

## “PISA: COMPRENDER, CONCEBIR, EJECUTAR, EXAMINAR”

María Teresa Casas Sánchez – Manuela Moreno Gil  
maitecasas1@gmail.com – nemogil@yahoo.com  
IES Poeta Sánchez Bautista, Murcia (España)

Núcleo temático: II. La Resolución de Problemas en Matemáticas.

Modalidad: CB

Nivel educativo: Secundaria

Palabras clave: PISA, problemas, metodología, aula

### Resumen

*Es una experiencia de aula que aúna un proyecto de innovación y un grupo de trabajo del departamento de Matemáticas de nuestro instituto. El primero tuvo como objetivo fundamental trabajar una determinada metodología para resolver problemas, así como el análisis de diversas variables que contemplamos en la elección de los mismos. Su duración fue de un curso escolar y se llevó a cabo con alumnos de 2º de ESO que, en su mayoría, presentaban dificultades en la materia. El segundo, con objeto de mejorar la competencia matemática del alumnado, consistió en la elaboración, puesta en práctica y modificación (si procedía) de problemas introductorios tipo PISA, para acometer cada una de las unidades didácticas que se trabajan en 1º y 2º de la ESO a través de la resolución de problemas, y siempre a partir de situaciones cotidianas próximas al alumnado. Actualmente ambas experiencias se complementan perfectamente en nuestras clases, pues trabajamos estos últimos con la metodología utilizada en la primera.*

### INTRODUCCIÓN

Con objeto de mejorar la competencia matemática del alumnado, el Departamento de Matemáticas del IES Poeta Sánchez Bautista vio la necesidad de abordar de forma más continuada la resolución de problemas como una herramienta eficaz para obtener mejores resultados, de modo que se pudiesen acometer las unidades didácticas, de 1º y 2º de la E.S.O., a partir de ellos.

En consonancia con aportaciones como la didáctica de la escuela de H. Freudenthal, tendencia conocida como RME (Realistic Mathematics Education), o el movimiento estadounidense Tech Prep, con planteamientos de atención a la diversidad que pretenden ayudar a aquellos alumnos con enormes dificultades para el desarrollo del pensamiento abstracto, en esta obra establecemos una propuesta didáctica cimentada en la elaboración de

problemas sobre situaciones cotidianas con una estructura semejante a la que los estudiantes puedan encontrar en cualquier prueba evaluadora a la que tengan que enfrentarse, como es el caso de PISA.

Por tanto, desde el orbe de las enseñanzas contextualizadas, se gesta este trabajo, respondiendo además a las orientaciones didácticas que la Orden ECD/65/2015 de 21 de enero [3], a saber, la instrumentalización de metodologías activas y contextualizadas, dentro de una línea procedimental que numerosas normativas educativas europeas y americanas han implementado. La construcción de problemas matemáticos desde la raíz vivencial de alumnado, que sirvan de pórtico para el desarrollo de diferentes unidades didácticas, será un inestimable recurso para el fomento del aprendizaje significativo, persiguiendo que cada estudiante, desde la conexión entre las matemáticas y su mundo, sea capaz de extraer el conocimiento matemático que ya de por sí posee, gestionar su propia capacidad, aprender por descubrimiento, siendo protagonista de su propia enseñanza y, por lo tanto, pueda obtener índices de logro dentro de la competencia matemática en la medida en que se sienta motivado tanto por el reconocimiento de su propia realidad en el proceso de enseñanza-aprendizaje como por el hecho de que observe un progreso en el ámbito del pensamiento matemático.

## JUSTIFICACIÓN

Dos partes estrechamente relacionadas forman esta comunicación, metodología y resolución de problemas.

El marco teórico se basó en autores como Arthur J. Baroody, R. Skemp, Guy Brousseau, Carmen Chamorro y M<sup>a</sup> Luisa Ruiz.

**Baroody** [2] nos habla de dos teorías generales sobre el aprendizaje (la teoría de la absorción y la cognitiva). Nos dice que “aprender por intuición o comprensión es, en realidad, un proceso de resolución de problemas: observar indicios y combinarlos, reordenar las evidencias disponibles y, finalmente, observar el problema desde una perspectiva nueva”. Nos centraremos en la **Teoría cognitiva**, en la que **las relaciones son la clave básica del aprendizaje**. En ella la esencia de la adquisición del conocimiento estriba en aprender relaciones generales. Propone que el auténtico aprendizaje no se limita a una simple absorción y memorización sino que comprender requiere pensar, y la comprensión se construye mediante la **asimilación** y la **integración**. Además esta teoría señala que la

