Historia de las matemáticas e investigaciones matemáticas en secundaria. Algunos fundamentos y ejemplos para la clase

Constantino de la Fuente Martínez
I. E. S. Cardenal López de Mendoza
Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática
"Miguel de Guzmán"

Resumen: *La historia de las matemáticas puede jugar un papel muy importante en el devenir cotidiano del aula. En este artículo nos centraremos en su utilidad y aprovechamiento para la realización de investigaciones matemáticas escolares en la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) y Bachillerato.*

Palabras clave: Historia de las matemáticas, investigaciones matemáticas escolares, creación y descubrimiento en matemáticas, resolución de problemas.

Abstrac: *The history of mathematics can play an important role in daily life of the classroom. In this article we will focus on its utility and use for conducting research school mathematics in secondary schools and high school.*

Keywords: *History of mathematics, school mathematics research, creation and discovery in mathematics, problem-solving.*

INTRODUCCIÓN

Como figura en el título del artículo, vamos a analizar el papel de la historia de las matemáticas en la realización de investigaciones matemáticas en ESO y Bachillerato. A este respecto, la historia de las matemáticas es un concepto asentado y conocido por todos, que no necesita aclaraciones, pero puede que no ocurra lo mismo con el otro concepto. Por ello, comenzaremos explicando la idea de *investigación matemática escolar* tal como nosotros la entendemos.

En una primera aproximación estamos de acuerdo con las afirmaciones de Chamoso y Rawson (2001, p. 35) "nos referimos a investigación como un viaje con ideas hasta donde se pueda, de forma libre, con diálogo y discusión entre estudiantes" y entre éstos y el profesorado. En segundo lugar distinguiremos entre la *resolución de problemas* y las investigaciones. Chamoso y Rawson (2001) hacen una discusión interesante sobre estos términos:

> También se puede considerar la distinción usual entre "Resolución de Problemas" e "Investigación". Lo primero de ello se refiere al hecho de intentar conseguir la solución de un determinado problema utilizando las estrategias y técnicas que parezcan convenientes, o a través de una labor investigadora. Y se suele llamar "Investigación" cuando, además, se anima a ser curioso, a buscar estrategias alternativas, a considerar qué sucedería si se cambian ciertas condiciones o a intentar generalizar el problema (p. 33).

Otra de las características de las investigaciones es que lo relevante no es la solución de la situación propuesta inicialmente, sino lo que se podrá hacer posteriormente con la solución obtenida. El trabajo posterior de extensión, de generalización, de particularizaciones, en definitiva de búsqueda de la estructura interna del problema, variables que contiene, regularidades, patrones, modelos que la rigen o que puede generar, teorías que subyacen o que se intuyen, etc; en resumen, el estudio de las *cuestiones fértiles* que se derivan de la situación inicial y de su solución, son el verdadero contenido de los trabajos que planteamos.

Como veremos más adelante, las investigaciones matemáticas también constituyen un recurso para acercar al aula el proceso de creación y descubrimiento en matemáticas (PCDM), a pesar de que, para algún lector, esto pudiera parecer presuntuoso. A este respecto nos vienen muy bien las palabras de Hadamard (1947):

> Entre el trabajo de un estudiante que trata de resolver un problema de geometría o de álgebra y un trabajo de invención, puede decirse que hay únicamente una diferencia de grado, una diferencia de nivel, tratándose en realidad de trabajos de naturaleza muy análoga (p. 175).

O también las de Taton (1973), cuando se refiere a la *diferencia de nivel* con las palabras siguientes:

> Una de las características de las matemáticas es que la invención empieza muy pronto, desde que un alumno se sitúa ante un problema que debe resolver (...). Si el alumno no se limita a contestar a las preguntas que se le formulan, sino que se esfuerza en hacer observaciones originales relativas al problema, o mejor aún, si él mismo se plantea problemas, en estos casos su trabajo se distingue del del matemático creador sólo en una diferencia de nivel (p. 24).

Por último, acudiremos a Polya para ilustrar la necesidad de hacer un hueco, en el proceso de enseñanza y aprendizaje, para el acercamiento al PCDM; es decir, a la invención:

> El resultado del trabajo creador del matemático es el razonamiento demostrativo, una prueba, pero la prueba se descubre por razonamiento plausible, es decir, por intuición. Si esto es así, y yo lo creo, habrá un lugar para la

intuición en la enseñanza de las matemáticas. La educación debe prepararnos para la invención o, al menos, para el gusto por ella. En cualquier caso, la educación no debe suprimir los gérmenes inventivos en el estudiante (p. 465).

En cuanto a la historia de las matemáticas, debemos aclarar que, en las investigaciones que estamos planteando, nos proponemos utilizarla focalizando la atención en las obras de los personajes, no en su biografía. No excluimos la elaboración de notas biográficas que formen parte del documento final resultado de la investigación, pero nunca constituirán éstas el *cuerpo central* del trabajo de investigación. Sí lo harán, en cambio, el estudio, análisis y reelaboración de alguna demostración original o de algún resultado que sean adecuados al nivel del estudiante o estudiantes que lo realizan.

