibir el carácter general de la tarea. A continuación se muestran algunos ejemplos.

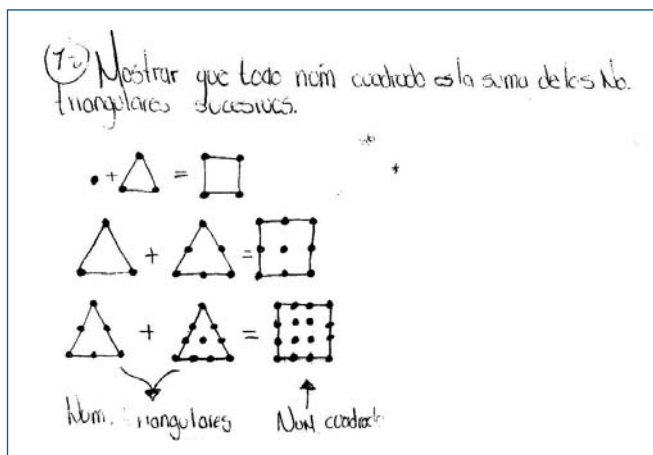


Figura 7
Ilustran gráficamente un cumplimiento general insinuando un proceso inductivo.

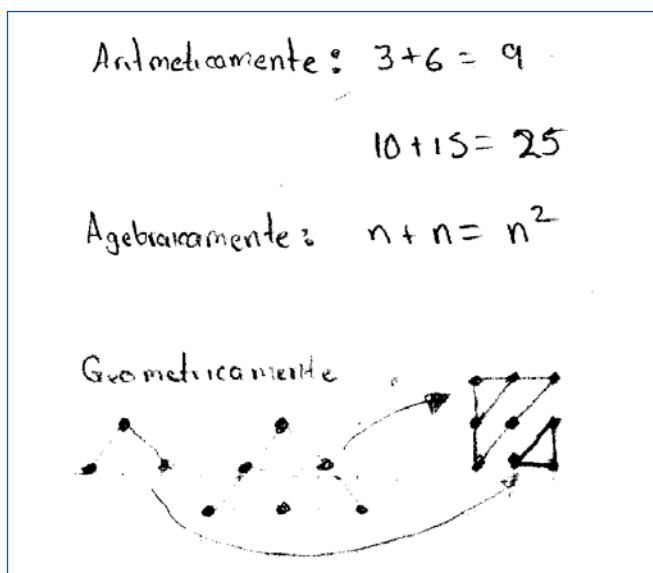


Figura 8
Esta respuesta delimita diferentes ámbitos. Además, intenta una prueba algebraica, aunque con errores, y da un tratamiento de reconfiguración geométrica de los números poligonales en cuestión.

Al término de la secuencia didáctica se administró un cuestionario, con las siguientes preguntas:

1. El tratamiento de aspectos históricos de la matemática ¿te despertó mayor interés por las matemáticas? Si ___ No ___ ¿Qué aspecto te resultó interesante?
2. ¿Qué diferencia crees que tuvo la matemática griega con respecto a la de las antiguas culturas de Mesopotamia y Egipto?
3. La dimensión histórica de las matemáticas ¿te hizo ver una dimensión humana de ellas? Si ___ No ___ ¿Cuáles?
4. ¿Te resultaron interesantes los problemas de la aritmética pitagórica relacionados con los números poligonales? Si ___ No ___ ¿Por qué?

RESULTADOS Y DISCUSIÓN DEL CUESTIONARIO

Pregunta 1. El tratamiento de aspectos históricos de la matemática ¿te despertó mayor interés por las matemáticas?

17 alumnos (71%) respondieron afirmativamente, cuatro opinaron que no les había despertado mayor interés y uno no respondió. Así, una mayoría significativa de alumnos consideraron que el enfoque histórico de la matemática les despertó mayor interés por las matemáticas.

Pregunta 2. ¿Qué aspecto te resultó interesante?

