Epsilon - *Revista de Educación Matemática* *2011, Vol. 28(1), nº 77, pp. 155-164*

Algunos hechos históricos en la resolución de problemas, sobre el origen del cálculo integral

F. Damián Aranda Ballesteros
Manuel Gómez Lara

1. ALGUNAS OBSERVACIONES SOBRE LA CUADRATURA

Los matemáticos antiguos estaban condicionados y limitados por las construcciones que podían obtener con la regla y el compás. Entre los problemas más difíciles de resolver, en el siglo V a.C., se encontraban la cuadratura o dar forma de cuadrado a una figura plana. Para ser exactos:

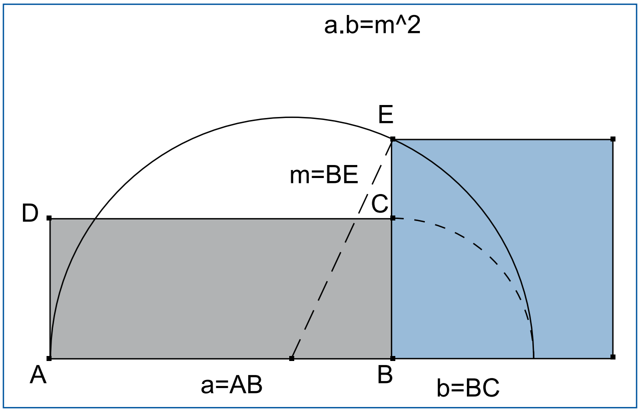
> "La cuadratura de una figura plana es la construcción con regla y compás de un cuadrado con la misma superficie de la figura plana original. Si la cuadratura de una figura plana puede ser llevada a cabo, se dice, que la figura es cuadrable"

No debe sorprender que el problema de la cuadratura interesara a los griegos. Desde un punto de vista puramente práctico, la determinación de la superficie de una figura de forma irregular no es, por supuesto, nada fácil. Si esta figura se puede sustituir por un cuadrado equivalente, entonces la determinación de la superficie de la figura original quedaría reducida al sencillo problema de encontrar el área de ese cuadrado.

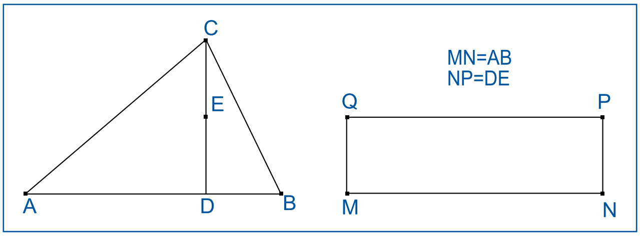
Indudablemente, la fascinación de los griegos por la cuadratura tenía un interés que excedía los aspectos prácticos. Pues, si se consigue, la cuadratura impondría la regularidad simétrica del cuadrado a la irregularidad asimétrica de una figura plana arbitraria. Para los que buscaban un mundo natural gobernado por la razón y el orden, interesaba mucho el proceso de sustituir lo asimétrico por lo simétrico, lo imperfecto por lo perfecto, lo irracional por lo racional. En este sentido, la cuadratura no sólo representaba el triunfo de la razón humana, sino también de la inherente simplicidad y belleza del universo humano.

El diseño de cuadraturas era, en consecuencia, un problema particularmente fascinante para los matemáticos griegos, quienes producían inteligente s construcciones geométricas con ese fin. Como, casi siempre, las soluciones pueden encontrarse por aproximaciones, cuadrando primero una figura razonablemente "fácil" y pasando de esa construcción a la cuadratura de otras más irregulares y extrañas.

