*Epsilón* - *Revista de Educación Matemática* *2010, Vol. 27(3), nº 76, pp. 9-31*

# La competencia matemática con la calculadora gráfica Classpad 330

**Mauricio Contreras del Rincón**
*I.E.S. Benicalap, València*
*Universitat de València*

**Resumen:** *Un objetivo básico de la educación debe ser "aprender a matematizar" y este aprendizaje solamente se puede dar a través de la resolución de problemas. En este artículo se pretende analizar de qué manera contribuye la calculadora gráfica ClassPad 330 a lograr este objetivo, es decir, cómo influye la calculadora en el desarrollo de las competencias básicas.*

**Palabras clave:** *competencias básicas, competencia matemática, calculadora gráfica, ClassPad 330.*

**Summary:** *A basic objective in mathematical education is "learning math models" and this learning only is posible by solve problem. This article analize the way of contribution of graphic calculator ClassPad 330 in ordre to skill this objective, so how is the influence of graphic calculator in development of basic skills.*

**Key words:** *basic skills, mathematic competence, graphic calculator, ClassPad 330.*

## 1. COMPETENCIA MATEMÁTICA

Según la LOE, "los objetivos de la Educación Secundaria pretenden lograr la adquisición de aquellas competencias matemáticas que se consideran básicas para un ciudadano del siglo XXI".

Según el informe PISA 2003 (INECSE, 2005) la "competencia matemática" se refiere a las capacidades individuales de los estudiantes para analizar, razonar y comunicar eficazmente cuando formulan y resuelven problemas matemáticos en una variedad de dominios y situaciones. Un estudiante es "matemáticamente competente" si es capaz de enfrentarse con los problemas cotidianos más variados por medio de las matemáticas, si se atreve a pensar con ideas matemáticas. Usar e implicarse con las matemáticas significa no sólo utilizar las matemáticas y resolver problemas matemáticos sino también comunicar, relacionarse con, valorar e incluso, apreciar y disfrutar con las matemáticas.

Por lo tanto, un objetivo básico de la educación debe ser “aprender a matematizar” y este aprendizaje solamente se puede dar a través de la resolución de problemas. En este artículo se pretende analizar de qué manera contribuye la calculadora gráfica a lograr este objetivo, es decir, cómo influye la calculadora en el desarrollo de las competencias básicas. Para este análisis se recogen algunos ejemplos extraídos del proyecto de innovación desarrollado en el IES Benicalap de Valencia (“Materiales y recursos para el desarrollo de la competencia matemática”) y de algunos cursos de formación del profesorado impartidos por el autor en CEFIRES.

## 2. EL PROYECTO DE INNOVACIÓN DEL IES BENICALAP

Desde el punto de vista de las matemáticas, el objetivo básico de este Proyecto es conseguir incrementar las competencias matemáticas de los estudiantes, especialmente, la competencia de modelización, es decir, la capacidad para traducir un problema real al lenguaje matemático, construir el modelo matemático adecuado a la situación, interpretar de manera adecuada los parámetros del modelo para validarlo y saberlo utilizar para resolver el problema inicial, criticando la solución e intentando su generalización.

### 2.1. Tipos de competencias

Las competencias que se consideran en este Proyecto son las mismas que las propuestas en el informe PISA, añadiendo una relativa al uso de la tecnología. Así, se establecen dos grupos de competencias matemáticas en la ESO: a) competencias de contenidos y b) competencias de procesos, tal como se muestra en la siguiente tabla. Entre paréntesis aparece el número de expectativas relacionadas con cada competencia:

| COMPETENCIAS DE PROCESOS | COMPETENCIAS DE CONTENIDOS |
|---|---|
| Pensar y razonar (4) | Cantidad (3) |
| Argumentar (2) | Espacio y forma (6) |
| Comunicar (7) | Cambio y relaciones (4) |
| Modelizar (3) | Azar e incertidumbre (4) |
| Plantear y resolver problemas (5) | |
| Representar (4) | |
| Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico de las operaciones (2) | |
| Usar de manera eficaz la tecnología (3) | |

El foco de atención de este trabajo lo constituyen las competencias de procesos. Dichas competencias tratan de centrar la educación en el estudiante, en su aprendizaje y en el significado funcional de dicho proceso. Las competencias muestran los modos en que los estudiantes actúan cuando hacen matemáticas. Las tres primeras son competencias cognitivas de carácter general, mientras que las cuatro siguientes son competencias matemáticas específicas. En la siguiente tabla se muestran las capacidades que se incluyen en cada una.

| | |
|---|---|
| Pensar y razonar | • Plantear cuestiones propias de las matemáticas (¿Cuántos hay? ¿Cómo encontrarlo? Si es así,... entonces, etc).<br>• Conocer los tipos de respuestas que ofrecen las matemáticas a estas cuestiones.<br>• Distinguir entre diferentes tipos de enunciados (definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis, ejemplos, afirmaciones condicionadas).<br>• Entender y utilizar los conceptos matemáticos en su extensión y sus límites. |
| Argumentar | • Conocer lo que son las pruebas matemáticas y cómo se diferencian de otros tipos de razonamiento matemático.<br>• Disponer de sentido para la heurística (¿Qué puede (o no) ocurrir y por qué?).<br>• Crear y expresar argumentos matemáticos. |
| Comunicar | • Expresarse en una variedad de vías, sobre temas de contenido matemático, de forma oral y también escrita.<br>• Entender enunciados de otras personas sobre estas materias en forma oral y escrita. |
| Modelar | • Estructurar el campo o situación que va a modelarse.<br>• Traducir la realidad a una estructura matemática.<br>• Interpretar los modelos matemáticos en términos reales.<br>• Trabajar con un modelo matemático.<br>• Reflexionar, analizar y ofrecer la crítica de un modelo y sus resultados.<br>• Comunicar acerca de un modelo y de sus resultados (incluyendo sus limitaciones).<br>• Dirigir y controlar el proceso de modelización. |
| Plantear y resolver problemas | • Plantear, formular y definir diferentes tipos de problemas matemáticos (puros, aplicados, de respuesta abierta, cerrados).<br>• Resolver diferentes tipos de problemas matemáticos mediante una diversidad de vías. |
| Representar | • Decodificar, interpretar y distinguir entre diferentes tipos de representación de objetos matemáticos y situaciones, así como las interrelaciones entre las distintas representaciones.<br>• Escoger y relacionar diferentes formas de representación de acuerdo con la situación y el propósito. |
| Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones | • Decodificar e interpretar el lenguaje simbólico y formal y entender sus relaciones con el lenguaje natural.<br>• Traducir desde el lenguaje natural al simbólico y formal.<br>• Manejar enunciados y expresiones que contengan símbolos y fórmulas.<br>• Utilizar variables, resolver ecuaciones y comprender los cálculos. |

Junto a estas competencias, hay que tener en cuenta también las competencias de contenidos que se muestran en la siguiente tabla, por estar interrelacionadas.