Algunas respuestas son las siguientes:

- ✓ *Pues me resultó interesante en general ya que nos enseñó a ver las matemáticas no solo con aritmética, algebra u otros aspectos si no que nos enseña a ver a las matemáticas en el aspecto histórico desde sus principios y orígenes y esto está muy bien ya siempre hay que conocer las cosas desde sus orígenes y con qué propósito o cómo y por qué surgieron.*
- ✓ *Pues para mí lo interesante de todo esto es el hecho de que en la antigüedad los pitagóricos pensaban que se podía explicar todo por medio de una base numérica y comprendiendo las bases de la matemática se podían explicar toda clase de fenómenos. También es interesante el aspecto de que una persona se haya interesado tanto por el saber más que para ser importante, para comprender todo el mundo que lo rodea, y así poderse explicar mejor la realidad de las cosas.*

En la primera respuesta se observa que el alumno/a se motivó al vislumbrar un sentido sociocultural de las matemáticas, así, expresa su acuerdo cuando dice "... esto está muy bien ya siempre hay que conocer las cosas desde sus orígenes y con qué propósito o como y porque surgieron". En la segunda respuesta, se observa una valoración no usual en los alumnos/as por el conocimiento mismo, cuando dice: "También es interesante el aspecto de que una persona se haya interesado tanto por el saber más que para ser importante, para comprender todo el mundo que lo rodea, ...".

Pregunta 3. ¿Qué diferencia crees que tuvo la matemática griega con respecto a la de las antiguas culturas de Mesopotamia y Egipto?

Algunas respuestas:

- ✓ Que la griega trataba de relacionar todo lo que les rodeaba con las matemáticas y las otras culturas lo usaban solo con lo que utilizaban en su vida cotidiana, fueron teniendo más hambre de saber los griegos a lo largo del tiempo, pero fueron influenciados con las matemáticas de las culturas antiguas.
- ✓ Yo creo que las matemáticas de Mesopotamia y Egipto eran más de práctica aunque tenía que ver con un pensamiento mágico y religioso, mientras que la griega era de razonamiento y críticas intelectual.
- ✓ Creo que la matemática griega influyo en la actualidad debido al uso de teorías y pruebas que demostraran estas, mientras que las culturas de Mesopotamia y Egipto no utilizaban pruebas.

Estas respuestas ilustran rasgos de reflexión muy importantes sobre las matemáticas. Expresan una visión histórica e intercultural de las matemáticas, como construcción histórica de diferentes culturas. Asimismo, hay una percepción de valores de las matemáticas que están asociados con diferentes culturas, con actitudes y valores distintos (Bishop, 1999) La diferencia entre, por un lado, un pensamiento mágico y religioso y, por otro, un pensamiento basado en la crítica intelectual, nos muestra la viabilidad de orientar a los alumnos a valorar conscientemente el racionalismo. Así, esta situación abre una valiosa oportunidad de mostrar a los alumnos el tipo de explicación que construyen las matemáticas. Este conocimiento es de la mayor importancia educativa, pues, “si esto no se comprende, el lenguaje y los símbolos de las matemáticas estarán para nuestros jóvenes tan faltos de sentido como una cultura ajena” (Bishop, 1999, p. 90).

Pregunta 4. La dimensión histórica de las matemáticas ¿te hizo ver una dimensión humana de ellas? ¿Cuál?

Algunas respuestas:

- ✓ La dimensión que para mí me hizo ver es que conforme vamos evolucionando nosotros la matemática también lo hace con nosotros que sin ella el mundo no sería como lo conocemos hoy.
- ✓ Como fue evolucionando el hombre tiene una relación con la aparición de las matemáticas, debido a que es una invención humana para ver la realidad de otro modo, pues se quiere tener un control sobre las cosas así que busca método como las matemáticas.
- ✓ Creo que las principales cosa que pude observar es como con el paso del tiempo nosotros los humanos tratamos poco a poco de acuerdo a nuestras capacidades de explicarnos cada vez más nuestro mundo y por medio de las matemáticas encontramos una forma de expresar la realidad con base a diferentes problemas que representan nuestra vida diaria, además de resolverlos.