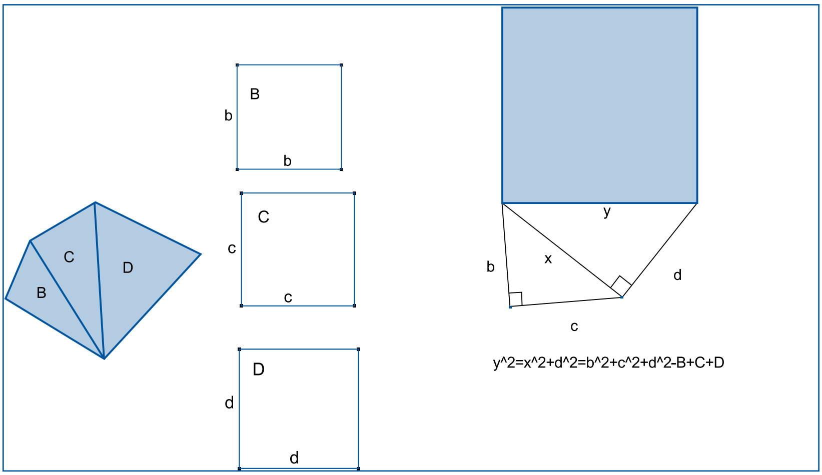
El paso inicial clave en este proceso es la cuadratura del rectángulo, procedimiento que aparece en la proposición 14 de los *Elementos de Euclides*, aunque seguramente era ya conocido bastante tiempo antes. Comenzamos con dicho procedimiento.



Paso 1
Cuadratura del rectángulo



Paso 2
Cuadratura del triángulo.

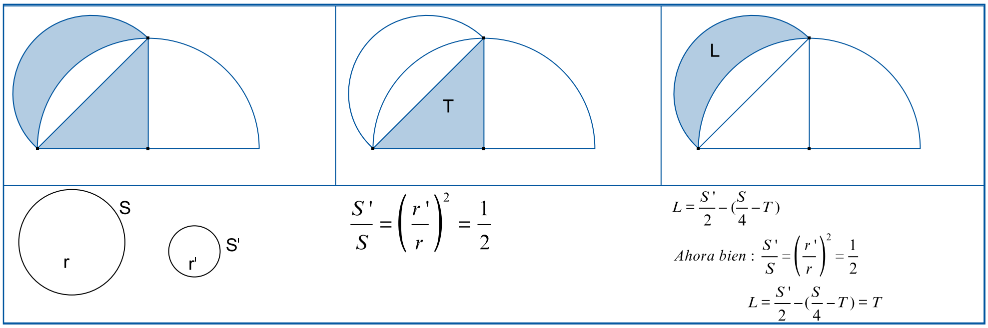


Paso 3
Cuadratura del polígono.

Con los términos descritos, los griegos podrían cuadrar los polígonos más irregulares. Pero este triunfo estaba amortiguado por el hecho de que estas figuras eran rectilíneas, es decir, sus lados, aunque numerosos y formando toda clase de extraños ángulos, eran simple líneas rectas. Mucho más dificultoso era el tema de si las figuras con lados curvados, las llamadas curvilíneas, eran también cuadrables. En principio, esto parecía improbable, ya que no existen medios obvios de rectificar una curva mediante regla y compás. Debió, por tanto, resultar totalmente sorprendente el que Hipócrates de Quíos consiguiera cuadrar una figura curvilínea conocida como una “lúnula” en el siglo V a. C.

2. LA CUADRATURA DE UNA LÚNULA

Vemos la equivalencia entre las siguientes regiones sombreadas:



3. LA DETERMINACIÓN DE ARQUÍMEDES DEL ÁREA DEL CÍRCULO

Arquímedes de Siracusa (287-212 a.C.) fue el más grande matemático de la antiguedad. De entre sus más famosos descubrimientos destaca la medida del círculo. La clave de este problema se encuentra en el cálculo del número π, esto es, el número por el que hay que multiplicar el diámetro y el cuadrado del radio para determinar la longitud de la circunferencia y el área del círculo, respectivamente. (A propósito del nombre de este número π, éste se debe a Euler que lo llama así en sus Commenterii Academiae Petropolitanae ad annum 1739, vol. IX)

Por el año 255 a.C, Arquímedes escribió un breve tratado titulado Medida de un círculo, cuya primera proposición daba ya un análisis penetrante del área circular. Antes de analizarla, examinaremos lo que se conocía acerca de las áreas circulares cuando Arquímedes apareció en escena.