ORIENTACIONES Y OPCIONES DIDÁCTICAS

La historia de las matemáticas es un buen campo desde el que nos podemos plantear una investigación matemática, pero, a la hora de llevarla a cabo, debemos tomar algunas decisiones previas importantes, que tienen que ver más con los planteamientos didácticos que con el hecho concreto de usar la historia de las matemáticas; por ejemplo:

- Los contenidos matemáticos de la misma, que deben ser adecuados al nivel educativo elegido;
- El uso, o no, de un guión de trabajo elaborado por el profesor, en el que se vayan presentando los principales problemas de la investigación, que deberán resolver los estudiantes. La respuesta a esto estará en función del nivel de autonomía personal del alumnado y de la cantidad de experiencias previas que tengan en este campo. En la mayoría de los casos, tanto en ESO como en Bachillerato, será necesario facilitarles un guión de trabajo orientativo. Sólo cuando estén habituados a este tipo de tareas, tendrán autonomía suficiente como plantearse preguntas originales, nuevos problemas, etc., y se saldrán del guión inicial;
- El tipo de propuesta de trabajo: individual o en grupo. En relación con esta decisión, tendremos que pensar si se presenta y se plantea a todo el grupo clase o a alumnado seleccionado, si el trabajo es obligatorio o voluntario, etc.
- El papel del profesorado en el proceso. Es importante reflexionar sobre nuestro nivel de implicación en el proceso de investigación, contenido y número de entrevistas de seguimiento a llevar a cabo, etc. En cualquier caso, la interacción con el profesorado se debe llevar a cabo a través del *debate científico*. Para profundizar en esta última idea, puede consultarse a Legrand, (1986, 1991, 1996).
- La evaluación del trabajo o informe final de la investigación. Debemos tener claros los criterios de evaluación junto con los descriptores e indicadores de logro, así como la integración de las calificaciones obtenidas en el

proceso global de la evaluación de la materia en ese nivel educativo. A este respecto puede consultarse De la Fuente (2011).

En cuanto a la elección del tema histórico de trabajo, hemos elegido dos contextos diferentes, alrededor de los cuales proponemos los trabajos de investigación:

1. Un personaje relevante dentro de la historia de las matemáticas. Se trata proponer investigaciones, que pueden ser complementarias unas de otras, para profundizar en la obra matemática de ese autor.
2. Un momento histórico de interés dentro del mundo de las matemáticas. Con este enfoque, propondremos investigaciones que tratarán algunos problemas interesantes de la época, profundizando en los métodos de resolución y analizando su significado, utilidad, potencia, limitaciones, etc.

Por último, no debemos olvidar que nuestro principal objetivo es el aprendizaje de matemáticas utilizando como soporte su historia. Ello conllevará que los estudiantes también aumenten su cultura matemática, incorporando a sus saberes personales conocimientos de la historia de esta ciencia; pero las investigaciones propuestas no tienen como finalidad primordial aumentar sus conocimientos de historia de las matemáticas, sino propiciar la profundización en los contenidos matemáticos desde otra óptica diferente a la habitual.

EJEMPLOS ALREDEDOR DE UN PERSONAJE

Siguiendo las orientaciones del punto anterior, hemos elegido, en primer lugar, un personaje, alrededor del cual nos podemos plantear varias investigaciones, de diferentes temáticas y para diversos niveles. Concretamente nos estamos refiriendo a Arquímedes de Siracusa, al que podemos contextualizar también con la lectura previa de la novela de literatura contemporánea, *El contador de arena*, de Gilliam Bradshaw (2006). Esta obra, cuya lectura es una delicia, nos presenta a Arquímedes en plena juventud, inmediatamente después de volver a Siracusa, tras su estancia en Alejandría, donde había asentado y desarrollado su talento, a la vez que había contactado y conocido a los científicos más sobresalientes de la época y se había visto influido por las obras de todos ellos. Sin más dilación, pasamos a presentar algunas propuestas de trabajo relacionadas con Arquímedes:

1. Sobre la obra *Arenario*

Esta obra del genio siracusano es la que tiene una relación directa con la novela mencionada anteriormente, aunque en esta última aparecen varios temas matemáticos más, todos ellos relacionados con Arquímedes, que se pueden escoger para plantear otras investigaciones.

Con el fin de favorecer la contextualización del tema de la investigación, decidimos plantear, a los estudiantes, la lectura previa de la novela. De ella hemos entresacado algunos párrafos para introducir y motivar algunas de las propuestas de trabajo, así como de la obra original de *Arenario*, que hemos encontrado en Arquímedes (1996). Todos ellos figuran en el guión de trabajo para los estudiantes que presentamos a continuación:

Investigación 1: *Arenario* proviene de *arena*…

> La caja estaba llena de arena, una arena fina, cristalina, casi blanca, que había sido humedecida primero y aplanada después hasta obtener una superficie uniforme y lisa como la de un pergamino de la mejor calidad. Pero la luz del sol, que caía oblicuamente con el atardecer, centelleaba aquí y allá sobre los granos, capturando facetas demasiado pequeñas como para que el ojo pudiera distinguirlas, facetas innumerables que generaban puntos diferenciados de luminosidad, y el joven que las observaba se encontró de repente preguntándose si sería capaz de calcular el número de granos (p. 7).

Así comienza *El contador de arena*, haciendo una amplia referencia a una de las obras de Arquímedes que se conservan; concretamente a *Arenario.*

1.1. Investiga, usando las referencias bibliográficas o de otra manera, el contenido de *Arenario* y su relación con las primeras páginas de la novela. ¿De qué trata? Como ayuda te presentamos un párrafo de esa obra tomado de Arquímedes (1969):

> Hay algunos que creen que el número de granos de arena es infinito en cantidad y por arena entiendo no sólo la que existen en Siracusa y el resto de Sicilia, sino también la que se encuentra en cualquier región habitada o sin habitar. Hay también algunos que, sin considerarlo infinito, creen que no existe una cifra lo bastante grande para exceder a su magnitud. Y está claro que quieren mantienen esta opinión, si imaginasen una masa hecha de arena en otros aspectos tan grande como la masa de la Tierra, incluyendo en ella todos los mares y las cavidades de la Tierra llenadas hasta una altura igual a la de las montañas más altas estarían muchas veces lejos de reconocer que se pueda expresar ningún número para exceda a la magnitud de la arena así conseguida. Pero intentaré demostraros por medio de puntos geométricos que seréis capaces de seguir, que los números nombrados por mi… algunos exceden no sólo al número de la masa de arena igual en magnitud a la de la Tierra llena de la forma descrita, sino al de la masa igual en magnitud al Universo (p. 4).