En estas respuestas se expresan ideas de cambio y progreso, y se otorga un papel relevante a las matemáticas como instrumento de comprensión y control del mundo y de utilidad en la vida cotidiana. Este tipo de respuestas muestran que los alumnos pueden reflexionar sobre aspectos de valores de las matemáticas. De acuerdo con Bishop (1999), entre los sentimientos y actitudes que han impulsado la cultura matemática está el sentimiento de “control”. “La búsqueda del conocimiento y las explicaciones de los fenómenos naturales están asociados con un deseo de predecir y, sin duda, la capacidad de predicción es un conocimiento poderoso. En este sentido, el conocimiento se ocupa del control” (Bishop, 1999, p.96). Este sentimiento proporciona una especie de seguridad dentro de un mundo en constante cambio y necesariamente puede contribuir en moldear la personalidad.

Pregunta 5. ¿Te resultaron interesantes los problemas de la aritmética pitagórica relacionados con los números poligonales? ¿Por qué?

- ✓ La verdad si me parecieron muy interesante ya que es otra forma de resolver o más bien de encontrar números está muy bien que haya puesto eso porque eso todavía nos exige más ya que tenemos que pensar más y eso puede hacer que crezca nuestro intelecto en las matemáticas y si está muy padre.
- ✓ Era una actividad muy buena para pensar bien en cómo obtener los números ya que no teníamos formulas y el cómo dibujar la siguiente posición y saber que los números también se pueden representar con algunas figuras geométricas a través de los puntos.
- ✓ Es muy interesante saber que un tema de estos pudiera haber estado relacionado con algo que nunca en mi vida había oído.
- ✓ Te hacían razonar y reflexionar cada número para poder plantear una solución y al hacer tantas operaciones te interesabas tanto que planteabas diversos métodos para llegar a un posible resultado.

Observamos que este tipo de problemas, a pesar de su antigüedad, pueden resultar novedosos e interesantes a los alumnos. Llama la atención que en prácticamente todas las respuestas los alumnos/as expresan apreciación por el reto que estos problemas les ponen de pensar, sin tener un aspecto práctico o “útil”.

CONCLUSIONES

La estrategia utilizada es una réplica de otra experiencia con resultados análogos (Salinas, 2010), la cual permitió a los alumnos un acercamiento no usual a algunos contenidos matemáticos. En general los estudiantes manifestaron que este enfoque les resultó interesante. Esta experiencia hizo posible que los alumnos establecieran un contacto con el carácter racional del pensamiento matemático, lo valoraran y pusieran en práctica. Relacionaron el carácter abstracto y racional de la matemática helena con el pensamiento filosófico. Así, los alumnos conocieron

que en esta atmósfera racionalista, las matemáticas cambiaron su enfoque, con relación a la que heredaron de las culturas más antiguas. Se dieron cuenta que históricamente las matemáticas han estado relacionadas con diferentes contextos culturales, los cuales han influido en su desarrollo.

Estos resultados similares, con distintos grupos de estudiantes, muestran la plausibilidad de su repetición. Es importante señalar que este enfoque didáctico no implica una tarea fácil. Es necesario un gran esfuerzo y trabajo de parte del profesor en la búsqueda, lectura y selección de los pasajes históricos más adecuados y acordes con el tema y el nivel de los alumnos. Asimismo, un conocimiento del contexto histórico y cultural relativo a los contenidos que se van a abordar.

Sin embargo, esta estrategia muestra que el tratamiento histórico no solo es un medio para el trabajo de los contenidos curriculares sino también culturales, de las matemáticas, no es necesario utilizarlo como un fin en sí mismo (Sierra, 1997; Maz, 1999; Meavilla, 2005). De esta manera, los alumnos no solo interiorizan el contenido matemático, sino que se inician a comprender el origen y desarrollo de los conceptos en el contexto histórico y cultural en el que se crearon.

En las actividades que se llevaron a cabo, todos los estudiantes mostraron alguna capacidad para distinguir patrones aritméticos y geométricos, análogos a los encontrados en otros estudios con metodologías y enfoques distintos a los seguidos aquí (Castro, 1995). Los alumnos, en general, desarrollaron un proceso de interiorización de los diagramas pitagóricos de los números poligonales. Reconocen, el patrón geométrico y aritmético que se encuentra en los diagramas de los números poligonales, y pasan de un registro de representación al otro. En general, vinculan ambos patrones de representación y dan continuidad a las secuencias de números representados. Esta situación les permite realizar tareas donde trabajan con sucesiones y series de números y relaciones entre ellas, es decir hay un desarrollo en el tratamiento del registro de representación aritmético.