Los geómetras de la época sabían que la razón de la circunferencia a su diámetro siempre es la misma. En términos modernos, diríamos que:

$\frac{L_1}{d_1} = \frac{L_2}{d_2}$ donde L es la longitud de la Circunferencia y d, su diámetro. Esta constante, no es otra que π. Pero, ¿qué ocurre con el área del círculo? Se conocía que la razón del área de un círculo al cuadrado de su diámetro era una constante (Proposición XII.2 de los Elementos). Euclides había demostrado que existe una cierta constante k tal que $\frac{S}{d^2} = k$.

Ahora bien, ¿cómo se relacionan estas constantes entre sí?. Es decir, ¿se puede encontrar una relación sencilla entre la constante unidimensional π y la constante bidimensional k? Aparentemente, Euclides no había encontrado tal relación.

Pero en el breve tratado Medida de un círculo, Arquímedes demostró lo que hoy es la fórmula moderna del área de un círculo, que implica también al número π.

Uno de los resultados preliminares directos era el del área de un polígono regular.

“El área del polígono regular es s·a, donde s=semiperímetro y a=apotema.”

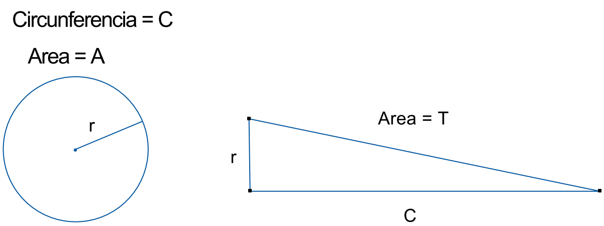
Otro resultado previo conocido sostenía que, en un círculo dado, es posible inscribir un cuadrado. El área del cuadrado, por supuesto, es menor que la del círculo en el que está inscrito. Si se divide por la mitad cada lado del cuadrado, se pueden localizar los vértices de un octógono regular inscrito en el mismo círculo. Por supuesto, el área del octógono se aproxima más a la del círculo que la del cuadrado. Si volvemos a dividir los lados del octógono para obtener un hexadecágono, el área de éste estará más cerca de la del círculo que la del octógono. El proceso se puede continuar indefinidamente. Ésta es, de hecho, la esencia del famoso método de exhaución de Eudoxo. En definitiva, este método permitía hacer afirmaciones del siguiente modo: Si se tiene un área preasignada, todo lo pequeña que se quiera, se puede construir un polígono regular inscrito para el que la diferencia entre el área del círculo y el área del polígono sea menor que esa cantidad preasignada.

Una regla análoga es válida para los polígonos circunscritos.

Con estos resultados, y con la genialidad de Arquímedes en el uso del razonamiento de la doble *reductio ad absordum* demuestra su proposición sobre la medida del círculo.

PROPOSICIÓN. El área de cualquier círculo es igual a la de un triángulo rectángulo en el cual uno de los lados alrededor del ángulo recto es igual al radio y el otro a la circunferencia del círculo.

Dem.-



Caso 1: $A > T \Rightarrow$ Absurdo

Caso 2: $A < T \Rightarrow$ Absurdo

$\Rightarrow A = T$

Arquímedes para demostrar la proposición anterior, tiene que desechar que A < T y que A > T y así solo sería posible que A=T.

Caso 1: A>T

Esto quiere decir A-T>0. Arquímedes sabía que dentro del círculo se podía inscribir un polígono regular cuya área difiriera de la del círculo en una cantidad positiva. Si llamamos I al área del polígono inscrito. A-I < A-T → T < I

Pero esto es absurdo, ya que T=½rC y el área de un polígono es I=½hP donde h es la apotema y P el perímetro del polígono. Entonces como el polígono está inscrito en la circunferencia, h<r y P<C.