A veces, si miramos en profundidad el contenido de las novelas, podemos descubrir errores. En *El contador de arena* hay un fallo en las operaciones. Para encontrarlo, consulta en las páginas 7 y 8 las dimensiones de la caja de arena y repasa los cálculos. Como ayuda te podemos decir que, aunque al inicio la autora dice: *la caja estaba llena de arena*, un poco más abajo, en la misma página, escribe: *la arena la llenaba sólo hasta la mitad.*

1.2. ¿Realmente *habría en la caja seis mil por cuatro mil por quinientos granos de arena*? Calcula el verdadero número de granos que cabrían en la caja.

> Tenía ante sí un problema interesante: el número de granos de arena que había en la caja era mayor de lo que podía expresar. […] y su sistema de escritura no disponía de ningún símbolo para el cero que pudiese extender los números indefinidamente. No había manera de concebir un número mayor que una miríada de miríadas. ¿Qué término podía encontrar para expresar lo inexpresable? (Pág. 8).

1.3. ¿Cuál es el mayor número que podía expresar Arquímedes?

1.4. ¿Cómo se escribían los números en esa época? ¿Cuál era la dificultad añadida al no tener símbolo para el cero?

En *Arenario,* Arquímedes se inventa nuevos *órdenes* para poder escribir números muy grandes:

Números de primer orden: desde 10.000 hasta $(10.000)^2$=100.000.000.
Unidad de segundo orden: 100.000.000.

Números de segundo orden: desde 100.000.000 hasta $(100.000.000)^2$.

Unidad de tercer orden: $(100.000.000)^2$=10.000.000.000.000.000=10^{16}.

Números de tercer orden: desde $(100.000.000)^2$ hasta $(100.000.000)^3$.

Así sucesivamente hasta alcanzar el orden 100.000.000 de los números.

1.5. Completa la tabla siguiente, escribiendo los resultados en forma de potencia de 10:

Orden de Arquímedes	Unidad	Desde el nº	Hasta el nº
1º	10^4	10^4	10^8
2º			
3º			
4º			
….	….	….	….
100.000.000º			
n-ésimo			

Al número $(100.000.000)^{100.000.000}$ Arquímedes le llama P y a todos los números desde 1 hasta P los denomina del *primer periodo*.

1.6. ¿Cuántas cifras tiene P?

> Si una miríada de miríada podía ser una unidad, ¿por qué detenerse ahí? ¡Una vez alcanzada una miríada de miríadas de miríadas de miríadas, se podía establecer como nueva unidad y empezar de nuevo. (Pág. 9).

Consideraremos P como la *unidad de primer orden del segundo periodo*. Los números de *primer orden del segundo periodo* van desde P hasta $100.000.000P$. Este número es la *unidad de segundo orden del segundo periodo*. Los números de *segundo orden del segundo periodo* van desde $100.000.000P$ hasta $(100.000.000)^2P$. Así sucesivamente hasta llegar al *orden 100.000.000 del segundo periodo*, cuyo último número es $(100.000.000)^{100.000.000}P$, o también P^2.

1.7. Averigua el número de cifras de P^2, P^3, P^4, … hasta llegar a $P^{100.000.000} = P^{10^8}$.

1.8. Haz una estimación del número de páginas que ocuparía escribir el último de ellos.

"Supongamos que en una semilla de amapola caben diez granos de arena y que en el ancho de un dedo …" (Pág. 7).

La verdad es que la novela no se ajusta a lo que realmente supuso Arquímedes. Éstas fueron sus hipótesis iniciales (tomadas de Arquímedes, 1969):

- La razón entre el diámetro de la semilla de la adormidera y el ancho de un dedo es menor o igual que 1/40.
- La relación entre la razón de los volúmenes de las esferas y la razón de sus diámetros es …
- El valor del diámetro del *cosmos* es menor que … estadios.
- El valor de un estadio es menor que … dedos.
- El número de granos de arena que caben en un volumen igual al de la semilla de la adormidera es menor o igual que …

1.9. Completa cada una de las hipótesis iniciales o resultados de partida que Arquímedes dio como válidos.

> Marco –dijo con impaciencia–, ¿cuál es el mayor número que eres capaz de imaginar? ¿El número de granos de arena que hay en Egipto… no, en el mundo? ¿Cuántos granos de arena se necesitarían para llenar todo el universo? (Pág. 9).

En *Arenario,* el genio siracusano nos muestra cómo calcular, aproximadamente, el número de granos de arena contenidos en el *cosmos* y en la *esfera de las estrellas fijas*.

1.10. Explica el significado que tienen las palabras *cosmos* y *esfera de las estrellas fijas* para Arquímedes.

Seguro que, a estas alturas, tienes ganas de saber cuáles fueron las respuestas verdaderas a estas preguntas. Aquí te las mostramos en palabras reales de nuestro genio (sacadas de Arquímedes, 1969):

> […] el número de granos de arena que contendría una esfera del tamaño de nuestro cosmos es menor que 1.000 unidades de séptimo orden de números.
>
> […] podemos demostrar además que una esfera del tamaño atribuido por Aristarco a la esfera de las estrellas fijas contendría en número de granos de arena menor que 10.000.000 unidades de octavo orden de los números.

1.11. Averigua qué números son. Exprésalos en forma de potencia de 10.

> Nadie, excepto Arquímedes, se atrevería a formular una pregunta tan descabellada como aquella. Y a nadie más se le ocurriría una respuesta tan incomprensible. […] ¿No debería aquel joven lunático olvidarse de tales interrogantes y emplear su cabeza en cuestiones más prácticas? (Pág. 11).