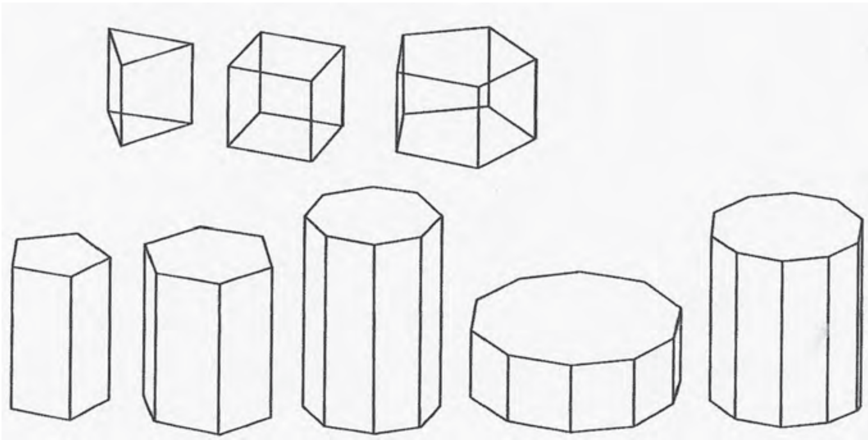
| | |
|---|---|
| Cantidad | • Comprender los números, las diferentes maneras de representarlos, las relaciones entre ellos y los conjuntos numéricos.<br>• Comprender los significados de las operaciones y cómo se relacionan unas con otras, aplicando este conocimiento a la resolución de problemas en contexto.<br>• Calcular con fluidez (mentalmente, por escrito o con calculadora) y hacer estimaciones razonables en función del contexto. |
| Espacio y forma | • Analizar las características y propiedades de figuras geométricas de dos y tres dimensiones y desarrollar razonamientos matemáticos sobre relaciones geométricas.<br>• Localizar y describir relaciones espaciales mediante coordenadas geométricas y otros sistemas de representación.<br>• Aplicar transformaciones y usar la simetría para analizar situaciones matemáticas.<br>• Utilizar la visualización, el razonamiento matemático y la modelización geométrica para resolver problemas.<br>• Comprender los atributos mensurables de los objetos, y las unidades, sistemas y procesos de medida.<br>• Aplicar técnicas, instrumentos y fórmulas apropiados para obtener medidas. |
| Cambio y relaciones | • Comprender patrones, relaciones y funciones.<br>• Representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos.<br>• Usar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas.<br>• Analizar el cambio en contextos diversos. |
| Azar e incertidumbre | • Formular preguntas que puedan abordarse con datos y recoger, organizar y presentar datos relevantes para responderlas,<br>• Seleccionar y utilizar los métodos estadísticos apropiados para analizar los datos,<br>• Desarrollar y evaluar inferencias y predicciones basadas en datos,<br>• Comprender y aplicar conceptos básicos de Probabilidad. |

## 2.2. Actividades para el aula

¿Cómo influye la calculadora gráfica ClassPad en el desarrollo de la competencia matemática? En los siguientes ejemplos se analiza el papel de la calculadora como herramienta para la resolución de problemas y para la puesta en acción de las competencias, especialmente en las actividades de modelar.

### 2.2.1. *Ejemplo de actividad de modelar en 1º ESO: prismas*

*Las figuras que tienes a continuación representan prismas de distinta base:*



*Construye con palillos y plastilina o dibuja alguna más. Completa la siguiente tabla:*

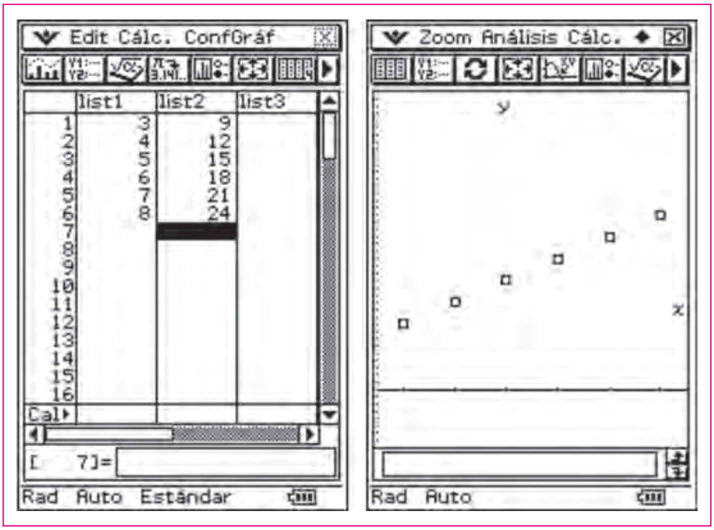
| *Nº de LADOS en la base* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *… …* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Nº de ARISTAS* | | | | | | | |

*a) ¿Cómo indicarías el número de aristas de un prisma que tuviera "n" lados en la base?*

*b) Si un prisma tiene 3 lados en la base podemos escribir que tiene 3 caras. ¿Cuántas caras tiene un prisma con 10 lados en la base? ¿Y otro que tenga "n" lados en la base?*

*c) ¿Cuántos lados en la base tiene un prisma con 20 vértices?*

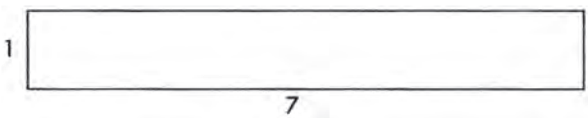
Para el desarrollo de esta actividad se necesitan prismas reales como modelo y un número suficiente de palillos para poder realizar las construcciones. Se requiere hacer cada figura y efectuar un conteo directo. Una vez completada la tabla, se trata de buscar regularidades, relacionando el número de lados de la base con el número de aristas. La regularidad es fácilmente expresable usando el lenguaje oral, pero el paso más difícil es escribir la fórmula que sintetiza la regularidad observada. Ese paso requiere, primero un nivel de conexión, en el que el estudiante asocia el número de aristas con los múltiplos de 3, es decir, un concepto geométrico (número de aristas) está asociado a un concepto aritmético (múltiplos de tres). La ClassPad permite completar la actividad haciendo una representación gráfica, aunque previamente hay que analizar si se pueden o no unir los puntos de la gráfica, teniendo en cuenta su dominio en el conjunto de los naturales. Para ello, basta editar la tabla de valores y a continuación representar gráficamente la tabla.



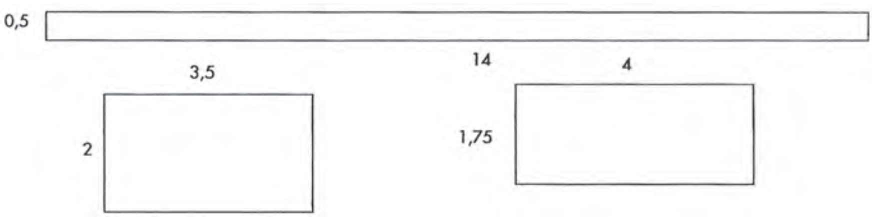

Otra conexión es con la proporcionalidad: el número de aristas es proporcional al número de lados de la base, siendo 3 la constante de proporcionalidad. ¿Tiene algo que ver esa constante de proporcionalidad con la representación gráfica? Con la ClassPad puede verse que sí: la constante de proporcionalidad marca la inclinación de la recta en la que están situados los puntos de la gráfica.