Por tanto, llegamos a la desigualdad I < T, y así incurrimos en contradicción.

Caso 2: A<T

Supongamos ahora que A<T. Arquímedes sabía que fuera del círculo se podía circunscribir un polígono regular cuya área difiriera de la del círculo en una cantidad positiva. Si llamamos E al área del polígono circunscrito.

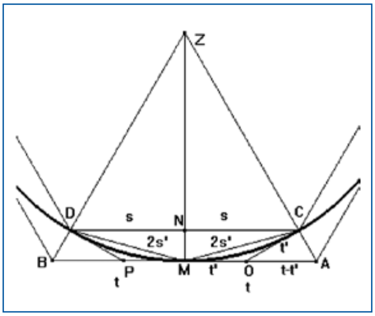
Si se circunscribe un polígono de área E, dicha área será mayor que A, área del círculo.

Entonces tendremos que: E-A < T-A → E < T

Pero en este polígono, su apotema h = r, mientras que su perímetro es mayor que la longitud de la Circunferencia, P>C. Luego entonces: E= ½hP > ½rC=T → E > T y así incurrimos en contradicción.

Luego queda demostrado que A=T.

4. DETERMINACIÓN POR ARQUÍMEDES DEL NÚMERO π.



El método de Arquímedes descansa en la siguiente idea. La circunferencia (su longitud) se mantiene entre los perímetros de los dos n-ágonos regulares, circunscrito e inscrito, respectivamente. El objetivo es, pues, calcular los perímetros de estos dos n-ágonos, con n tan grande de modo que aquellas diferencias se hagan tan pequeñas como se quiera e igual a una magnitud ε. De esta forma, tanto la longitud como el área de la circunferencia y círculo, respectivamente serán determinadas con la suficiente aproximación.

La particular aportación de Arquímedes se encuentra en su método, que permite calcular los perímetros de cualesquiera polígonos regulares de tantos lados n como se quiera. Este método, conocido como el algoritmo de Arquímedes, está basado en dos fórmulas de recurrencia.

Sea en la figura adjunta, Z el centro de la circunferencia, y AB= 2t el lado del polígono circunscrito y CD= 2s el lado del polígono inscrito, ambos de n lados. Sea M el punto medio de AB y N el punto medio de CD, sea O el punto de intersección de MA con la tangente al círculo por el punto C. Por tanto, OM=OC=t' será igual a la mitad del 2n-ágono regular circunscrito y MC=MD=2s' es el lado del polígono inscrito regular de 2n-lados.

Como ACO y AMZ son triángulos rectángulos semejantes, se tiene que:

t'/(t−t') = OC/OA=MZ/AZ , y, por otro lado s/ t= NC/ MA = CZ/ AZ,
Como CZ= MZ, se tendrá que: t'/(t−t')= s/ t → t'= st/ (s+t)

Y como los triángulos CMD y COM son isósceles y semejantes, $\frac{2s'}{2s} = \frac{t'}{2s'}$, o sea: $2^{s'2} = st'$.

Si a es el perímetro del n-ágono circunscrito y b el perímetro del inscrito, y a' y b' son los perímetros, respectivamente de los 2n-ágonos circunscrito e inscrito, entonces tendremos que:

a= 2nt; b= 2ns; a'= 4nt'; b'= 4ns'.

Si entonces introducimos los valores obtenidos para t, s, t', s' en aquéllas ecuaciones, obtendremos las fórmulas de recurrencia de Arquímedes:

$$\text{(I)}\ \ a' = \frac{2ab}{a+b} \qquad \text{(II)}\ \ b' = \sqrt{b.a'}$$

Por lo que, a' es la media armónica de a y b; y b' es la media geométrica de b y a'.

