

LAS SUCESIONES *LOOK AND SAY*

J. M. Gairín¹ – V. Manero¹ – J. M. Muñoz¹ – A. M. Oller¹

jgairin@unizar.es – vmanero@unizar.es – jmescola@unizar.es – oller@unizar.es

¹Universidad de Zaragoza – ²Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza

Núcleo temático: V. Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Modalidad: CB

Nivel educativo: Enseñanza secundaria y Bachillerato

Palabras clave: Sucesión, look and say

Resumen

Las sucesiones numéricas son un contenido clásico de la matemática escolar. Actualmente, en España, aparecen en el currículo en el curso de 3º ESO (13-14 años). Una revisión de varias propuestas editoriales parece indicar que la enseñanza de las sucesiones presta especial atención a los procedimientos de cálculo (término n -ésimo, suma o interpolación de términos, etc.) y se centra en el caso de las progresiones aritméticas y geométricas. En esta comunicación breve presentamos una experiencia de aula con estudiantes de 4º de ESO y otra llevada a cabo con estudiantes de 1º y 2º de Bachillerato. Estas actividades se centran en la exploración y el análisis de un tipo de sucesiones no tan habituales en la escuela: las denominadas sucesiones look and say (Conway, 1986; Bronstein y Fraenkel, 1994). Éstas sirven como recurso a la hora de abordar contenidos relacionados con la búsqueda de patrones, así como para plantear pequeñas investigaciones en el aula.

Introducción. Las sucesiones *look and say* y su versión ordenada

John Horton Conway es un matemático británico (nació en Liverpool en 1937) bastante conocido, entre otras razones, por sus diversas contribuciones a la matemática recreativa. En un interesante video disponible en YouTube (<https://www.youtube.com/watch?v=ea7lJkEhytA>), el propio Conway relata como un alumno le propuso un acertijo consistente en descubrir el próximo número de la sucesión siguiente:

1, 11, 21, 1211,...

Puesto que el entonces profesor de Cambridge no supo continuar inmediatamente, el alumno escribió el siguiente elemento de la sucesión: 111221. El profesor seguía sin adivinar cómo continuaba la sucesión, así que el alumno le proporcionó el siguiente término: 312211. Como

relata el propio Conway: “I knew for the way he was saying it that, somehow, I was supposed to be able to guess. I still didn’t [...] in the end he had to tell me”.

El acertijo planteado por este alumno lo que actualmente se denomina sucesión *look and say* con raíz (primer término) el número 1. Veamos otro ejemplo similar usando otra raíz. Consideremos una cadena de números naturales, por ejemplo:

2 4

Esta cadena se puede describir verbalmente como: “un dos y un cuatro”; es decir:

1 2 1 4

que, a su vez, se puede describir verbalmente como “un uno, un dos, un uno y un cuatro”; es decir:

1 1 1 2 1 1 1 4

Una vez descubierta la regularidad podemos pensar que nos encontramos, citando de nuevo a Conway ante “the stupidest problem you could conceivably imagine, that led to the most complicated answer that you could conceivably imagine”. De hecho, en 1986 se publicó el trabajo *The weird and wonderful chemistry of audioactive decay* (Conway, 1986) en el que el autor realiza un estudio de las sucesiones *look and say*.

Las sucesiones *look and say* admiten una modificación muy sencilla que da lugar a las que denominaremos versión modificada de las sucesiones *look and say* o sucesiones *look and say ordenadas*. En este caso, cada elemento de la sucesión es el número obtenido como descripción verbal del anterior, pero contando primero el número total de unos, luego el total de doses, luego el número de treses y así sucesivamente.

Por ejemplo, consideremos nuevamente como primer término el 24. La descripción verbal de esta cadena es: “un dos y un cuatro”. Por tanto el segundo término de la sucesión vuelve a ser, como antes, 1214. Ahora, a diferencia de la sucesión *look and say* original, la descripción verbal es “dos unos, un dos y un cuatro” por lo que el término siguiente es justamente 211214.

A pesar de las claras similitudes existentes, las sucesiones *look and say ordenadas* difieren en muchos aspectos de las sucesiones *look and say* originales. La principal diferencia es que las sucesiones ordenadas se “estabilizan” siempre (Bronstein y Fraenkel, 1994), esto es, después de un número finito de términos, toda sucesión *look and say* ordenada presenta ciclos periódicos de longitud finita.

Potencialidades de las sucesiones *look and say* en el aula.