### *2.2.2. Ejemplo de actividad de modelar en 2º ESO: área 7*

*Este rectángulo tiene de área 7 unidades cuadradas:*




*Pero no es el único. Aquí tienes otros que también tienen área 7:*

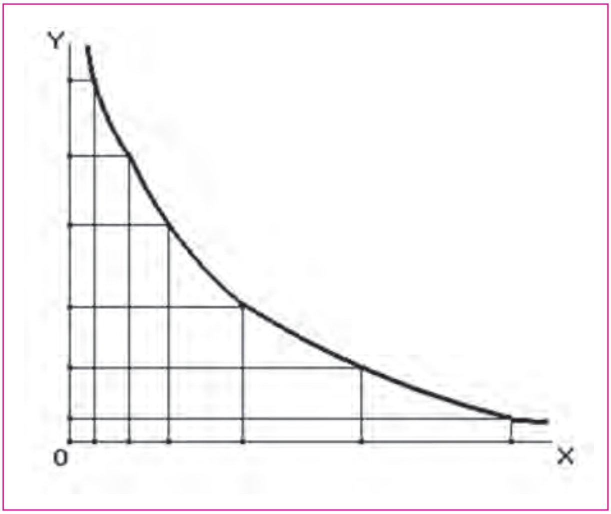


*Dibuja unos cuantos más y escribe sus dimensiones. Completa la siguiente tabla:*

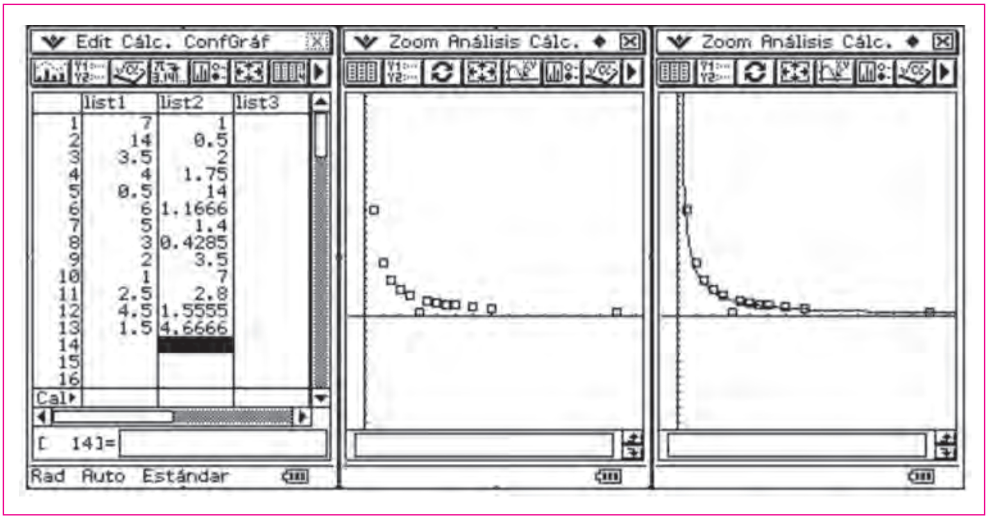
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *b (base)* | *7* | *14* | *3,5* | *4* | … … |
| *a (altura)* | *1* | *0,5* | *2* | *1,75* | |

*Busca una fórmula que relacione la base y la altura de cada rectángulo.*

Al igual que en 1º de ESO, realizar esta actividad requiere experiencia previa en la construcción de tablas y en la representación gráfica de funciones. La gráfica se puede obtener con facilidad, recortando los rectángulos en cartulina y superponiendo todos ellos, de forma que tengan un vértice común (que tomamos como origen de coordenadas. Los puntos de la gráfica serían los vértices opuestos al vértice común.




También es posible realizar la gráfica mediante la construcción de la tabla de valores y su representación gráfica con la ClassPad. La búsqueda de la fórmula que relaciona las dos dimensiones presenta dificultades debido a que el modelo no es lineal. No obstante, la ClassPad permite ajustar una curva de regresión, cuya expresión algebraica se puede obtener fácilmente. Los estudiantes deben conectar la actividad con el campo de la proporcionalidad para concluir que la base y la altura son inversamente proporcionales. Deben apreciar las diferencias entre un modelo de proporcionalidad directa y uno de proporcionalidad inversa y deben saber expresarlas verbalmente y por escrito.




### 2.2.3. *Ejemplo de actividad de modelar en 3º ESO: busca fórmulas*

*En cada caso, representa gráficamente la tabla y busca una fórmula que relacione las dos variables en estudio:*

*a) Distancia recorrida por un vehículo que circula a velocidad constante.*

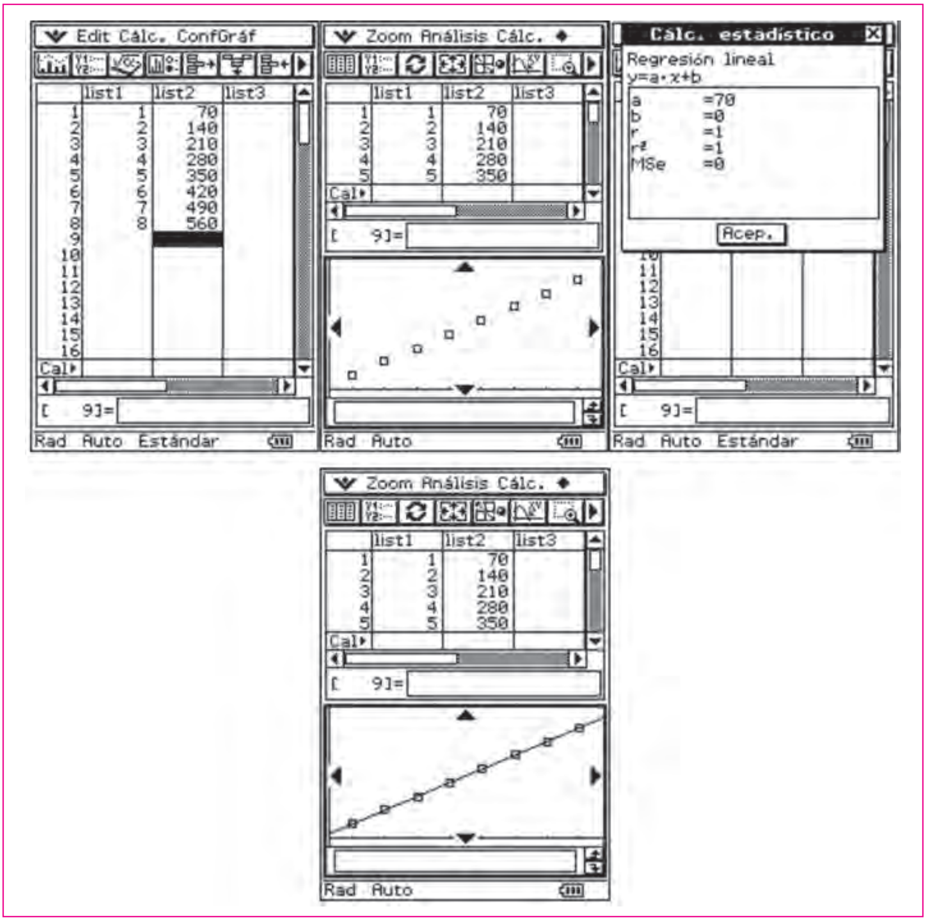
| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *TIEMPO (horas)* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* |
| *DISTANCIA (km)* | *70* | *140* | *210* | *280* | *350* | *420* | *490* | *560* |

*b) Dinero que le va quedando a Pedro mientras va gastando sus ahorros a* razón de 4 euros a la semana.