Ahora si consideramos la sucesión de los n-ágonos, 2n-ágonos, 4n-ágonos, 8n-ágonos, etc., y designamos a los perímetros de los circunscritos e inscritos 2vn-ágonos como av y bv, respectivamente, obtendremos la serie de Arquímedes:

$$a_0,\ b_0,\ a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2,...$$

de los sucesivos perímetros. Aquí las fórmulas de recurrencia (I) y (II) serían:

$$\text{(I)}\ \ a_{v+1} = \frac{2a_v b_v}{a_v + b_v} \qquad \text{(II)}\ \ b_{v+1} = \sqrt{b_v . a_{v+1}}$$

Esto es, cada término de la serie de Arquímedes es alternativamente la media armónica y geométrica de los dos términos precedentes.

Usando esta regla, nosotros somos capaces de calcular todos los términos de la serie si son conocidos los dos primeros términos de ella. La elección que hace Arquímedes como el polígono inicial es el hexágono, cuyos perímetros son $a_0 = 4\sqrt{3}$ r y $b_0 = 6r$, respectivamente, y así trabajando con la serie, calculamos a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, hasta a_4 y b_s , correspondientes al circunscrito e inscrito de 96 lados.

Si se recuerda que, exceptuando el hexágono, todos esos polígonos tienen sus lados inconmensurables con el diámetro, tales perímetros están expresados mediante raíces cuadradas, seguramente conocidas en su época, pero de las cuales nada dice Arquímedes. El hecho es que Arquímedes llegó a probar que nuestro número está entre ciertos valores obtenidos y que él sustituye por los más cómodos $3\frac{10}{70}$ d y $3\frac{10}{71}$ d

La aproximación de Arquímedes para el valor de π es consecuentemente $\pi = 3\frac{1}{7} = 3.14$

5. CÁLCULO DE π, UTILIZANDO EL PROGRAMA MATHEMATICA

$$f[x\_, y\_] := \frac{2x*y}{x+y};\ g[x\_, y\_] := \sqrt{f[x, y]*y};\ h[x\_, y\_] := \{f[x, y], g[x, y]\};$$

$$N\left[h\left[4\sqrt{3}, 6\right]\right]$$

```
{6.430780618346945, 6.2116570824604995}

h[6.430780618346945, 6.2116570824604995]

{6.319319884195001, 6.265257226562477}

h[6.319319884195001, 6.265257226562477]

{6.29217243026287, 6.278700406093735}

h[6.29217243026287, 6.278700406093735]

{6.2854291992907365 , 6.28206390178102}

h[6.2854291992907365 , 6.28206390178102]

{6.2837460999596475 , 6.282904944570924}

h[6.2837460999596475 , 6.282904944570924]

{6.283325494113697 , 6.283115215823715}
```

En definitiva, $a_0 = 3\sqrt{3}, b_0 = 6$, $a_1 \approx 6.43078$, $b_1 \approx 6.21166$, …, $a_4 \approx 6.28543$, $b_4 \approx 6.28206$, …, lo cual ya da una aproximación de $\pi \approx 3.14$. Para los términos $a_6 \approx 6.28332$ y $b_6 \approx 6.28311$, obtendríamos una aproximación de $\pi \approx 3.141$.

6. DETERMINACIÓN DEL ÁREA DEL SEGMENTO DE UNA PARÁBOLA

En su tratado Sobre la Cuadratura de la Parábola, Arquímedes había dado ya una primera demostración mecánica de la cuadratura de la parábola (proposiciones 1-17) extraídos del tratado Sobre el Equilibrio de los Planos y previa a la geométrica que presentaremos a continuación. «la equivalencia entre el segmento de parábola y los cuatro tercios del triángulo inscrito».