Éstas eran algunas de las opiniones de Marco, el esclavo, sobre su joven amo.

1.12. Ahora que has visto, en profundidad, el problema que se planteó nuestro genio, contesta a la pregunta que se hace su criado al final de la cita.

Como puedes ver en la obra *Arenario* de Arquímedes, se menciona a un personaje llamado Aristarco. También aparece en *El contador de arena* en más de una ocasión, concretamente en las páginas 38 y 133-134. Te presentamos el pasaje de una de ellas:

– Cuéntame otra vez la hipótesis de Aristarco –dijo. […]
– Dice que la Tierra gira alrededor del Sol siguiendo la circunferencia de un círculo.
– ¿Y los planetas también?
– En efecto.
– ¿Y las estrellas? […]
– ¡No! Esa es la parte más interesante –dijo Arquímedes, apasionándose con el tema-. Aristarco sostiene que el universo es mucho, mucho más grande de lo que nadie pueda imaginar. Dice que el círculo completo que describe la órbita terrestre no es más que un punto en comparación con el tamaño de la esfera de las estrellas fijas (Pág. 134).

Como puedes imaginarte esto es algo absolutamente novedoso, teniendo en cuenta que habrían de pasarse alrededor de 1800 años hasta que Copérnico retomara la idea.

1.13. ¿Quién fue Aristarco de Samos, también llamado el Copérnico de la antigüedad? Explica su teoría sobre el movimiento de los astros.

2. Sobre el *Stomachion*

A continuación presentamos el guión de una investigación sobre otro tema relacionado con Arquímedes: el rompecabezas denominado *Stomachion* o *Dolor de tripa*, que muchos estudiosos han considerado, a lo largo de la historia, original suyo. La aparición de este *juego* entre las páginas del palimpsesto nos asegura su relación directa con el genio siracusano. En este caso, también introducimos las propuestas de investigación con párrafos de *El contador de arena*:

Investigación 2: Geometría con un rompecabezas…

> En Alejandría había comprado un juego para su padre, que consistía en un conjunto de piezas de marfil cortadas en cuadrados y triángulos. Uniéndolas, se podría formar un cuadrado, un barco, una espada, un árbol o cualquier otra figura entre un centenar. El rompecabezas era una delicia para cualquier geómetra (Pág. 37).

Vamos a acercarnos al juego creación de Arquímedes, que se denomina *Stomachion.* Consiste en un cuadrado dividido en 14 piezas poligonales: once triángulos, dos cuadriláteros y un pentágono, como en la figura 1.

Figura 1

2.1. La primera cuestión que se nos ocurre es calcular las áreas de cada una de las figuras que componen el *puzle*. ¿Qué fracción del área del cuadrado representa cada una de las áreas de las figuras que lo componen?

La cuestión anterior no es sencilla y seguro que ha supuesto el empleo de bastante tiempo para responderla en toda su extensión. Te proponemos ahora un método distinto para responder a la pregunta anterior; se trata de utilizar el denominado Teorema de Pick.

2.2. El teorema de Pick sirve para calcular el área de una figura poligonal cerrada (como en la figura 2) cuyos vértices están situados en una cuadrícula cuadrada, en función del número de puntos de la cuadrícula que están en el interior de la figura (los coloreados de rojo) y del número de puntos (de la cuadrícula) que están en su frontera (los coloreados de negro). Investiga, encuentra su enunciado, y aplícalo a las piezas que forman el *stomachion* para calcula el área de cada una.

2.3. George Alexander Pick fue un matemático austríaco que vivió entre 1859 y 1943. Averigua los principales datos de su vida y haz una pequeña biografía. Incluye en ella los principales resultados matemáticos debidos a él.

2.4. Fíjate en la figura 3, en la que cada una de las piezas del stomachion tiene un número en su interior. Interpreta su significado y relaciónalo con las respuestas que has dado a dos de las últimas cuestiones planteadas (2.2 y 2.3).

Una vez encontradas las áreas, vamos a plantearnos otra cuestión, que nos ayudará a profundizar en el rompecabezas y a conocer mejor su estructura.

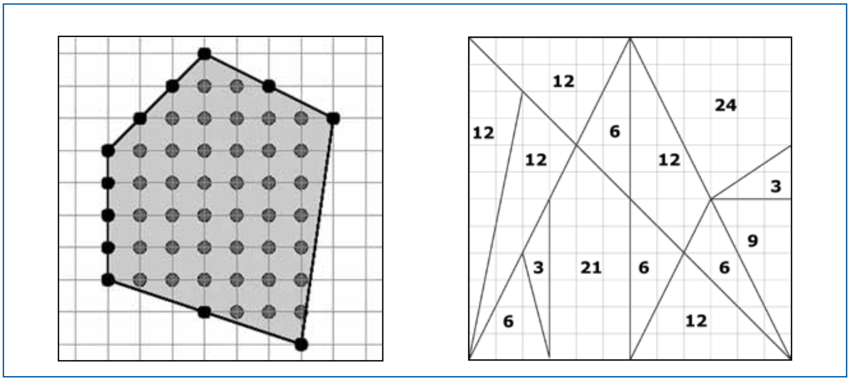

Figura 2 y 3

2.5. Con la ayuda de la imagen del *stomachion* dentro de la cuadrícula, calcula las longitudes de los lados de cada una de las piezas. Prepárate para obtener números irracionales como resultado de algunas de ellas.