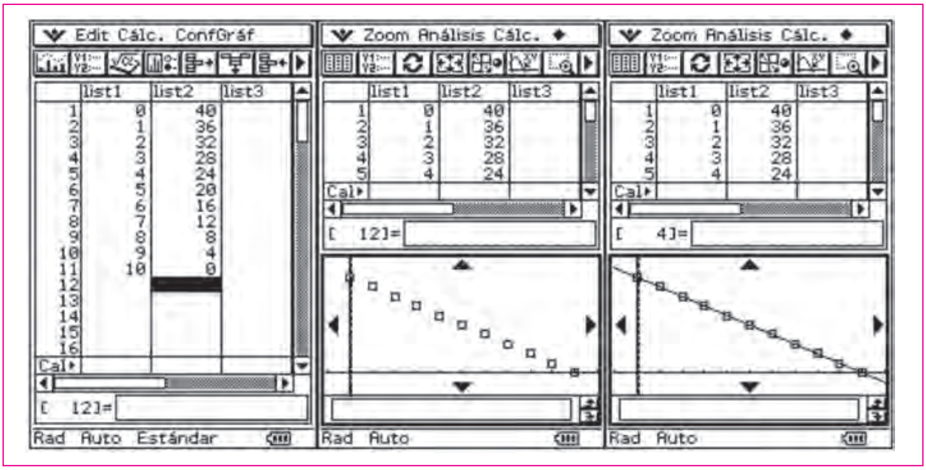
| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *TIEMPO (semanas)* | *0* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* | *10* |
| *DINERO (euros)* | *40* | *36* | *32* | *28* | *24* | *20* | *16* | *12* | *8* | *4* | *0* |

Para poder hacer esta actividad, los estudiantes han debido tener experiencia previa en: a) la construcción de gráficas a partir de tablas, b) el uso de distintas escalas en los ejes de coordenadas, c) el reconocimiento de modelos lineales y el significado de sus parámetros, d) la diferencia entre un modelo de proporcionalidad directa y un modelo afín (no se puede aplicar una regla de tres para obtener valores de una función afín, a pesar de ser un modelo lineal), e) la obtención de fórmulas a partir de tablas, f) la lectura e interpretación de tablas y gráficos.

En la propuesta a) se puede recurrir a la calculadora gráfica para obtener el gráfico de dispersión y buscar después una recta que se ajuste a los datos.




De forma similar, la propuesta b) se puede hacer con la calculadora gráfica mediante la construcción de la tabla y su representación gráfica.

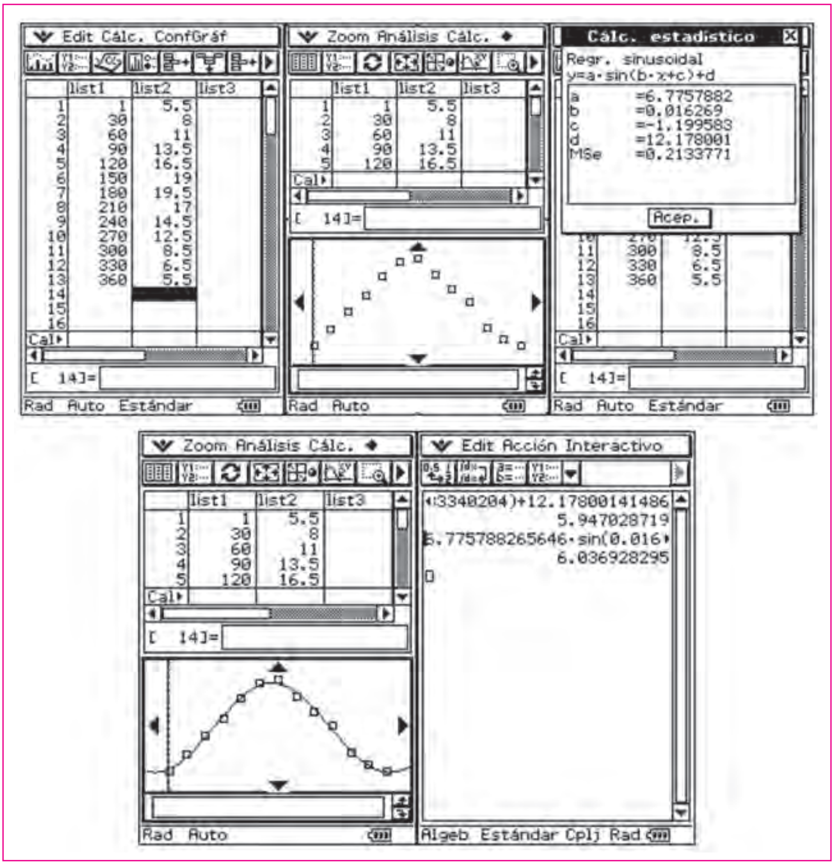


### 2.2.4. *Ejemplo de actividad de modelar en 4º ESO: horas de luz solar*

*En la siguiente tabla se muestra el número de en Alaska durante un año. Busca un modelo matemático que permita estimar el número de horas de luz en febrero y abril del año siguiente:*

| | *E* | *F* | *M* | *A* | *M* | *J* | *J* | *A* | *S* | *O* | *N* | *D* | *E* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *F* | *1* | *30* | *60* | *90* | *120* | *150* | *180* | *210* | *240* | *270* | *300* | *330* | *360* |
| *T* | *5,5* | *8* | *11* | *13,5* | *16,5* | *19* | *19,5* | *17* | *14,5* | *12,5* | *8,5* | *6,5* | *5,5* |

Teniendo en cuenta la naturaleza de los datos, la mejor forma de abordar esta tarea es recurrir a la calculadora gráfica para obtener la nube de puntos o diagrama de dispersión y ensayar distintos modelos funcionales. La forma del diagrama sugiere que el mejor modelo es de tipo sinusoidal. Con la calculadora gráfica es posible obtener directamente la fórmula de la función, lo que permite usar el modelo para estimar el número de horas de luz en febrero y abril. Previamente los estudiantes deben conocer el manejo de la calculadora gráfica para realizar análisis de regresión.



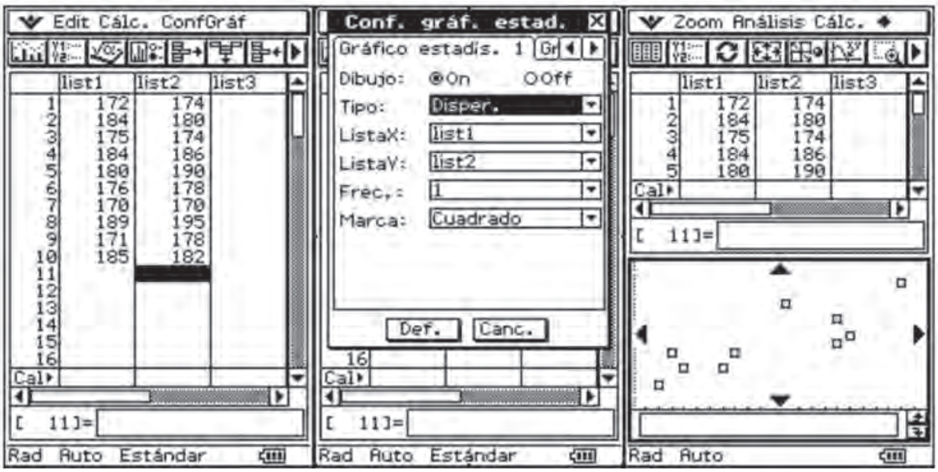
### 2.2.5. *Otro ejemplo de actividad de modelar en 4º ESO: padres e hijos*