Inicialmente, puede parecer que las sucesiones que acabamos de presentar tienen un carácter principalmente lúdico y que su valor no va más allá del de un mero pasatiempo matemático. Sin embargo, Barton et al. (2004) destacan, en una experiencia universitaria, las buenas propiedades de estas sucesiones de cara a plantear primeras experiencias de investigación. Como los anteriores autores, pensamos que estas sucesiones tienen propiedades que las convierten en objetos muy útiles e interesantes para su uso en el aula, incluso en cursos de Educación Secundaria por diferentes motivos.

En primer lugar, son fáciles de presentar y se pueden plantear desde un punto de vista lúdico. Esto contribuye a captar la atención de los alumnos.

Por otra parte, desde el punto de vista puramente matemático, una revisión de varias propuestas editoriales parece indicar que la enseñanza de las sucesiones presta especial atención a los procedimientos de cálculo (término n -ésimo, suma o interpolación de términos, etc.) y que se centra principalmente en el caso de las progresiones aritméticas y geométricas. El trabajo con las sucesiones *look and say* puede aportar una visión totalmente distinta al no tratarse de progresiones aritméticas ni geométricas ni tener un término general expresable algebraicamente.

Finalmente, pese a que la comprensión de estas sucesiones no requiere de conocimientos matemáticos previos, el planteamiento de actividades relacionadas con ellas puede fomentar la adquisición de contenidos que aparecen recogidos en el Bloque 1 (Procesos, métodos y actitudes en matemáticas) en los nuevos currículos de E.S.O. y Bachillerato. En especial:

- Búsqueda y reconocimiento de patrones y regularidades. En el currículo se insiste repetidamente de forma explícita sobre este aspecto proponiendo que se aborden estrategias como empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc. y que se planteen investigaciones escolares en contextos matemáticos.
- Aplicación de razonamientos de tipo inductivo y deductivo. Aunque implícitamente, estos aspectos son necesarios para abordar puntos mencionados en el currículo como la utilización de procesos de razonamiento o la realización de demostraciones.
- Uso de TIC. Nuevamente el currículo hace referencia explícita a este aspecto al indicar la necesidad de que los alumnos empleen herramientas tecnológicas adecuadas de forma autónoma y de modo habitual en el proceso de aprendizaje.

Tipología de actividades

A partir de las consideraciones anteriores, nos planteamos el diseño de 3 tipos de actividades que se introducirán secuencialmente: actividades de exploración, actividades de análisis y actividades de “vuelta atrás”. Todas las actividades que plantearemos de aquí en adelante se corresponden a las sucesiones *look and say ordenadas*.

Actividades de exploración

El objetivo de este tipo de cuestiones es la comprensión y familiarización de los alumnos con la sucesión: comprensión de la definición, cálculo de secuencias a mano, obtención y enunciado de conjeturas acerca del término general.

Algunos ejemplos de cuestiones de este tipo pueden ser:

- Calcula el sexto término de la sucesión *look and say ordenada* cuyo primer término es 3.
- Calcula hasta los once primeros términos de la sucesión de la sucesión *look and say ordenada* cuyo primer término es 14.
- Calcula todos los términos que puedas de la sucesión *look and say ordenada* cuyo primer término es 2 ¿Qué sucede?
- Calcula cuál es el término n -ésimo de la sucesión *look and say ordenada* cuyo primer término es 6.

Llegados a este punto, y tras haber explorado manualmente el comportamiento de estas sucesiones se puede introducir una herramienta TIC que facilite la obtención de los términos de ambas sucesiones. Nos podemos valer de una hoja de cálculo o de un pequeño programa diseñado específicamente para este fin.

Actividades de análisis

Este tipo de actividades están orientadas al análisis de los términos de la sucesión y a la obtención de propiedades de los mismos. Fijando una condición sobre el tamaño del primer término, es interesante plantear preguntas que lleven a los alumnos a deducir propiedades que deben cumplir los términos sucesivos. Por ejemplo, que el número de cifras de cualquier término es par o que los términos de la sucesión cumplen una cierta restricción en cuanto al orden de las cifras que están en posición par.

Algunos ejemplos de cuestiones de este tipo pueden ser:

- ¿Puede ser el 113 un término de la sucesión?
- ¿Cuántas cifras debe tener un número de la sucesión?
- ¿Puede ser el 1231 un término de la sucesión?
- ¿Puede ser el 2457 un término de la sucesión? ¿y el 1154?

