CB-633

LA EXTRAPOLACIÓN ALGEBRAICA COMO FUENTE DE ERRORES EN LAS PRODUCCIONES DE ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

José García Suárez – Gerardo Nuñez González
josegar@cucsur.udg.mx – gerardo.nunez@cucsur.udg.mx
Centro Universitario de la Costa Sur, Universidad de Guadalajara, México

Núcleo temático: I. Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos
Modalidad: CB
Nivel educativo: Universitario
Palabras clave: Errores algebraicos, estudiantes universitarios, extrapolación algebraica

Resumen

De acuerdo con Matz (1982), los estudiantes construyen nuevas reglas algebraicas, comúnmente, a partir del conocimiento que le es familiar, o más específicamente tratan de adaptar las reglas conocidas, para enfrentar una gama más amplia de nuevos problemas matemáticos. Además, sostiene que los errores son el resultado de razonable, a pesar de los intentos fallidos, para adaptar su conocimiento previamente adquirido a un nuevo contexto.

A partir de estos razonamientos, nuestra investigación toma como referencia los ítems descritos en ese trabajo por el citado autor y los aplicamos en una prueba suministrada a 150 estudiantes universitarios de carreras de ingeniería. Partimos del supuesto de que sus conocimientos previos adquiridos en su formación escolar anterior, pudiera ser una fuente de errores al querer adaptarlos a los nuevos contextos matemáticos que se les presentan en la Universidad.

Los resultados obtenidos nos muestran claras coincidencias con el trabajo de Matz, con relación a que, la extrapolación algebraica es una de las principales fuente de los errores que presentan los estudiantes al resolver algunas tareas algebraicas. En una etapa posterior de este trabajo se propondrán estrategias didácticas para intentar paliar esta problemática.

I. Introducción

El comportamiento de un estudiante, cuando este resuelve un problema algebraico, según Matz (1982), está conformado principalmente por dos componentes: El primer componente, está relacionado con el conocimiento previo que se supone tiene el estudiante acerca de un nuevo problema y que, por lo general, toma en forma de reglas que ha extraído de un curso recibido o extraído directamente de un libro de texto, a estos conocimientos los denomina:

ISBN 978-84-945722-3-4

reglas básicas. La mayoría de las veces, estas son las reglas elementales (como la ley distributiva, la regla de cancelación de términos semejantes, el procedimiento para la resolución de polinomios factorizable según el principio del producto cero, etc.) que forman el núcleo del contenido básico de los libros de texto convencionales de álgebra. El segundo componente, consiste en un conjunto de técnicas de extrapolación que especifican la forma de reducir la brecha entre las normas conocidas y los problemas poco familiares. Mediante la aplicación de estas técnicas de extrapolación el estudiante, intenta encontrar una forma de ver un problema o trata de evocar una regla conocida que sea aplicable en la nueva situación. Así mismo, Matz remarca que muchos de los errores más comunes que se presentan en las producciones de los estudiantes, tienen como fuente el no hacer una elección correcta de una técnica de extrapolación.

En este mismo orden de ideas, Matz afirma, que en la resolución de un problema nuevo, los estudiantes pueden tener dos maneras posibles de afrontarlos. Primeramente, si el estudiante ya tiene una regla aplicable, la respuesta puede ser construida por la ejecución directa de esa regla. Pero si ninguna de las reglas que posee el estudiante son válidas para resolverlo, se verá obligado a construir un procedimiento más creativo para la resolución del problema, es decir, para encontrar alguna manera de adaptar sus conocimientos de reglas conocidas de los problemas que le son familiares al nuevo contexto que se le presenta. Esta es una ruta más indirecta a la obtención de una respuesta, ya que el alumno tiene que crear una regla o un plan antes de usarla. Por ejemplo, un problema desconocido puede ser parecido a uno que le es usual, excepto por que tiene un término adicional (un 7 en lugar de un 0, o una raíz cuadrada en lugar de un cuadrado, etc.) Es por eso que, con el uso de las técnicas de extrapolación tratan de librar estas diferencias mediante la alteración de una regla para adaptarse a la nueva situación, o mediante la modificación de la situación para ajustarse a la regla.

Matz, describe dos técnicas de extrapolación de gran alcance, la generalización y la linealidad.

I.1 Generalización algebraica

La extrapolación por generalización se basa en que, se puede construir la formación de una regla general de un problema específico, basado en suposiciones sobre sus características

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

particulares, las cuales pueden originarse en una secuencia fortuita de ejemplos de enseñanza o por restricciones legitimas impuestas por la semántica del álgebra.