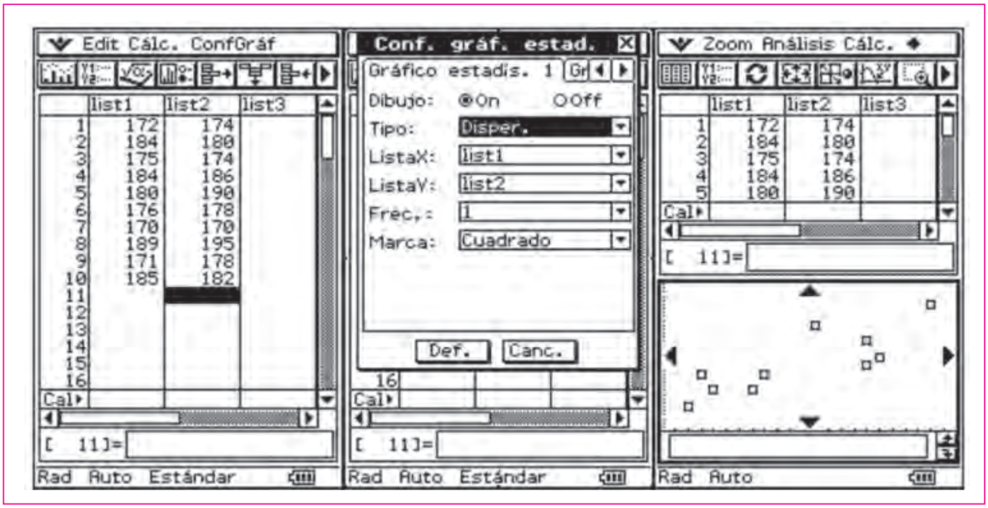
*La altura de 10 padres y de su primer hijo varón está reflejada en la siguiente tabla:*

| *TALLA DEL PADRE (X)* | *TALLA DEL HIJO (Y)* |
|---|---|
| *172* | *174* |
| *184* | *180* |
| *175* | *174* |
| *184* | *186* |
| *180* | *190* |
| *176* | *178* |
| *170* | *170* |
| *189* | *195* |
| *171* | *178* |
| *185* | *182* |

*Utiliza la calculadora gráfica para representar estos datos. ¿Qué altura cabe esperar en un hijo cuyo padre mide 182 cm?.*

Plantear la resolución del problema "manualmente" sería inapropiado, teniendo en cuenta la escala de los ejes. Por ello, se recomienda usar la calculadora gráfica (o una hoja de cálculo) para representar la nube de puntos. Una vez obtenida la gráfica, se trataría de buscar el modelo de mejor ajuste, lo que se puede hacer por medio de un análisis de regresión.



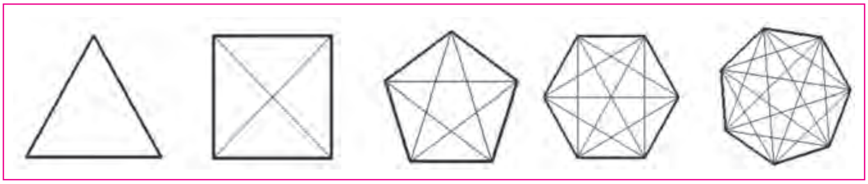


## 2.2.6. *Algunas dificultades*

La tarea del profesorado consistente en diseñar o buscar actividades que encajen en cada una de las "cajas" que llamamos competencias, resulta especialmente compleja. La razón es que un buen número de actividades interconectan varias competencias, de la misma forma que interrelacionan contenidos diferentes (de las propias matemáticas o, a veces, de las matemáticas con otras áreas). Esto hace que sea difícil decidir cuál es la competencia predominante en la actividad y es fuente de discusiones.

Por ejemplo, la siguiente tarea es fácilmente identificable con la competencia "comprender patrones, relaciones y funciones":

*¿Cuál es el número de diagonales de un polígono de n lados?*



ya que la propia tarea da pistas sobre la estrategia a seguir, consistente en analizar casos particulares y tratar de formular una conjetura a partir del análisis de dichos casos. En definitiva, lo esencial en la actividad es "buscar un patrón".

Sin embargo, ya no está claro que la siguiente tarea corresponda a la misma caja.

*A un vendedor de juegos para ordenadores le dan a elegir entre dos modalidades de contrato:*

*Modalidad a).- 800 € mensuales, más 3 €. por cada nueva venta a partir de los 175 juegos vendidos.*

*Modalidad b).- 800 €. fijos más 50 €. por cada juego vendido desde el principio.*

*Determina la expresión que da la ganancia mensual en función de los juegos vendidos, según la modalidad de contrato elegida. Dibuja las gráficas. ¿Cuántos juegos debe vender para que le compense uno u otro contrato?*

Probablemente porque esta actividad es más dispersa (se piden varias cosas, y difíciles) y, además, no está tan direccionada a la búsqueda del patrón, (aunque, desde luego, hay que encontrar dos patrones, uno para cada modalidad de contrato, y además, expresarlos algebraicamente). Pero, aunque los dos patrones-funciones estén explicitados algebraicamente, no será hasta la representación gráfica en unos mismos ejes de coordenadas cuando se comprenda la diferente naturaleza de cada uno. Por lo tanto, lo esencial en esta actividad no es encontrar el patrón, sino comprender el patrón y utilizar esa comprensión para comparar, a través de las gráficas, los modelos que siguen los dos tipos de contratos y después decidir.

Por tanto, ¿deberíamos poner esta tarea en la caja "plantear y resolver problemas" o en la caja "comprender patrones, relaciones y funciones"? Y otra discusión aparejada es la que tiene lugar sobre la distinción entre patrón, relación y función. ¿Son la misma idea?

## 3. SOBRE LA EVALUACIÓN

### 3.1. Tipos de tareas

Cada una de las competencias enunciadas puede tener diferentes niveles de profundidad; las tareas propuestas a los estudiantes son de diferentes tipos y muestran distintos niveles de conocimiento. En el estudio PISA se consideran tres niveles de complejidad a la hora de considerar los ítems con los que evaluar las competencias:

#### • *Primer nivel: reproducción*

Recoge aquellos ejercicios que exigen básicamente la reiteración de los conocimientos practicados, como son las representaciones de hechos y problemas comunes, recuerdo de objetos y propiedades matemáticas familiares, reconocimiento de equivalencias, utilización de procesos rutinarios, aplicación de algoritmos, manejo de expresiones con símbolos y fórmulas familiares, o la realización de operaciones sencillas.

• ***Segundo nivel: conexión***

Recoge problemas que no son simplemente rutinarios, pero que están situados en contextos familiares o cercanos. Plantean mayores exigencias para su interpretación y requieren establecer relaciones entre distintas representaciones de una misma situación, o bien enlazar diferentes aspectos con el fin de alcanzar una solución.

• ***Tercer nivel: reflexión***

Las tareas de este tipo requieren cierta comprensión y reflexión por parte del alumno, creatividad para identificar conceptos o enlazar conocimientos de distintas procedencias. Requieren competencias más complejas, implican un mayor número de elementos, exigen generalización y explicación o justificación de los resultados y toma de decisiones.

Según esta clasificación, la evaluación requiere que se tenga en cuenta los tres tipos de tareas. Una evaluación que solamente se centre en el nivel de reproducción sería inservible para analizar el grado de desarrollo de la competencia matemática de los estudiantes. Además, en el proceso de evaluación se deben combinar diferentes modalidades de actividades: de respuesta abierta o cerrada, de respuesta breve o compleja, de elección simple o múltiple, etc. En definitiva, podemos distinguir entre ejercicios, problemas e investigaciones.

Un ejercicio es una tarea de tipo rutinario, que para su resolución no requiere más que recordar una técnica sencilla ya practicada con anterioridad.

Un problema requiere establecer conexiones entre conceptos y relaciones, buscar técnicas matemáticas apropiadas, analizar el proceso de resolución y validarlo.