adquisición del conocimiento implica **modificar la pautas de pensamiento**, es decir, la comprensión puede aportar puntos de vista más frescos y poderosos. La teoría cognitiva advierte que, dado que nuestros alumnos no se limitan simplemente a absorber información, su **capacidad de aprender tiene límites**. A causa del proceso de asimilación e integración hace falta mucho tiempo para aprender la mayoría de las cosas que vale la pena saber (Duckworth,1982). Puesto que, como hemos visto, tanto la una como la otra precisan conexiones con los conocimientos ya existentes, el aprendizaje significativo depende de lo que sabe un individuo dado. Lo que para uno es evidente para otro puede ser insondable. Afirma que el aprendizaje puede ser una recompensa en sí mismo (**regulación interna**). Lo cierto es que la matemática podría describirse como la ciencia de descubrir pautas y definir órdenes (Jacobs,1970), así pues, es muy parecida a un proceso continuo de resolución de problemas. Por tanto, el dominio de la matemática requiere comprensión y capacidad para resolver problemas además, de datos reales.

Skemp, [10] en su “Psicología del aprendizaje de la matemática” nos dice que éstas no pueden aprenderse directamente del entorno cotidiano. Aunque los primeros pasos del aprendizaje de las matemáticas son objetivos, el comunicador es quién más necesita conocer los principios básicos siguientes:

- 1) “Los conceptos de un orden más elevado que aquellos que una persona ya tiene, no le pueden ser comunicados mediante una definición, sino solamente preparándola para enfrentarse a una colección adecuada de ejemplos”.
- 2) “Puesto que en matemáticas estos ejemplos son invariablemente otros conceptos, es necesario en principio asegurarse de que éstos se encuentran ya formados en la mente del que aprende”.

El segundo implica que, antes de que intentemos comunicar un nuevo concepto debemos encontrar cuáles son sus **conceptos contributorios**; y así, sucesivamente, hasta que alcancemos los conceptos primarios. Hay otras dos consecuencias del segundo principio, la primera es que en la construcción de la estructura de abstracciones sucesivas, si un nivel dado se comprende imperfectamente, cualquier cosa derivada se encuentra en peligro (en matemáticas, esta dependencia es mayor que en otra materia). La segunda es la de que los conceptos contributorios necesitan para cada nueva etapa de abstracción estar disponibles.

Chamorro en el capítulo 3 del libro “Herramientas de análisis en Didáctica de las Matemáticas” [5] nos habla de Brousseau (*Théorie des situations didactiques* [4]), el cual clasifica las situaciones didácticas en situaciones de **acción**, **formulación** y **validación**, añadiendo posteriormente las de **institucionalización**.

Es preciso añadir que, para que las situaciones de formulación tengan éxito debe haber, entre los alumnos cooperantes una necesidad de comunicación, sus posiciones han de ser asimétricas y el medio ha de permitir retroacciones para la acción con el receptor del mensaje. De igual modo, para que haya una situación de validación se requiere que haya necesidad de comunicación entre los alumnos oponentes, que las posiciones de estos sean simétricas y que el medio permita retroacciones a través de la acción (mensajes), con el juicio del interlocutor.

M<sup>a</sup> Luisa Ruiz [9] nos hace reflexionar diciendo que si aceptamos que para <<hacer matemáticas>> el alumno debe resolver problemas, entonces debemos considerar normal que conviva con la incertidumbre: el desconcierto, la duda y los tanteos están en el corazón mismo del aprendizaje de las matemáticas. Nuestros alumnos deben superar muchas dificultades, pero sobre todo, muchos errores. Es importante que el profesor entienda que son algo necesario porque solo si los detectan y son conscientes de su origen pondrán medios para superarlos. Nos habla de las hipótesis fundamentales sobre las que se apoya la teoría de “aprender matemáticas significa construirlas”. Son cuatro:

- 1) *El aprendizaje se apoya en la acción.*
- 2) *La adquisición, organización e integración de los conocimientos del alumno pasa por estados transitorios de equilibrio y desequilibrio en el curso de los cuales los conocimientos anteriores se ponen en duda.*
- 3) *Se conoce en contra de los conocimientos anteriores.* Es una idea fundamental de Bachelard [1] sobre el conocimiento científico que Brousseau usó para explicar la formación de *obstáculos* en el aprendizaje de las matemáticas, “La utilización y la destrucción de los conocimientos precedentes forman parte del acto de aprender”.
- 4) *Los conflictos cognitivos entre miembros de un mismo grupo social pueden facilitar la adquisición de conocimientos.* Vygotsky consideraba preciso tener en cuenta lo que un individuo puede hacer con la ayuda de otros, puesto que el aprendizaje se produce en un medio social en el que abundan las interacciones, tanto horizontales (alumno-alumno) como verticales (alumno-profesor).