Ejemplos de esto pueden ser los casos en que la generalización puede remplazar a un operador específico (por ejemplo, "más") con otro operador. Otro ejemplo, "menos" puede ser sustituido por el "mas" en la ley distributiva. De esta manera, la generalización puede dar cabida a los operadores particulares y números que aparecen en una situación nueva.

I.2 Principio de linealidad

Además de cambiar la regla en sí, hay otra manera de extender la aplicabilidad de la generalización. Se puede modificar la forma en que se utiliza, es decir, su estructura de control, un ejemplo de esto es, la linealidad que se describe como una forma de separar un objeto o estructura y operar con cada una de sus partes de forma independiente. Es decir, un operador se comporta de forma lineal cuando el resultado final puede ser obtenido mediante la aplicación del operador de cada subparte y luego simplemente la combinación de los resultados parciales. Ejemplos de lo anterior:

Por ejemplo, un novato aplica la regla de cancelación de:

$$\frac{AX}{X} = A$$

Aplicándola a cada literal en una expresión como la siguiente:

$$\frac{AX + BY}{X + Y} = A + B$$

Según los estudiantes, las reglas pueden aplicarse selectivamente o de manera uniforme a las partes de un objeto.

Como ya se mencionó, la linealidad describe una forma de trabajar con un objeto susceptible a ser descompuesto por el tratamiento de cada una de sus partes de forma independiente. El operador se emplea linealmente cuando el resultado final de su aplicación a un objeto se consigue aplicando el operador a cada subparte y luego simplemente combinando los resultados parciales. Y se “justifica” porque en la aritmética, los estudiantes utilizan la ley distributiva en muchas ocasiones y muy probablemente esta refuerza su aceptación de la linealidad. Esta tendencia continúa con los primeros problemas de álgebra ya que en esencia, estos los conciben como solo procedimientos de aritmética aplicados a los valores simbólicos en lugar de números. Un ejemplo de esto sería:

ISBN 978-84-945722-3-4

$$(AX + B)(CX + D) = ACX^2 + BD$$

Donde se ignora la multiplicación de todos los factores y se simplifica multiplicando los términos semejantes.

Así pues, partimos del supuesto que los estudiantes universitarios poseen conocimientos que han adquirido durante su formación académica previa a su ingreso a la universidad. Siguiendo la línea de influencia de los conocimientos previos como causa de los principales errores algebraicos, coincidimos con Chi y Roscoe (2002) quienes están en contra de la idea que indica que los estudiantes entran a situaciones de aprendizaje como si llegaran a un pizarrón en blanco; consideran que los estudiantes tienen algún conocimiento previo acerca de un dominio de estudio, y que este conocimiento, al compararse con el conocimiento formal tiene una tendencia a ser incorrecto, ya que, probablemente, tiene bases empíricas no fundamentadas adecuadamente, lo que dificulta el aprendizaje de conocimientos formales con un sentido más profundo y correcto; este conocimiento previo puede ser visto como una base de la que parte el nuevo conocimiento, en la que ellos fundamentan los nuevos conceptos para ser integrados y de ahí que traen los errores que pueden producirse.

Por su parte, Brown, Findley y Montfort (2007) mencionan los 'misconceptions', como elementos que son difíciles de abordar en las investigaciones; ellos consideran que sin un conocimiento específico de los conocimientos erróneos de los estudiantes, es poco probable modificar el pensamiento de ellos a través de la enseñanza tradicional; esto lo explican partiendo de que se pueden dar cambios sólo después de que ciertos hechos hayan sido corregidos de la mente y no se pueden corregir si se desconocen.

Se argumenta también que los errores existen debido también a discordancias y conflictos entre los muchos conceptos de matemática avanzada y matemática básica (Stafylidou y Vosniadou, 2004), fundamentando lo anterior con trabajos como el de Fischbein (1987), quien puso de manifiesto que las creencias intuitivas pueden ser las causas de los errores sistemáticos de los estudiantes, observado también por Stavy y Tirosh (2000), quienes establecieron una teoría respecto a las reglas intuitivas. Todos estos autores relacionan los errores que se dan en el álgebra con respecto a diferencias de conocimiento, ya que si se fija en las matemáticas avanzadas, a veces su relación con las básicas es muy distante; tómese como ejemplo las integrales de orden superior si se comparan con al álgebra de secundaria. En definitiva la incompatibilidad entre los conocimientos previos y los nuevos conocimientos

ISBN 978-84-945722-3-4

lo que ocasiona problemas de comprensión y constituye una de las razones por las que los estudiantes cometen errores en tareas algebraicas, fracciones, números racionales, etc. (Kieran, 1992).