Se trata del primer ejemplo en la Historia de la Matemática de la cuadratura de una figura mixtilínea. Ya que el método mecánico de investigación de EL MÉTODO de Arquímedes apunta históricamente hacia los indivisibles e infinitesimales de las técnicas de cuadratura del siglo XVII que condujeron al descubrimiento del Cálculo Infinitesimal por Newton y Leibniz, mientras que el método demostrativo de exhausción apunta hacia las técnicas aritméticas de los límites que fundamentan el Análisis moderno en el siglo XIX, la conjunción de ambos métodos, uno heurístico y empírico y otro riguroso y apodíctico, sitúan a Arquímedes en las raíces históricas del Cálculo Integral. Por eso, como afirma E.Rufini (Il Metodo d'Archimede e le origine dell'analisi infinitesimale nell'antichità, p.187):

> «Arquímedes anticipa nuestro Cálculo Integral, tanto en el tiempo como en los procedimientos y en la genialidad de los artificios no superados por los precursores del siglo XVII.»

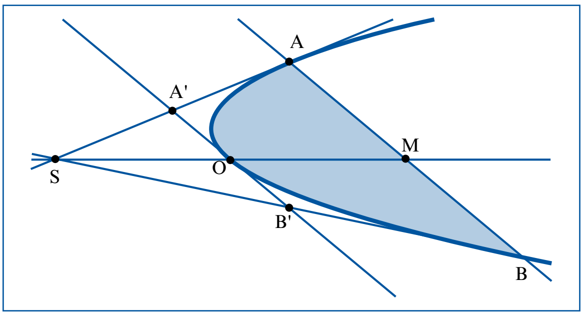
Pero más allá de la Matemática, la obra arquimediana, pródiga en asombrosos resultados y modelo de exposición rigurosa, al aplicar la Mecánica a la investigación de los teoremas, desarrolla una concepción matemático-experimental que está en la raíz de una tradición científica –llamada después Filosofía Natural y mucho más tarde Física Matemática–, que retomada por Leonardo, Galileo y Newton, establece las bases de la Revolución Científica del siglo XVII, y en particular constituye un sólido punto de partida tanto para la configuración de la nueva Física como para la invención del Cálculo Infinitesimal. Muy acertado es, pues, lo que escribe en el siglo XVII Montucla en su famosa Historia de las Matemáticas:

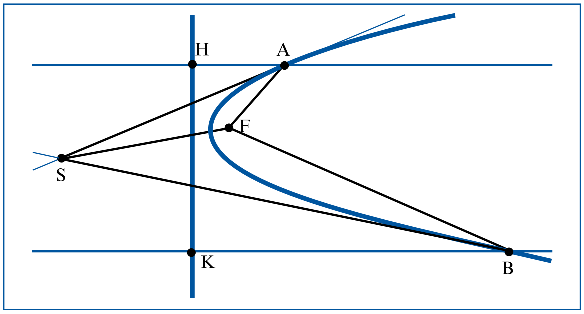
> «Arquímedes abrió nuevas vías en la Geometría e hizo tan gran número de descubrimientos, que la antigüedad le ha concedido de común acuerdo el primer lugar entre los geómetras».

7. CUADRATURA DEL SEGMENTO PARABÓLICO POR ARQUÍMEDES

TEOREMA.- El área encerrada por el segmento de una parábola es igual a 2/3 partes del área del correspondiente triángulo arquimediano.

Def.- Un triángulo arquimediano es aquel cuyos lados están formados por dos tangentes a la parábola y la cuerda que une los puntos de tangencia. A este último lado, lo llamaremos base de dicho triángulo. En el dibujo, será arquimediano el triángulo ABS. Para realizar dicha construcción, observamos que





desde los puntos A y B trazamos sendas paralelas al eje de la parábola, determinando sobre la directriz, los puntos H y K, respectivamente. Conectando estos puntos con el foco F de la parábola podemos ahora, pues, trazar las mediatrices de estos segmentos FH y FK, que serán las rectas tangentes en A y B. estas rectas se cortan en el punto S. De esta manera, construimos el triángulo arquimediano ASB.