Una investigación es una situación abierta en la que, a veces, no está clara la pregunta, hay que tomar decisiones sobre el camino a tomar, retomar la tarea y validarla constantemente.

Las tareas que deben proponerse a los alumnos son de los tres tipos, ya que es la única forma de asegurar la posibilidad de que los estudiantes alcancen su propio nivel de desarrollo de la competencia matemática.

### 3.2. Actividades del nivel de reproducción

Las actividades del nivel de reproducción se limitan a reproducir técnicas o algoritmos previamente aprendidos. Son tareas que pueden desarrollarse directamente con la calculadora, sin necesidad de hacer conexiones con diferentes partes de las matemáticas, ni reflexionar sobre el proceso de resolución, estrategias a utilizar, etc. A continuación vamos a ver algunos ejemplos para cada bloque de contenidos:

## • *Cantidad*

1) Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\frac{3}{4}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}$ b) $\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{5}{3}+\frac{3}{4}\right)$ c) $\left(\frac{7}{5}-\frac{1}{11}\right)\cdot\left(\frac{3}{5}-2\right)$

c) $\left(\frac{8,4}{28,7-0,47}\right)^3$ d) $\sqrt[3]{\frac{1,91}{4,2-3,766}}$ e) $\left(\frac{1}{7,6}-\frac{1}{18,5}\right)^3$

2) Simplifica las siguientes expresiones radicales:

a) $3\sqrt{2}+4\sqrt{8}-\sqrt{32}+\sqrt{50}$ b) $\frac{3}{2-\sqrt{3}}$ c) $\frac{21}{\sqrt{8}+\sqrt{5}}$ d) $\sqrt{18}+\sqrt{96}-\sqrt{242}$

3) Efectúa la división y simplifica:

$$\frac{x^2}{x+5}$$

4) Expresa en una única fracción:

$$\frac{1}{x+2}+\frac{x}{x-2}$$

5) (Ecuación irracional). Utilizando el comando **solve**, resuelve la ecuación:

$$6+\sqrt{2x+3}=x$$

6) (Ecuación bicuadrada). Utiliza el comando **solve** para resolver la ecuación:

$$x^4-5x^2+4=0$$

7) (Ecuaciones trigonométricas). Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas: a) $\sin(x) = \sqrt{2/2}$; b) $\tan(x) = 2$; c) $\sin(x) = \cos(x)$. Utiliza para ello el comando **solve**. Comprueba qué ocurre si se trabaja en el modo de grados y en el modo de radianes.

8) Halla el producto escalar de los vectores: a = (3, 4) y b = (−4, 3). ¿Qué ángulo forman?

9) Encuentra una matriz C que cumpla 2A+3B−C = 0, siendo:

$$A=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 1 & 4\\ 6 & 2\end{bmatrix} \text{ y } B=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 2 & 5\\ 6 & 3\end{bmatrix}$$

10) Utilizando el método de la matriz inversa, resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$a)\ \left.\begin{array}{r} x + y = 2 \\ 2x - 2y = -4 \end{array}\right\} \qquad b)\ \left.\begin{array}{r} 2x + y = 1 \\ x - y = 2 \end{array}\right\}$$

**• *Incertidumbre***

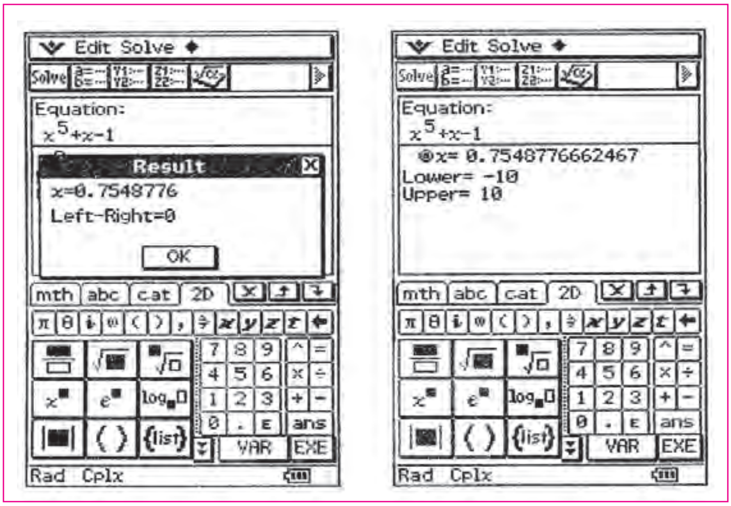
Un estudio de un fabricante de televisores indica que la duración media de un televisor es de 10 años, con una desviación típica de 0,7 años. Suponiendo que la duración media sigue una distribución normal:

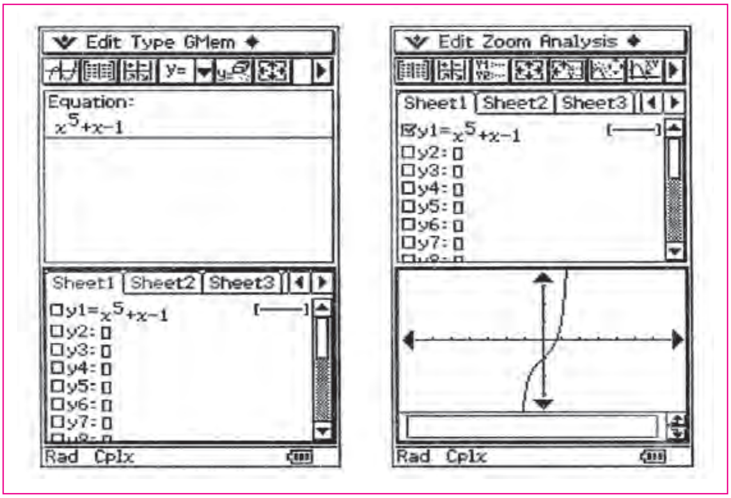
a) Calcula la probabilidad de que un televisor dure más de 9 años.

b) Calcula la probabilidad de que dure entre 9 y 11 años.

### 3.3. Actividades del nivel de conexión

1) Resuelve aproximadamente la ecuación: $x^5 + x - 1 = 0$ con la aplicación Resolución numérica, tomando como límites inferior y superior −10 y 10, respectivamente. Comprueba que la solución es, aproximadamente, 0.75. A continuación, toca el botón **Editor de gráficos**, selecciona la expresión $x^5 + x - 1$ y arrástrala con el lápiz táctil a la función **y1**. Pulsa en la casilla de selección de dicha función y a continuación toca el botón para representarla gráficamente. Si es necesario, modifica las dimensiones de la ventana de visualización, utilizando el menú . Comprueba en la ventana de gráficos 2D que, efectivamente, la gráfica corta al eje de abcisas en x=0,75.