Actividades de “vuelta atrás”

La búsqueda de respuestas a este tipo de cuestiones pretende fomentar el aumento del nivel de abstracción, la capacidad para formular conjeturas, así como el inicio de intentos de demostración. Como se puede observar, algunas de las cuestiones planteadas en las actividades anteriores llevan, de forma natural, a plantearse el cálculo del término anterior a uno dado. Esto es, a “volver hacia atrás” en la sucesión. En el caso de las sucesiones *look and say ordenadas*, el término anterior a uno dado puede no existir (bajo ciertas condiciones adicionales) o puede no ser único. En este último caso, el cálculo de todos los posibles términos anteriores a uno dado puede convertirse en un problema de combinatoria.

Algunos ejemplos de cuestiones de este tipo pueden ser:

- ¿Cuál es el término anterior al 11?
- ¿Cuál es el término anterior al 23? ¿y el anterior? ¿y el anterior? ¿y el anterior?
- ¿Cuál es el término anterior al 3214? ¿es único?

En la Figura 1 se presenta un esquema en el que se indica la relación entre los tres tipos de actividades planteadas y las distintas capacidades planteadas anteriormente.

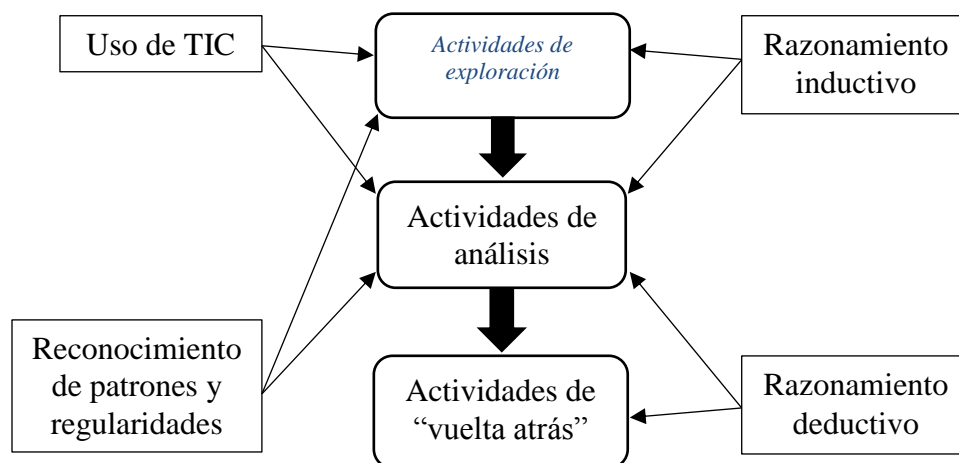


Figura 1. Tipos de actividades y contenidos trabajados en ellas.

Las sucesiones *look and say* ordenada con alumnos de Bachillerato

Una primera experimentación con algunas de las actividades descritas anteriormente se llevó a cabo durante la sesión “Sucesiones *look and say*” desarrollada el 4 de noviembre de 2016 dentro del Taller de Talento Matemático para 4º de la ESO (De la Cueva, 2016). Esta sesión de unos 90 minutos fue bastante exitosa desde el punto de vista de la aceptación de los alumnos y de los resultados que obtuvieron, pero no permitió la recogida de datos para un posterior análisis.

Durante este curso se ha realizado una adaptación para llevar a cabo una serie de actividades con alumnos de Bachillerato en una sesión de clase de unos 50 minutos dentro del Programa Conexión Matemática del Gobierno de Aragón organizado por la Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas “Pedro Sánchez Ciruelo” (<http://conexionmatematica.catedu.es/>). Se trabajó con unos 30 alumnos (en 10 grupos de 2, 3 o 4 personas) de 1º y 2º de Bachillerato, tanto de Ciencias como de Ciencias Sociales en el IES Matarraña (Valderrobres, Teruel).

Debido a las restricciones temporales, se decidió incluir únicamente actividades de exploración y de “vuelta atrás”. Además, el uso de una hoja Excel se limitó a las intervenciones y puestas en común por parte del profesor. Algunos de los resultados que se pretenden obtener con las actividades de análisis aparecieron implícitamente durante las actividades de exploración y se pusieron en juego durante las actividades de “vuelta atrás”.

Así pues, se organizó la sesión en partes:

- **Presentación:** Se introduce y motiva brevemente la actividad por parte del profesor, presentando una definición informal de sucesión como lista (infinita) de números y se indica el interés de obtener la regla que determina el comportamiento de la sucesión a partir de unos cuantos términos iniciales.
- **Actividades de exploración:** Se plantean tres problemas.

- **Problema 1:** Se proporcionan a los alumnos los 5 primeros términos de la sucesión *look and say ordenada* comenzando en 1. Se les pregunta sucesivamente cuál son el 6º, el 13º y el 35º términos de la sucesión.