En trabajos previos documentados en García (2015) hemos analizado el trabajo de estudiantes universitarios y documentamos errores, que pudieron ser originados por el conflicto que presentan algunos de estos estudiantes para lograr un cambio conceptual derivado del aprendizaje previo; hecho que origina un desequilibrio que lo obliga a encontrar soluciones o alternativas sobre las tareas algebraicas a las que están enfrentando.

II. Metodología

La investigación es de enfoque cuantitativo, clasificable como descriptiva, cuya población de interés estuvo compuesta por estudiantes universitarios de primer curso.

II.1 Instrumento de evaluación

El instrumento de evaluación que se empleó para recabar la información fue un cuestionario compuesto de 14 ítems presentados como igualdades resueltas (Anexo 1), dichos ítems fueron tomados del trabajo de Matz (1982).

II.2 Participantes

Los participantes de este trabajo fueron 150 estudiantes universitarios de primer curso del Centro Universitario de la Costa Sur de la Universidad de Guadalajara, México, pertenecientes a las carreras de Ingeniería en Mecatrónica, Ingeniero Agrónomo, Ingeniería en Teleinformática, Ingeniero en Obras, Ingeniero en Recursos Naturales y Agropecuarios e Ingeniero en Procesos y Comercio Internacional. A pesar de que se aplicó el instrumento a todos los grupos, el muestreo fue de tipo intencional ya que se tomaron en cuenta solamente los estudiantes que se encontraban en el aula al momento aplicar el instrumento.

Resultados

En este apartado analizaremos los resultados obtenidos en esta investigación. Reseñamos, los 3 ítems con mayor número de respuestas erróneas y discutiremos sus probables fuentes de errores.

Inicialmente presentamos un concentrado con las respuestas que cada uno de los ítems que componen el cuestionario aplicado, en la figura 1 se presentan los resultados.

ISBN 978-84-945722-3-4

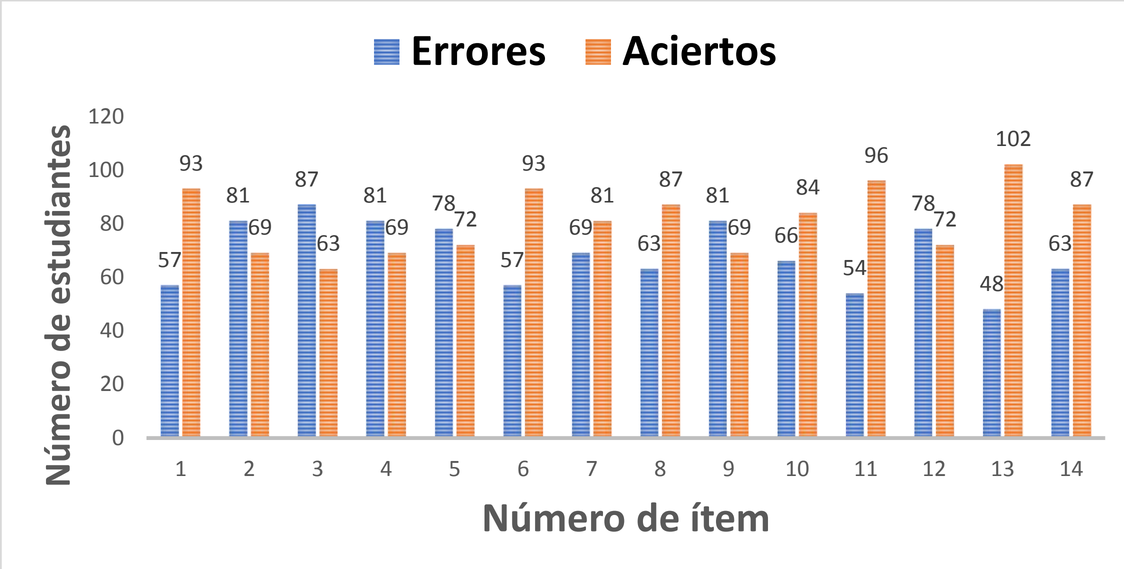

Figura 1. Número de aciertos y errores por ítems.