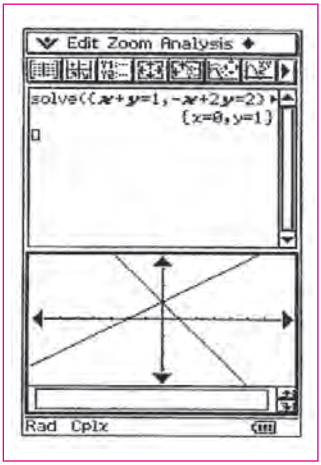





2) Resuelve el sistema de ecuaciones:

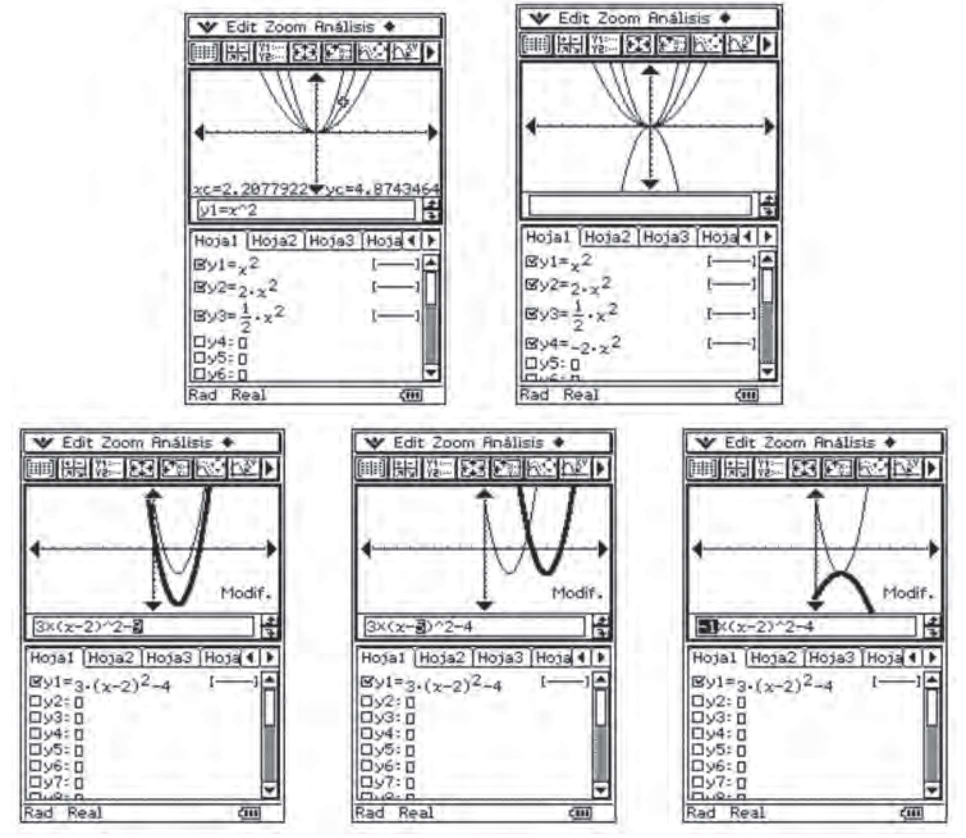
$$\left.\begin{array}{l} x + y = 1 \\ -x + 2y = 2 \end{array}\right\}$$

Utiliza para ello el comando solve de la aplicación **Principal**. Posteriormente, comprueba geométricamente el resultado. Para ello, en el editor de gráficos, introduce las funciones y1=−x+1, y2=(1/2)x+1, activa sus casillas y represéntalas gráficamente tocando el botón . Si es necesario modifica las dimensiones de la ventana gráfica. Comprueba gráficamente que la solución es la obtenida con el comando **solve**.

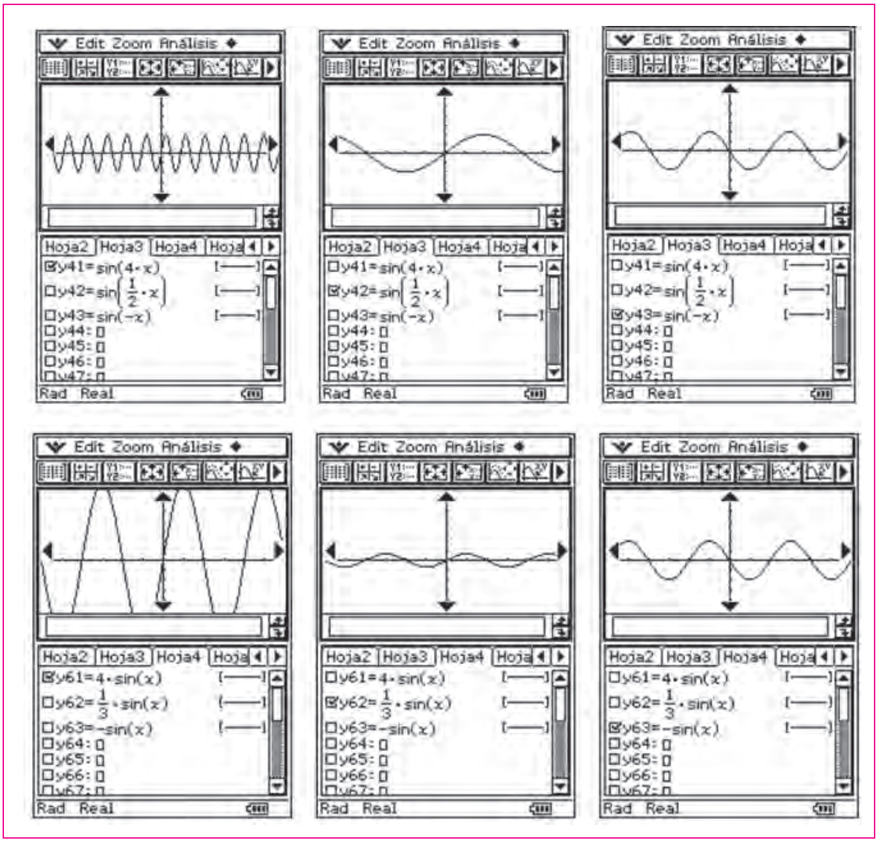


## 3.4. Actividades del nivel de reflexión

1) (Funciones cuadráticas) Investiga el significado de los parámetros $a$, $b$ y $c$ en la expresión $y=a(x-b)2+c$ y en la expresión $y=ax^2+bx+c$.




2) (Funciones trigonométricas) Investiga el significado de los parámetros $a$, $b$, $c$ y $d$ en la expresión $y = a + b\ sen\ (cx + d)$.




## 4. ACTIVIDADES ASOCIADAS A COMPETENCIAS

Mostramos a continuación algunos ejemplos en los que la calculadora ClassPad 330 permite desarrollar algunas de las competencias propias de las matemáticas.

### • *Pensar y razonar*

1) Al trazar las tres medianas de un triángulo, éste queda dividido en 6 triángulos. ¿Qué parte del área del triángulo original es el área de cada uno de esos triángulos?

2) Demuestra que la composición de dos simetrías de ejes paralelos es una traslación e indica sus características (dirección, vector de traslación).

3) Demuestra que la composición de dos simetrías de ejes secantes es un giro e indica sus características (centro y ángulo de giro).