Otro de los usos del *stomachion* fue la construcción de figuras determinadas, usando todas las piezas que lo componen. En las figuras 4A y 4B te presentamos algunas de ellas; en unas se han construido diferentes tipos de polígonos y en la otra una con forma de elefante:

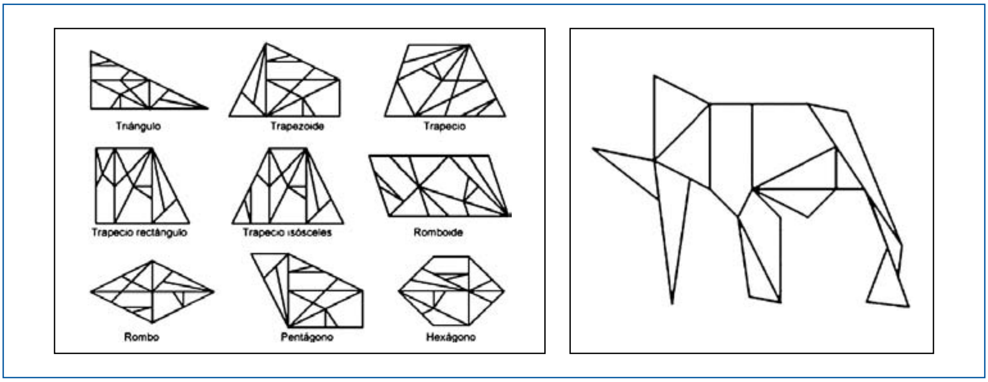

Figura 4a y 4b

A sabiendas de las dificultades que conlleva el asunto, te vamos a proponer la construcción de algunas figuras con las piezas del *stomachion*. No es la actividad más importante, desde nuestro punto de vista, por lo que si no lo consigues no te desesperes. En cualquier caso, puedes usar lo que sabes de las áreas y de los lados de las piezas.

2.6. Reparte las 14 piezas para formar las figuras que se indican en cada caso, cumpliendo las condiciones que se especifican:

a) Dos triángulos que tengan la misma superficie.

b) Dos triángulos escalenos tales que la superficie de uno sea doble que la del otro.

c) Dos triángulos escalenos tales que la superficie de uno sea triple que la del otro (el pequeño es un triángulo escaleno rectángulo).

d) Tres triángulos (A, B y C) de manera que la superficie de C sea triple que la de A, y la de B sea doble que la de A.

2.7. Haz lo mismo de antes, para formar:

a) Tres polígonos de manera que tengan la misma superficie.

b) Cuatro polígonos de manera que tengan la misma superficie.

c) Seis polígonos de manera que tengan la misma superficie.

d) Tres polígonos de manera que sus superficies sean tres números múltiplos de 12.

e) Cinco triángulos de manera que sus superficies sean cinco números múltiplos de 6.

Volvamos ahora a la principal cuestión a resolver con el *stomachion*

Como puedes ver en la figura 5, hay muchas formas de colocar las piezas para obtener el cuadrado inicial; aquí te presentamos 4 de ellas. Seguro que estás pensando lo mismo que nosotros: ¿de cuántas formas lo podemos conseguir? Te vamos a dar la solución al problema: existen 536 maneras de colocar las piezas dentro del cuadrado, considerando idénticas las soluciones que son equivalentes mediante rotaciones o reflexiones. Si estas formas se consideraran distintas, la respuesta sería entonces 17152.

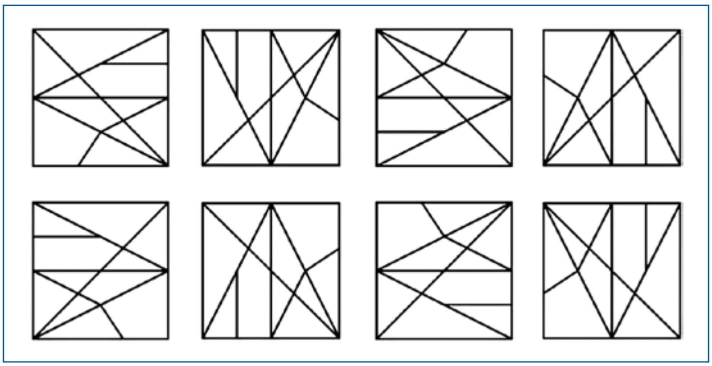

Figura 5

2.8. Investiga hasta donde puedas e intenta acercarte al número de posibilidades. A ver cuántas de ellas eres capaz de encontrar y explicar razonadamente. Para ello puedes tomar la figura del lateral como punto de partida. ¡Qué haya suerte!

Investigación 3: El número π

Para completar esta profundización sobre las matemáticas de Arquímedes sin alargar la extensión de este artículo, los lectores pueden analizar, en De la Fuente (2010), otra investigación que tiene como tema el número π y los métodos utilizados por el genio siracusano para obtener las famosas acotaciones de π: $3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + 1 / 7$.

Ni que decir tiene que hay infinidad de ejemplos de otros personajes que nos podrían servir para los mismos propósitos:

- Euclides, para hacer un estudio de algunos de los contenidos de sus *Elementos*: Teorema de Pitágoras y su recíproco, números primos, proporción áurea, postulados de la geometría, etc.
- Al Jwuarizmi. Se trata de profundizar en los métodos geométricos de este autor para la resolución de ecuaciones de segundo grado, comprobando la equivalencia entre la equivalencia entre las ideas de completar el cuadrado geométrico y la de completar el cuadrado algebraico o aritmético.
- Pascal. El análisis de la correspondencia entre Pascal y el Caballero de Meré y la revisión y resolución de los problemas que dieron lugar al nacimiento del cálculo de probabilidades, puede ser una interesante propuesta para una investigación matemática en ESO o Bachillerato.