En la figura 1, se destacan los ítems con mayor frecuencia de errores, los cuales fueron: ítem 3 (87 errores), ítem 2 (81 errores) e ítem 4 (81 errores). El ítem que más errores presentó en este trabajo fue el ítem 3: el cual se presentó de la siguiente forma: $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, según Matz (1982), los estudiantes que responden mal a este ítem, generalmente cometen un error de distribución generalizada ya que el operador es interno, pues el estudiante recuerda que: $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ e infieren que $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Esta fue la respuesta errónea que más se presentó en toda la prueba aplicada (58% de errores), lo que nos lleva deducir que algunos estudiantes utilizaron la ley distributiva de un operador haciendo referencia al otro operador involucrado en la acción. Así mismo, consideramos que los conocimientos previos que los estudiantes universitarios poseen, en este caso les originan dificultades al intentar resolver esta tarea, a tal grado que intentan aplicar esos conocimientos que les son familiares sin importar su validez en el nuevo contexto. Algo similar sucede con el ítem 4 (54% de errores), los estudiantes aceptan que la igualdad $(A+B)^2= A^2+B^2$, es verdadera, en estas respuestas es evidente que los estudiantes linealizan, es decir, trabajan la expresión, como un objeto susceptible a ser descompuesto por el tratamiento de cada una de sus partes de forma independiente. Así pues, logran comprender que la expresión implica elevar al cuadrado una expresión algebraica, pero son incapaces de desarrollarla como un producto algebraico o binomio al cuadrado, limitándose a responder que la solución consiste en elevar al cuadrado cada uno de los términos de la expresión y sumar el resultado de esa operación. De nueva

ISBN 978-84-945722-3-4

cuenta, nos damos cuenta que los conceptos algebraicos mal comprendidos en los niveles educativos previos a la universidad, pueden constituir una fuente de errores difícil de superar, pues esos conocimientos están fuertemente arraigados en el pensamiento algebraico de los estudiantes.

El tercer ítem con mayor frecuencia de errores fue el ítem 2, el cual se presentaba como la siguiente igualdad: $(AX + B)(CX + D) = ACX^2 + BD$. Este ítem presentó una frecuencia del 53% de errores. En este caso, aparentemente los estudiantes utilizan la ley distributiva de la aritmética en muchas ocasiones y muy probablemente esta refuerza su aceptación de la linealidad. Esta tendencia continúa con los primeros problemas de álgebra ya que en esencia, estos los conciben como solo procedimientos de aritmética aplicados a los valores simbólicos en lugar de números. En el caso del ítem 4, se observa como ignoran la multiplicación de todos los factores y simplifican multiplicando los términos semejantes.

Consideramos importante mencionar, el caso particular del ítem 11,el ítem con menor frecuencia de errores, el cual se presenta como: $A\left(\frac{1}{A}\right) = 0$. Hipotéticamente los estudiantes de nivel universitario deberían poseer conocimientos suficientes para comprender que cualquier cantidad multiplicada por su reciproco da como resultado la unidad, pero en nuestro estudio, más de la tercera parte de los participantes (36%) aceptaron la igualdad que se les presentó, sin ser capaces, de al menos, recordar esa propiedad. Aparentemente, en estas respuestas aplican las nociones que recuerdan de la cancelación de unidades o en este caso letras iguales y las eliminan.

De acuerdo a los ejemplos descritos comprobamos que en los estudiantes persisten en emplear reglas o las recuerdan y las modifican para aplicarlas a cualquier ejercicio parecido que se les presente, sin darse cuenta del tipo de error que cometen. En la continuación de este trabajo de investigación, profundizaremos en las respuestas obtenidas hasta el momento.

III. Conclusiones

La extrapolación algebraica es una fuente de errores en estudiantes universitarios, los cuales manifiestan errores producidos por las dificultades que exteriorizan al trabajar con diversas expresiones algebraicas.