En consecuencia, “el aprendizaje se considera como una modificación del conocimiento que el alumno debe producir por sí mismo y que el maestro solo debe provocar” (Brousseau, 1994, p. 66).

En cuanto a la resolución de problemas nos centramos en dos autores, Miguel de Guzmán/G. Polya [8]. Las fases que ambos describen son similares:

- Familiarizarse/Comprender el problema.
- Búsqueda de estrategias/Concebir un plan.
- Llevar adelante la estrategia/Ejecución del plan.
- Revisar el proceso y sacar conclusiones de él/Examinar la solución obtenida.

Polya en su libro “Cómo plantear y resolver problemas” [8] nos sugiere una serie de preguntas que debemos hacernos (o a nuestros alumnos) cuando queremos resolver un problema. Distingue entre *problemas para resolver* y *problemas para demostrar*, siendo los primeros los que nosotros trabajamos. En cada uno de ellos debemos diferenciar cuáles son los datos, cuál la incógnita y cuál la condición. En la tercera parte del libro nos sugiere un breve diccionario de heurística donde explica diversos términos relevantes en el tema, preguntas, sugerencias, un examen de diversas partes de trascendental importancia en la resolución, estrategias... Acaba presentando veinte problemas, con las posibles preguntas para abordarlos y la solución de los mismos.

Nuestro trabajo pretendió ayudar en la medida de lo posible al alumnado a alcanzar la competencia matemática desde la comprensión de su entorno, con esta metodología basada en “establecer relaciones”, en la asimilación y la integración, en la construcción de las matemáticas.

La propuesta que ofrecemos plasma el proceso de contextualización focalizado desde un doble plano. Por un lado, ampliamos los marcos de referencia de los problemas, forjando situaciones reales como micrototalidades, de forma que cada problema consta de un amplio desarrollo situacional. Por otro lado, se ahondó en los niveles de contextualización, elaborando para los problemas no únicamente espacios reconocibles sino escenarios propios de la zona y cultura del alumnado. Encontramos, en consecuencia, problemas sobre personajes locales, tradiciones, empresas del entorno o situaciones con las que pueden encontrarse en su día a día.

## OBJETIVOS

Tanto el proyecto de innovación como el grupo de trabajo tienen unos objetivos comunes que pueden sintetizarse en los que a continuación indicamos:

- Motivar al alumnado en su aproximación al área matemática.
- Fomentar el aprendizaje por descubrimiento (aprender a aprender).
- Comprobar la relevancia del lenguaje matemático en la vida.
- Leer y entender enunciados de problemas.
- Razonar matemáticamente.
- Aplicar estrategias de resolución de problemas.
- Comunicarse en lenguaje matemático.
- Aprender a escuchar y tolerar opiniones distintas a las suyas.
- Respetar los turnos de palabra/intervención.

Además de los anteriores, un objetivo específico del proyecto de innovación fue, como profesores, adquirir una inmersión seria y profunda de la metodología mencionada en la justificación, así como una motivación del alumno “en el gusto” por la resolución de problemas, atendiendo sus necesidades educativas específicas.

En cuanto al grupo de trabajo los objetivos específicos fueron:

- Introducir los contenidos del primer ciclo de Secundaria a través de problemas.
- Dotar a dichos problemas de una estructura semejante a los propuestos en PISA.
- Elaborar un “banco” de problemas.
- Experimentar con nuestros alumnos los problemas que fuimos elaborando.

## DESARROLLO DE LOS PROYECTOS

En el proyecto de innovación, durante el primer trimestre, trabajamos los problemas abordando distintas variables, como el tipo de soluciones, el contexto, el enunciado, diversas estrategias...

Tras la lectura de “Problemas” de Bruno D'Amore [6] e “Iniciación al estudio didáctico de la Geometría” de Horacio Itzcovic [7], durante el segundo y tercer trimestre, aplicamos sus

contenidos a los problemas planteados. Del primer autor seguimos el esquema presentado en su libro:

- Los conflictos y obstáculos ANTES de la resolución.
- Conflictos y obstáculos EN EL MOMENTO de la resolución: “Leer el texto del problema”, “Representar el texto del problema”.
- Redefinición de un problema, creación de la pregunta.
- ¿Cómo hacer imaginar modelos?.

Con el segundo autor trabajamos la Geometría Sintética que no formaba parte del currículo de 2º ESO. Fue una forma muy interesante de cubrir este "déficit" y "cultivar" un poco su "experiencia geométrica".