3. Ejemplos sobre un momento histórico

Después de las investigaciones matemáticas vertebradas alrededor un personaje como Arquímedes, vamos a presentar algunos ejemplos más tomando como contexto generador un momento histórico. En este caso hemos elegido la primera mitad del siglo XVII, unos años antes del alumbramiento simultáneo del Cálculo Infinitesimal por Newton y Leibniz. Los temas de trabajo tienen que ver con los métodos, esencialmente algebraicos, que se utilizaban para resolver el problema del cálculo de la recta tangente a una función en un punto y el de otras rectas relacionadas con ella.

Sobre el método del círculo de Descartes para el cálculo de la recta normal

El cálculo de la recta tangente o normal a una curva en un punto es un simple ejercicio si tenemos como herramientas disponibles las derivadas, pero ¿cómo se calculaban antes de aparecer estas últimas? Esta cuestión la resolvieron de forma

algebraica algunos grandes matemáticos como Descartes o Fermat, aunque sus métodos no siempre se atenían al rigor requerido; pero, con mayor o menor fortuna, pusieron las primeras piedras sobre las que, posteriormente, se alumbraron los conceptos que las resolvieron de forma definitiva. Uno de estos procedimientos es el *método del círculo de Descartes para calcular la recta normal*, que su autor describe con bellas palabras en el libro II de la edición de 1637 de *La Geometría*:

Creo haber dado aquí todo lo que se requiere para los elementos de las líneas curvas, cuando haya expuesto la manera general de trazar líneas rectas que las corten en ángulos rectos en los puntos que de ellas se elijan.

Y me atrevo a decir que éste es el problema más útil y más general no sólo que yo conozca, sino que yo haya anhelado jamás conocer en Geometría (p. 423) .

Presentamos, a continuación, un guión para profundizar en este tema:

Investigación 4: El método de Descartes y sus aplicaciones

4.1. Consultar la bibliografía adecuada para describir pormenorizadamente el método del círculo de Descartes para calcular la recta normal a una curva en un punto, por ejemplo en Grattan-Guinnes (1984). Enumera después cuáles son las ideas clave del procedimiento.

4.2. Algún matemático posterior a Descartes ha dicho respecto a su método:

- Es un método algebraico-geométrico que resuelve el problema sin entrar en “el peligroso mundo de lo infinitamente pequeño”.
- Reduce el problema del cálculo de la recta normal (y el de la recta tangente) a la búsqueda de soluciones dobles de ecuaciones algebraicas.
- Cuando la ecuación de la curva no es una ecuación algebraica sencilla, el método se complica por los laboriosos cálculos que hay que hacer para determinar la solución doble de la ecuación.

Analiza las frases anteriores y da argumentos, según tu opinión, para estar de acuerdo o en desacuerdo con ellas.

Descartes aplicó su método para calcular la recta tangente y la normal a una elipse centrada en el origen.

4.3. Demuestra, utilizando el método de Descartes, que la recta normal a una elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ en el punto (x_0, y_0) tiene por ecuación $y - y_0 = \frac{a^2 y_0}{b^2 x_0}(x - x_0)$.

4.4. Utilizando el mismo método, demuestra que la ecuación de la recta tangente en el mismo punto de la parábola tiene por ecuación $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$

Como hemos podido comprobar, la recta tangente a una curva en un punto se caracteriza porque el punto de tangencia es solución doble entre la curva y ella. Vamos a profundizar en esta idea y a demostrar que se cumple en cualquier función polinómica. Para ello puedes seguir las siguientes orientaciones:

4.5. Considera la función cuadrática $y = x^2 - 4x + 3$. Comprueba que la recta tangente a esta función en el punto de abscisa x=4 tiene un contacto de orden 2 con la función en el punto de tangencia. Verifica que se cumple la misma propiedad para x=1.

4.6. Investiga si es verdadera la propiedad anterior para otra función cuadrática concreta.

4.7. Enuncia la propiedad anterior para una función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ cualquiera y demuéstrala.

Hemos demostrado que la recta tangente a una función cuadrática en uno cualquiera de sus puntos cumple la propiedad de que el punto de contacto entre ellas, que es el punto de tangencia, es solución doble del sistema.

Ahora se trata de demostrar que esa recta es la única que lo cumple.

4.8. Sea una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ y todas las rectas que pasan por el punto $(p, f(p))$ de la misma; demuestra que la única recta que tiene un contacto de orden dos con la función es la recta tangente a la función en ese punto.

Esta propiedad, que hemos demostrado para las funciones polinómicas de segundo grado, las parábolas, también se cumple para otras funciones polinómicas de grado diferente a dos. Esto es lo que se trata de demostrar a continuación.

4.9. Sea la función $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$. Comprueba que se verifica la propiedad anterior para x=0; es decir, que la recta tangente a la función en ese punto es la única recta que, pasando por ese punto, tiene un contacto de orden dos con la curva.

4.10. Dada una función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, y un punto cualquiera de la misma $(p, f(p))$, demuestra que la recta tangente a la cúbica en el punto dado tiene un contacto de orden 2 con ella (para ello puedes utilizar la regla de Ruffini) y que es la única recta que lo cumple.

4.11. Dada una función polinómica $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ con $a_n \neq 0$ demuestra que la recta tangente en cualquiera de sus puntos $(p, f(p))$ tiene un contacto de orden 2 con la función en el punto de tangencia y que es la única recta que lo cumple.

Sobre la Regla de Hudde

La aplicación del método de Descartes, mencionado anteriormente, tenía una dificultad grande cuando la ecuación a resolver, para calcular la solución doble, era complicada. Para paliar este inconveniente se utilizaba la denominada Regla de Johann Hudde (1628-1704), que fue publicada por Frans van Schooten, en una carta en su edición latina de 1659 de *La Géométrie* de Descartes. La mencionada regla aparece con el siguiente enunciado:

> Si una ecuación tiene dos raíces iguales y multiplicamos la ecuación por una progresión aritmética arbitraria de manera que el primer término de la ecuación queda multiplicado por el primer término de la progresión y así sucesivamente, entonces digo que el producto obtenido será una ecuación que tiene de nuevo la raíz dada.