Con respecto a, los conocimientos previos que tienen los estudiantes universitarios, coincidimos con Wagner y Parker (1999) quienes mencionan que algunas de las principales

ISBN 978-84-945722-3-4

causas por las que se cometen errores al resolver distintas tareas algebraicas, son debidas a que los estudiantes, en sus esfuerzos por darle sentido a las letras o variables, recurren a conocimientos previos de la aritmética, los cuales en ocasiones, no se les enseñan para facilitarles el aprendizaje del álgebra, por lo que, cuando los estudiantes hacen sus primeros acercamientos al álgebra, generalmente es cuando inician su educación secundaria en México, o después de seis años de estudio de la aritmética (posiblemente la primaria), los profesores no tienen la costumbre de enseñarles detalles específicos sobre el significado de los símbolos literales, dedicando más tiempo en instruirles técnicas para resolver ecuaciones, para practicar reglas de manipulación de expresiones algebraicas y para plantear algunos problemas en los que se espera que sus alumnos empleen los procedimientos que han aprendido mecánicamente para encontrar la solución a las tareas (Ursini y Trigueros, 1998).

Ante estas dificultades, consideramos importante resaltar la importancia que tiene el valorar los conocimientos algebraicos que poseen los estudiantes universitarios cuando ingresan a este nivel educativo, para tratar de esclarecer los conceptos algebraicos erróneos que conservan de su paso por los niveles anteriores a la universidad y con base en esa valoración, diseñar una estrategia didáctica que les permita desprenderse de esos obstáculos y les facilite aceptar las nuevas reglas que les permitan, a su vez, comprender los nuevos conceptos que enfrentaran en su formación educativa de nivel superior.

Por todo lo anteriormente expuesto, consideramos pertinente seguir indagando en los resultados obtenidos hasta este momento, ahora de manera cualitativa, para profundizar en el pensamiento de los estudiantes e intentar documentar las diversas fuentes que originan los errores algebraicos, que se observan en sus producciones, con el fin de colaborar en la disminución de los errores de extrapolación algebraica en los estudiantes de todos los niveles

Referencias bibliográficas

Brown, S., Findley, K., & Montfort, D. (2007). Student Understanding of States of Stress in Mechanics of Materials. *Stress The International Journal on the Biology of Stress*, (August), 1994-2000.

Chi, M. T. H., & Roscoe, R. D. (2002). The process and challenges of conceptual change. In M. Limon & L. Mason (Eds.), *Reconsidering conceptual change: Issues in theory and practice* (pp. 3-27). Dordrecht: Kluwer.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics*. Dordrecht: Reidel.

ISBN 978-84-945722-3-4

García, J. (2015). *Errores y dificultades de estudiantes de primer curso universitario en la resolución de tareas algebraicas*. Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Granada, España.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan.

Matz, M. (1982). Towards a Process Model for High School Algebra Errors. *In D. Sleeman & J.S. Brown (Eds.)*, London: Intelligent Tutoring Systems.

Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). Student's understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction, 14*, 503-518.

Stavy, R. & Tirosh, D. (2000). *How Students (Mis-) Understand Science and Mathematics:Intuitive Rules*. Teachers College Press. New York.

Ursini, S. y Trigueros, M. (1998). Dificultades de los estudiantes universitarios frente al concepto de variable. *En Hitt, F. (Ed.), Investigaciones en Matemática Educativa II*. 445-463. Grupo Editorial Iberoamérica: México.

Wagner, S. y Parker, S. (1999). Advancing algebra. En B. Moses (Ed*.), Algebraic Thinking, Grades K-12*, 328-340. Reston, VA: NCTM.

ISBN 978-84-945722-3-4

ANEXO 1. INSTRUMENTO DE **EVALUACIÓN**

TEST DE VALORACIÓN REGLAS ALGEBRAICAS

Nombre: ____ Edad: ______

Carrera: ____

Responder si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas:

1. $\frac{AX+BY}{X+Y} = A + B$ ______________________________

2. $(AX + B)(CX + D) = ACX^2 + BD$ ______________________________

3. $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ ______________________________

4. $(A + B)^2 = A^2 + B^2$ ______________________________

5. $A(BC) = AB * AC$ ______________________________

6. $\frac{A}{B+C} = \frac{A}{B} + \frac{A}{C}$ ______________________________

7. $2^{a+b} = 2^a + 2^b$ ______________________________

8. $\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2} = 2xy$ ______________________________

9. $\frac{1}{R} = \frac{1}{R1} + \frac{1}{R2} + \frac{1}{R3}$

   R = R1 + R2 + R3 ______________________________

10. 3 +23 (s-4) = 26(s-4) ______________________________

11. A $(\frac{1}{A})$ = 0 ______________________________

12. $\frac{x}{2x+y} = \frac{1}{2+y}$ ______________________________

13. 2(x+3)= 2x+3 ______________________________

14. 3x+5 = y+3

    x+5 = y ______________________________

ISBN 978-84-945722-3-4