El carácter simbólico de tales diagramas, como instrumentos psicológicos, parece propiciar en algunos estudiantes la intensión de usar expresiones generales, pues sin preguntar por ello, casi la mitad de las parejas, proponen expresiones algebraicas para el término n -ésimo. A pesar de que las respuestas son erróneas, esta situación abre la posibilidad de un tratamiento explícito, de parte del profesor, de la necesidad del tránsito del aspecto aritmético al algebraico.

Finalmente, es importante destacar que, esta experiencia es parte de la búsqueda de una educación matemática que no se reduzca a la mera instrucción. Pues, coincidimos con la idea de que la educación matemática, se debe ocupar de establecer opciones que vayan más allá del uso de las simbolizaciones y conceptualizaciones matemáticas, es decir, se ocupe también de los valores (Bishop, 1999).

Reconocimiento: Estancia sabática en el Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la Educación, UCO. Beca otorgada por la Dirección General de Asuntos del Personal Académico de la Universidad Nacional Autónoma de México, Enero-Diciembre de 2011.

REFERENCIAS

- Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá: Universidad de los Andes.
- Bishop, A. J. (1999). *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona: Paidós.
- Castro, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales*. Granada: Edit. Comares.
- Castro, E., Rico, L. y Romero, I. (1997). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas; *Enseñanza de las Ciencias*, **15** (3), 361-371.
- Fasheh, M. (1982). Mathematics, Culture and Authority, *For the Learning of Mathematics*, 3, 2-8
- Fauvel, J. (1991). Using history in mathematics education". *For the learning of mathematics*, 11(2), 13-16.
- Fauvel, J. & Mannen, J. V. (2000). *History in Mathematics Education: the ICMI study*, Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.
- Feuerstein, R. (1990). The theory of structural cognitive modifiability, en B. Presseisen (comp.), *Learning and thinking styles: classroom interaction* (pp. 68-134), Washington, D. C.: National Education Association,.
- Greenfield, P. M. y Bruner, J. S. (1966). Culture and Cognitive Growth, en D. A. Goslin (comp.), *Handbook of Socialization Theory and Research*. New York: Rand McNally,
- González-Urbaneja, P. M. (2009). *Pitágoras. El filósofo del número*. Madrid: Nivola libros y ediciones.
- Kline, M. (1972). *Mathematics in Western Culture*, Londres: Pelican.
- Kozulin, A. (2000). *Instrumentos Psicológicos*. Barcelona: Paidós.
- Lancy, D. F. (1983). *Cross-cultural Studies in Cognition and Mathematics*. New York: Academic Press.
- Maz, A. (1999). Historia de la matemática en clase: ¿por qué? Y ¿para qué? En Berrenger, M^a. I.; Cardeñoso, J. M^a. y Toquero M. (Eds.) *Investigación en el aula de matemáticas. Matemáticas en la sociedad*. Granada: Sociedad Thales y Departamento de Didáctica de la Matemática.
- Maz, A. (2005). *Los números negativos en España en los siglos XVIII y XIX*, Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.
- Meavilla, V. (2005). *La historia de las matemáticas como recurso didáctico*. Badajoz: Federación Española de Profesores de Matemáticas.
- Salinas, J. (2010). El uso de la historia de las matemáticas para el aprendizaje de la geometría en alumnos del bachillerato. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 557-568). Lleida: SEIEM.

- Sierra, M. (1997). Notas de historia de las matemáticas para el currículo de secundaria. En Rico, L. Edt. *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. Barcelona: Horsori.
- Vygotsky, L. S. (1995). *Pensamiento y Lenguaje*. Barcelona : Paidós.
- Vygotsky, L. S. (2009). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*, Barcelona: Crítica.
- Wittmann, E. (1984). Teaching Units as the Integrating Core of Mathematics Education, *Educational Studies in Mathematics*, 15, 25-36.