En De la Fuente (2011), el lector interesado puede ver una propuesta de investigación para un nivel de 4º ESO sobre este tema. En ella se pueden observar las conexiones entre distintos contextos matemáticos, como son las ecuaciones de segundo grado, las progresiones aritméticas y las funciones cuadráticas (toda la investigación se plantea para funciones y ecuaciones de segundo grado). También se puede ver, en profundidad, el efecto transformador de la Regla de Hudde en ecuaciones de segundo grado con una solución doble y la transformación que tiene lugar en las parábolas correspondientes. En el presente artículo, vamos a presentar otro guión diferente, que podría plantearse para estudiantes de bachillerato:

Investigación 5: La Regla de Hudde

5.1. Johan Hudde (1628-1704) desarrolló un ingenioso método para encontrar soluciones dobles de ecuaciones algebraicas, denominado históricamente como *Regla de Hudde*. Haz una breve reseña biográfica de este personaje y encuentra el enunciado de la famosa *Regla.*

Nuestro primer objetivo va a ser demostrar la veracidad de la *Regla* para ecuaciones polinómicas de cualquier grado. Para ello, puedes contestar a las preguntas siguientes o ir directamente a la tarea 5.5.

5.2. Sea una ecuación de segundo grado con solución doble, por ejemplo $ax^2 + bx + c = 0$. Calcular el valor de la solución.

Por otra parte, podemos escribir la ecuación como $(x - a)^2 = 0$, siendo la solución doble, o, desarrollándola, como $E_1 \equiv x^2 - 2ax + a^2 = 0$. Si multiplicamos los coeficientes de esta última por los términos de la progresión aritmética (p.a.) p, p+d, p+2d, obtendremos una nueva ecuación E^2 que, según la Regla de Hudde, también tiene como solución el valor a.

5.3. Demuestra que a es solución de E_2 y calcula también la otra solución (cuando E_2 sea de segundo grado).

Una vez demostrada la veracidad de la Regla de Hudde para ecuaciones de segundo grado, pasaremos a ecuaciones de tercer grado. Para ello debemos tener en cuenta que una ecuación de tercer grado con una solución doble es de la forma $E1 \equiv (x - a)^2(x - b) = 0$.

5.4. Desarrolla la expresión de E_1 en forma de suma y multiplícala por la p.a. p, p+d, p+2d, p+3d. Demuestra, con la Regla de Ruffini o con cualquier otro método, que a es solución de la ecuación E_2 , transformada de E_1 por la p.a.

Tenemos la demostración para ecuaciones de grado tres. Para llevar a cabo la demostración para ecuaciones de grado n, conviene acudir a Grattan-Guinnes (1984) o González Urbaneja (1992), donde se esboza la demostración que buscamos.

5.5. Consultando la bibliografía adecuada, demuestra que si una ecuación de grado n, E_1, tiene una solución doble a, entonces la ecuación E_2, transformada de E_1 por una p.a., también tiene como solución el valor a.

Para comprobar la potencia de la *Regla,* vamos a aplicarla para obtener resultados que te resultarán familiares:

5.6. Demuestra que si tenemos un polinomio de grado n, podemos obtener su derivada si lo transformamos por una p.a. adecuada.

5.7. Demuestra que si r es raíz doble del polinomio p(x), entonces también es raíz de la ecuación p´(x)=0, donde p´(x) es la derivada del polinomio p(x).

5.8. Demuestra el siguiente resultado, utilizando la *Regla de Hudde*:

Si en $x = a$ el polinomio $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ tiene un máximo o mínimo relativo, entonces la función $g(x) = f(x) - f(a)$ verifica que $g'(a) = 0$.

Por último, vamos a acudir a otra referencia bibliográfica para ver otras maneras de enunciar la famosa *Regla.*

5.9. Consulta Boyer (1996) y relaciona los enunciados que aparecen en él como *Reglas de Hudde* y el que hemos utilizado nosotros hasta ahora.

Al igual que cuando elegimos como elemento motivador un personaje, para el caso de elegir momentos históricos también hay una variedad inmensa de ellos. Presentamos algunos otros que pueden resultar adecuados para los niveles de Secundaria (ESO o Bachillerato):

- Matemáticas en la primera mitad del siglo XVI en Italia. Se trata de analizar las aportaciones de Del Ferro, Del Fiore, Tartaglia, Cardano y Ferrari, en la resolución de ecuaciones de grado mayor que dos, utilizando radicales, estudiando la controversia entre estos personajes alrededor del tema.
- Matemáticas y matemáticos en Alejandría. Para esta investigación se pueden escoger varios personajes vinculados a esta ciudad y profundizar en sus principales obras: Euclides, Eratóstenes, Apolonio, Herón, Diofanto, Pappus, Arquímedes, Hipatia, etc.

Algunas reflexiones didácticas finales

Una vez presentada la propuesta de aula, queremos finalizar volviendo a la reflexión personal sobre nuestra práctica:

En primer lugar dejar constancia de un hecho habitual en clase de matemáticas: entre nuestros objetivos didácticos casi nunca está la preparación de los estudiantes para la invención y el pensamiento creativo. Esta deficiencia de nuestra actual educación matemática debe ser paliada; por ello no nos cansaremos de repetir las palabras de G. Polya (1966), que pueden ser un buen revulsivo para ello:

> El resultado del trabajo creador del matemático es el razonamiento demostrativo, una prueba, pero la prueba se descubre por razonamiento plausible, es decir, por intuición. Si esto es así, y yo lo creo, habrá un lugar para la intuición en la enseñanza de las matemáticas. La educación debe prepararnos para la invención o, al menos, para el gusto por ella. En cualquier caso, la educación no debe suprimir los gérmenes inventivos en el estudiante (p. 465).