Con este problema se pretende que los alumnos descubran por sí mismos la mecánica de construcción de los términos de la sucesión y que observen que se estabiliza a partir de un cierto momento.

- Problema 2: Se pide a los alumnos que calculen el 2º, 13º y 100º términos de la sucesión *look and say ordenada* proporcionándoles un primer término adecuado para que la sucesión no se estabilice en un solo término sino en un ciclo de longitud 2.
- Problema 3: Se pide a los alumnos que calculen el 2º, 13º y 100º términos de la sucesión *look and say ordenada* proporcionándoles un primer término adecuado para que la sucesión no se estabilice en un solo término sino en un ciclo de longitud 3.
- Actividades de “vuelta atrás”: Se plantean dos problemas.
 - Problema 4: Se pide a los alumnos que calculen el término anterior a 3 valores distintos. En uno de ellos existe un único anterior, en otro existen varios y en otro no hay ninguno (bajo ciertas restricciones).
 - Problema 5: Se pide a los alumnos que calculen el término anterior del anterior a 2 valores distintos. En uno de ellos existe el término pedido (único o no) y en otro no hay ninguno (bajo ciertas restricciones).

A continuación vamos a presentar brevemente algunos resultados obtenidos que nos parecen especialmente reseñables.

En primer lugar es interesante indicar que, pese a la aparente dificultad que indica Conway en su relato, un buen número de grupos fueron capaces de descubrir el patrón de construcción de la sucesión en el problema 1. El resto de grupos, a partir de explicaciones de sus propios compañeros, comprendieron rápidamente el proceso y pudieron progresar sin problema hacia los siguientes problemas. En particular, una vez comprendido el modo en que se construye la sucesión, todos los grupos fueron capaces de observar la estabilización en este primer problema y calcular el término 35º sin necesidad de calcular todos los términos anteriores.

En los problemas 2 y 3, la parte algorítmica transcurrió sin problemas y muchos alumnos observaron y conjeturaron la estabilización en ciclos de longitud 2 ó 3 (según casos). Un poco más difícil les resultó el cálculo del término 100º. En el caso de estabilización en ciclos de longitud 2, se obtuvieron pocas respuestas satisfactorias como la de la Figura 2.

Se repiten alternándose a partir del término 13°.
 La posición 100° de la sucesión debe ser: 612213242516A19
 Ya que la posición 94° es par como la posición 100°.

Figura 2.

En el caso de estabilización en ciclos de longitud 3, la situación es algo más compleja (debe trabajarse módulo 3) y ningún grupo llegó a plantear la solución completa.

Por último, las actividades de “vuelta atrás” no pudieron llevarse a cabo de forma completa por falta de tiempo. Sólo el problema 4 fue abordado por un número significativo de grupos. Como cabe esperar, en el caso en el que existe término anterior, los alumnos se limitan a indicarlo. En la puesta en común se produjo una breve discusión sobre la unicidad. En los casos en los que no existe término anterior, algunos grupos apuntaron algunas razones que indican que dichos grupos han inducido algunas de las propiedades de los términos de la sucesión.

Valor 312

~~121~~ } No puede ser impar, el no de cifras.
 34 cosas.

Figura 3.

La Figura 3, por ejemplo, muestra que los alumnos han observado que los términos de la sucesión tienen una cantidad par de términos, aunque la segunda parte de su respuesta va en la línea de que debe incluirse algún tipo de restricción inicial.

Valor 1626 → No hay antes
 79 coinciden.

Figura 4.

Por último, en la Figura 4, los alumnos han observado que las cifras que ocupan posición par (comenzando desde la izquierda) deben ir en orden estrictamente creciente).

Conclusiones

El diseño de las actividades y las experimentaciones llevadas a cabo sugieren que las sucesiones *look and say* son un recurso educativo útil y atractivo. Permite trabajar con estudiantes de Educación Secundaria ciertos contenidos referidos a las sucesiones desde un punto de vista distinto del habitual, y además pueden ayudar a potenciar el razonamiento matemático mediante la búsqueda de patrones y el uso las TICs.

Bibliografía

Barton, J.; Feil, D.; Lartigue, D. y Mullins, B. (2004). Sequences for Student Investigation. *PRIMUS: Problems Resources and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, 14(4), 354-368.

Bronstein, V. y Fraenkel, A.S. (1994). On a Curious Property of Counting Sequences. *Amer. Math. Monthly*, 101(6), 560-563.

Conway, J.H. (1986). The Weird and Wonderful Chemistry of Audioactive Decay. *Eureka* 46, 5-18.

De la Cueva, F. (2016). Taller de Talento Matemático. *Entorno Abierto*, 12, 5-7.