Un curso después aplicamos esta experiencia a la puesta en práctica de los problemas tipo PISA elaborados por el departamento. En total realizamos 30 problemas, la mitad dirigidos a 1º ESO y la otra mitad a 2º de ESO. Aunque inicialmente, pensamos que fuesen de tipo introductorio, dependiendo del alumnado los hemos utilizado de esta forma o bien en el desarrollo y/o final de la unidad.

### **METODOLOGÍA**

Nuestro objetivo final fue conseguir la autonomía del alumnado en la resolución de problemas. En un principio tuvimos que dirigirlos con las preguntas clave que menciona Polya. Utilizamos tanto el trabajo individualizado como en pequeño o en gran grupo, dependiendo del momento, atendiendo a los diversos ritmos y/o necesidades. En un principio fueron más guiados pero, poco a poco, perdieron el miedo cogiendo seguridad y gusto por la resolución de problemas. El trabajo en gran grupo lo planteamos como un juego. El coordinador de clase, en la pizarra, gestionaba la puesta en común de los resultados obtenidos por las distintas agrupaciones. Cada responsable de equipo escribía en el encerado la respuesta de su grupo aportando su razonamiento. Posteriormente, toda la clase consensuaba la solución del problema, para ello, si había algún error o algún alumno y/o grupo no había sabido resolverlo, el resto del alumnado tenía que ayudarle a llegar a la solución mediante preguntas, con la prohibición de decir esta explícitamente. El profesor solo intervenía cuando era imprescindible, en caso de bloqueo, o que considerase necesario reconducir el

razonamiento seguido, formulando alguna pregunta que pudiese ayudarles, o fomentando la intervención de los alumnos más retraídos.

La elección de los problemas fue crucial para conseguir la motivación y la implicación del alumnado en la resolución de los mismos. Obviamente, esto lo conseguimos con los enunciados de los problemas tipo PISA puesto que estaban contextualizados con personajes, situaciones y lugares de su entorno.

Con esta metodología conseguimos trabajar todas las competencias, en especial la de “aprender a aprender”.

## CONCLUSIONES

Los grupos con los que hemos trabajado estaban compuestos mayoritariamente por alumnos “difíciles”, y con esto nos referimos no solo a sus dificultades académicas sino también de comportamiento y/o concentración. Esta forma de trabajo, donde ellos son absolutos protagonistas de su aprendizaje ha hecho que, incluso aquel que habitualmente se niega a hacer algo, haya “pensado” con sus compañeros.

Después de esta experiencia hemos hecho de esta metodología una forma habitual de trabajo en nuestras aulas. Es absolutamente normal que nuestros alumnos, cuando salen a la pizarra no pregunten nada al profesorado, sino que lo hacen entre ellos. Cuando acaban demandan a sus compañeros si tienen alguna duda o éstos les piden directamente que expliquen cómo lo han hecho.

Por otra parte, el uso de los problemas introductorios tipo PISA nos permite, en unas ocasiones, detectar los conocimientos previos de los alumnos en un tema determinado. Sin embargo, en otras descubrimos si los contenidos han sido adquiridos o hay algún aspecto que debemos reforzar. El que ocurra una u otra dependerá de la tipología del alumnado con el que estemos trabajando.

## Referencias bibliográficas

- [1] Bachelard, G. (1983). *La formación del espíritu científico*. Buenos Aires: Siglo XXI.
- [2] Baroody, A.(1988). *El pensamiento matemático de los niños*. Madrid: Visor.
- [3] Boletín Oficial del Estado (2015): *Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de*

*evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato*. Boletín Oficial del Estado, Madrid (España).

- [4] Brousseau, G. (1994). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- [5] Chamorro, C. (2003). Herramientas de análisis en Didáctica de las Matemáticas. En C. Chamorro (Coord.), *Didáctica de las matemáticas. Colección Didáctica Primaria*. Capítulo 3, pp.70-94. Madrid: Pearson.
- [6] D'Amore, B. ((1997). *Problemas*. Madrid: Síntesis.
- [7] Itzcovich, H. (2005). *Iniciación al estudio didáctico de la Geometría*. Buenos Aires: libros del Zorzal.
- [8] Polya, G.(1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.
- [9] Ruíz, M<sup>a</sup>. L. (2003). Aprendizaje y matemáticas. En C. Chamorro (Coord.), *Didáctica de las matemáticas. Colección Didáctica Primaria*. Capítulo 2, pp.32-68. Madrid: Pearson.
- [10] Skemp, R. (1980). *Psicología del aprendizaje de la matemática*. Madrid: Pearson.