Este aspecto, tan olvidado actualmente, es uno de los objetivos que nos proponemos al plantear las investigaciones matemáticas en los niveles preuniversitarios. En este sentido, encajan muy bien las palabras siguientes:

> Es hora de orientar el tiempo que dedicamos a adiestrar en la disciplina y la obediencia hacia el placer del descubrimiento. Es hora de cultivar la imaginación y el pensamiento divergente. Es hora de permitir a los alumnos y alumnas que se planteen sin complejos cualquier pregunta por extraña que parezca, que traten de dar un respuesta en la medida de sus posibilidades e intuyan la forma de abordarla en profundidad (Usón y Ramirez, 2006, p. 60).

Por otra parte, nos movemos en un ambiente escolar en el que "sobresalen las pocas ocasiones del desarrollo normal del aula en las que los profesores ayudan y dirigen a sus alumnos en la destreza de escribir el proceso de resolver problemas de distintas formas" (Chamoso y Rawson, 2001, p. 38). Si realmente esta es la situación habitual del aula, en la resolución de un problema, se hace necesario que nuestra intervención, que es de mucho mayor calado que la resolución de un problema, no deje de lado esta competencia y la situación cambie:

> "Poca expresión escrita. Los estudiantes normalmente no escriben mucho, y lo que escriben no suele expresar normalmente lo que han pensado. No suele ser significativo. Tampoco lo hacen ordenadamente. Éste es un aspecto de la enseñanza-aprendizaje sobre el que se necesita mucha información" (Chamoso y Rawson, 2001, p. 38).

Precisamente por estar de acuerdo con el hecho de que durante el proceso de investigación de los estudiantes no hay apenas expresión escrita, es por lo que las investigaciones también se plantean entre sus objetivos didácticos la *redacción de documentos científicos*, otra de las grandes deficiencias de nuestra actual educación matemática. En ellos se pretende que aparezca la narración ordenada del proceso de investigación, en forma de informe detallado, en el que se recojan las ideas y los resultados más relevantes del proceso, teniendo como ejes principales la recopilación exhaustiva, la presentación rigurosa (porque el rigor no es esencial en los momentos en que se originan las ideas, sino en su tratamiento posterior) y las valoraciones personales sobre el mismo. De esta manera, el estudiante reflexionará sobre el proceso y sobre los resultados conseguidos, produciéndose una mayor huella de aprendizaje en su mente.

Por último, finalizaremos animando a nuestros lectores a llevar a la práctica alguna de las propuestas presentadas, porque:

> Investigar por el placer de investigar sería ya, en sí mismo, un excelente objetivo. Construir las matemáticas a partir de ese proceso es además un reto. Cuando se deja que la libertad guíe los pasos, un sinfín de posibilidades se abre ante nosotros. Un mundo desconocido para el alumno, y muchas veces para el profesor [...] (Usón y Ramirez, 2006, p. 59).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arquímedes, (1969). Arenario. En Newman, J. R. *El Mundo de las Matemáticas. Sigma.* Vol. 4, pág. 4-17. Edic. Grijalbo, Barcelona.

Boyer, C.B. (1996). *Historia de la matemática.* Alianza Editorial, Madrid.

Bradshaw, G. (2006). *El contador de arena*. Edit. Salamandra, Barcelona.

Chamoso, J. Mª y Rawson, W. B. (2001). En la búsqueda de lo importante en el aula de Matemáticas. *Suma. revista sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*, 36, 33-41.

De la Fuente C. (2010). Arquímedes de Siracusa. La deslumbrante sabiduría y la cautivadora humanidad de un genio. *Suma. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas,* 64, 63-70.

De la Fuente C. (2011). La evaluación de las investigaciones matemáticas escolares con estudiantes de ESO y Bachillerato. Propuesta para la clase. *UNO*, 57, 43-57.

Grattan-Guinness, I. (1984) *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica.* Alianza Editorial, Madrid.

Hadamard, J. (2011). *Psicología de la invención en el campo matemático.* Madrid: Real Sociedad Matemática Española.

Legrand, M. (1986). *Genèse et étude sommaire d´une situations codadidactique: le debat scientifique en situation de enseignement*. Colloque franco-allemand de Didactique des Mathématiques et de l´Informatique. La Pensée sauvage.

Legrand, M. (1991). Les compétences scientifiques des etudiants sont elles indépendantes de la facon dont nous leur presentonsla sciencie? *Gacette des mathématiciens,* Suplément nº 48

Legrand, M. (1996). El Debate científico en clase de matemáticas. *La enseñanza de las matemáticas: puntos de referencia entre los saberes, los programas y la práctica*. Frouard (Francia): Ed. Topiques.

Polya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible.* Madrid: Tecnos

Taton, R. (1973). Causalidad y accidentalidad de los descubrimientos científicos. Barcelona: Labor

Usón, C. y Ramírez, A. (2006). En torno al Triángulo Aritmético que algunos llaman de Pascal. *Suma. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas,* 53, 53-60.

Materiales en internet:

Para estudiar el proceso llevado a cabo por Arquímedes para aproximarse al valor de π se pueden consultar varias páginas de internet, entre ellas la siguiente:
http://itech.fgcu.edu/faculty/clindsey/mhf4404/archimedes/archimedes…

Sobre el Stomachion se pueden consultar las páginas web:
http://www.maa.org/editorial/mathgames/mathgames_11_17_03.html
http://www.math.nyu.edu/~crorres/Archimedes/Stomachion/intro.html

El palimpsesto tiene su propia página en internet, con mucha información relativa al documento: www.archimedespalimpsest.org/