Como SA y SB son dos mediatrices del triángulo FHK, resultará que el punto S será el circuncentro de dicho triángulo y así la paralela al eje por el punto S será la mediatriz del lado HK y también la paralela media del trapecio AHKB y pasará por M, punto medio de la cuerda AB. En definitiva, la mediana de la base de un triángulo arquimediano es paralela al eje de la parábola.

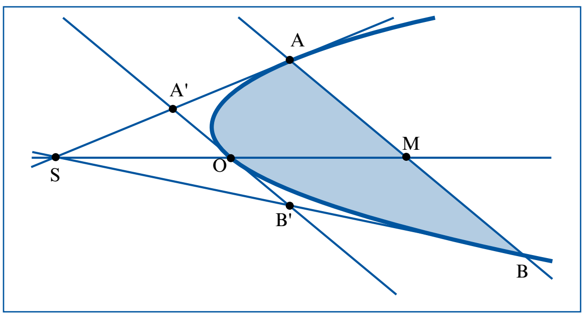
Trazamos ahora la tangente por O, el punto intersección de la parábola con la mediana SM. Esta última tangente corta en A' y B' a las tangentes primeras en A y B, respectivamente. Por tanto, los triángulos AA'O y BB'O son también arquimedianos. Por consecuencia, las medianas a las bases de estos últimos triángulos serán paralelas al eje y, por esto, paralelas a SO. Luego entonces son las paralelas medias de los triángulos AOS y BOS. En definitiva, pues, los puntos A' y B' son puntos medios de los segmentos AS y BS, respectivamente. Luego A'B' es paralela media del triángulo inicial ABS. Consecuentemente el punto O es el punto medio de SM.

Resumamos todo lo hecho en el enunciado siguiente:

Teorema de Arquímedes. La mediana correspondiente a la base de un triángulo arquimediano es paralela al eje, la paralela media a la base es tangente a la parábola y el punto de intersección de esta paralela media con la mediana es el punto de tangencia con la parábola.

Con estos resultados, vamos ahora a determinar el área J del segmento de parábola encerrada por nuestro triángulo arquimediano ASB con la base AB.

Las tangentes A'B' y las cuerdas OA y OB dividen el triángulo ASB en cuatro regiones:



El triángulo interno AOB inscrito en la parábola.

El triángulo A'SB' exterior a la parábola.

3 y 4. Dos triángulos residuales AOA' y BOB' que también son arquimedianos.

Como O es punto medio de SM, el valor del área del triángulo inscrito (1) es el doble que la del triángulo exterior (2).

Reiterando el proceso seguido, cada uno de los dos triángulos residuales darían lugar a dos triángulos, uno exterior y otro interior y a dos nuevos triángulos residuales. Por tanto, continuando con nuestro proceso llegaríamos a cubrir toda la región sombreada con los triángulos interiores con un valor de área el doble que los exteriores.

Si representamos por Δ el área del triángulo inicial ABS, entonces el área del correspondiente triángulo interior será igual a $\frac{1}{2}\cdot\Delta$, y el del exterior será $\frac{1}{4}\cdot\Delta$ y el de los dos residuales será igual a $1/8\cdot\Delta$ cada uno.

La serie de los sucesivos triángulos arquimedianos tienen como área los valores:

$$\Delta,\ 1/8\cdot\Delta,\ 1/8^2\cdot\Delta,\ 1/8^3\cdot\Delta,\ldots$$

La consiguiente serie de triángulos interiores se compondrá de forma en cuanto a sus valores numéricos igual a 1, 2, 4, 8, 16,… y en cuanto a valor de su área siempre la mitad del arquimediano correspondiente.

Estos dos hechos darán como resultado la suma de la siguiente serie numérica:

$$J = \frac{1}{2}.\left[\Delta + 2.\frac{\Delta}{8} + 4.\frac{\Delta}{8^2} + 8.\frac{\Delta}{8^3} + \ldots\right] = \frac{2.\Delta}{3}$$