**• *Representar***

1) Calcula

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x+3} - 2}$$

Utilizando el botón en el teclado **[2D]** obtenemos:

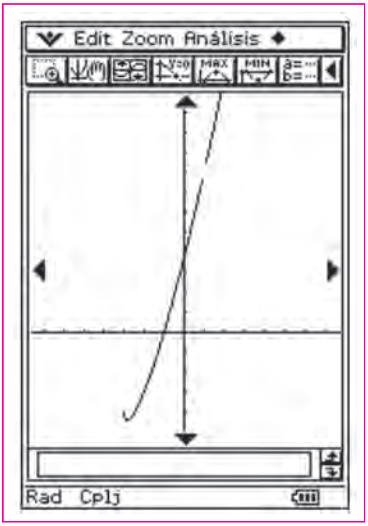
$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x+3} - 2}$$

$$8$$

La representación gráfica en el menú **Gráficos y Tablas** de la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x+3} - 2}$$

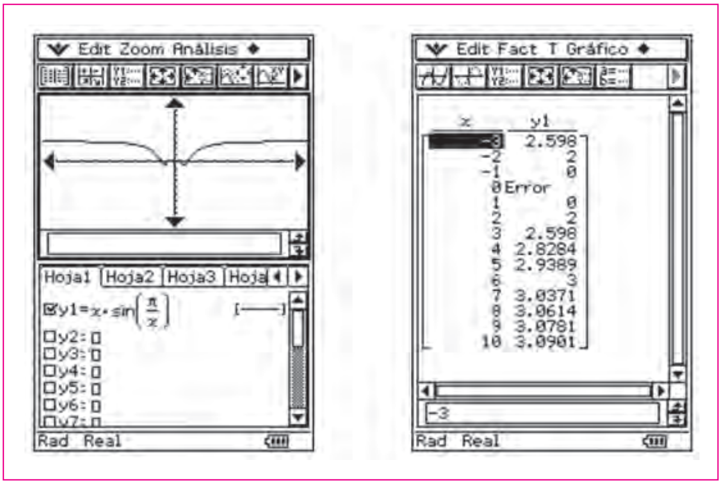
muestra que hay una discontinuidad para x=8.




2) Estudiar la continuidad (también podríamos decir el límite) de la función en el punto x=0

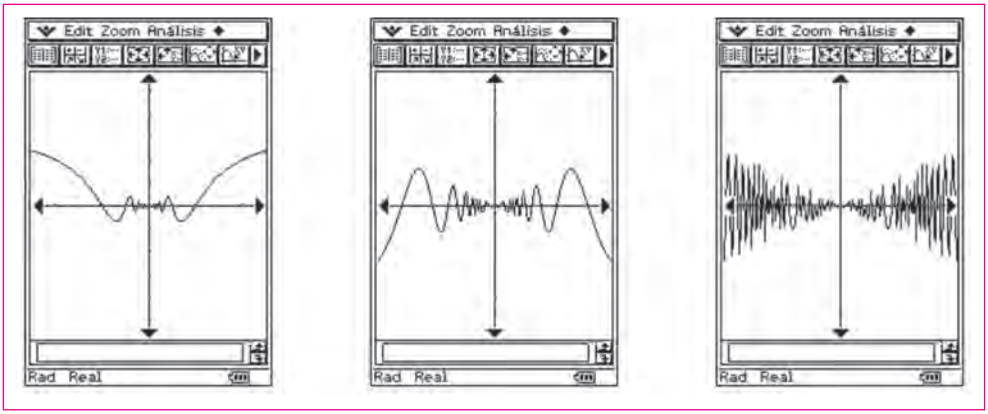
$$y = x \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} \text{ en el punto } x=0$$

Para mayor comodidad cambiaremos la unidad de medida de ángulos en radianes, en **/ Preferencias / Configuración / Formato básico / ángulo**.

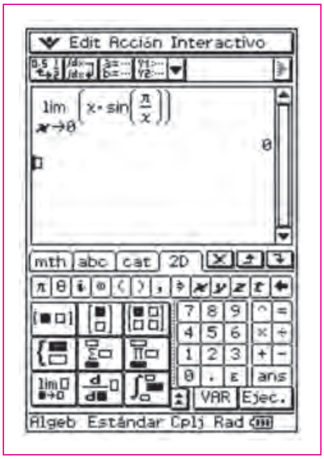



Se observa en una primera aproximación que la función parece continua en todos los puntos. Visualizando la tabla de valores con el botón , veremos ver que en el cero no está definida.

Estudiemos gráficamente el comportamiento de la función en cero utilizando el **Zoom Aumentar** varias veces, o cambiando con la opción **Zoom Cuadro**.




Viendo las gráficas, se puede observar que la función converge a cero, tanto por la derecha como por la izquierda, pero no está definida para ese valor. Observamos desde la gráfica que la función tiene una discontinuidad evitable en x=0. Podemos confirmar el valor del límite usando el teclado **2D** de la aplicación **Principal**.




## • *Plantear y resolver problemas*

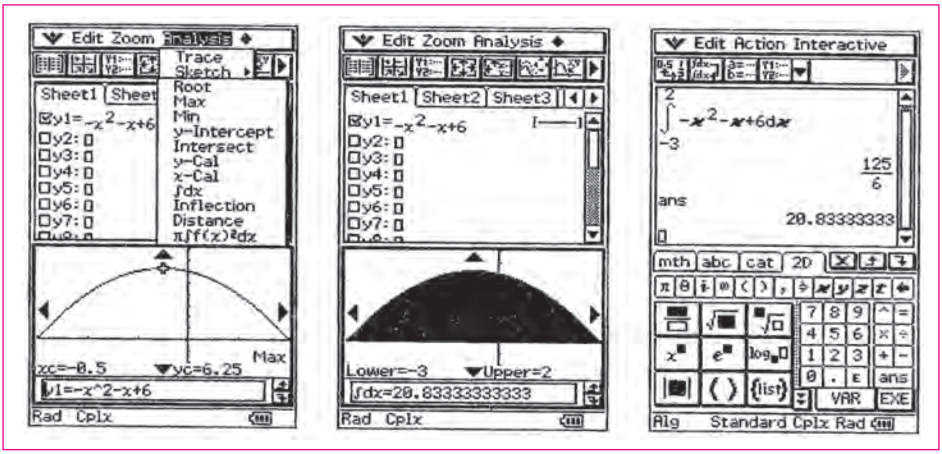
Según Arquímedes, el área de un segmento parabólico de base *b* y altura *h* es igual a:

$$A = \frac{2}{3}\, b\cdot n\,.$$

Por ejemplo, para el segmento de la parábola $y = -x^2 - x + 6 = (x-2)\cdot(x+2)$ comprendido en el intervalo [−3, 2], se cumple que b=5 y h=6,25. Por tanto, según Arquímedes, su área es:

$$A = \frac{2}{3} b\cdot h = \frac{2}{3}\cdot 5\cdot 6{,}25 = \frac{125}{6} \approx 20.83\,.$$

Utiliza la Classpad para representar gráficamente este segmento parabólico y para comprobar si se cumple la fórmula de Arquímedes.



## 5. CONCLUSIONES

La utilización de materiales manipulables y de recursos tecnológicos es esencial para desarrollar la competencia matemática. En particular, las ideas matemáticas requieren de soportes materiales que los estudiantes puedan manipular para analizar situaciones, formular conjeturas y comprobar propiedades. Es evidente que la calculadora gráfica es uno de dichos soportes.

En las actividades que se han presentado en este artículo se ponen en acción algunas de las tareas que permiten desarrollar la competencia matemática: modelar, pensar y razonar, representar, argumentar, conectar, comunicar, plantear y resolver problemas. Todas ellas son tareas que surgen de manera natural, por el mero hecho de usar la calculadora CAS, y las habilidades que los estudiantes ponen en juego con ellas no se podrían activar con los métodos clásicos de lápiz y papel, especialmente por la carga algebraica que contienen los algoritmos habituales. Con la ClassPad, la visualización de los problemas es inmediata, lo que favorece el tratamiento geométrico, disminuyendo la carga algebraica. Esta afirmación no va en detrimento del álgebra, más bien al contrario, estimula y favorece el aprendizaje del álgebra, pero de otra manera, ya que ahora es posible "ver" el álgebra, comprender el significado geométrico de las ecuaciones, ampliar el banco de datos de imágenes de curvas, funciones y construcciones geométricas.

En definitiva, la ClassPad es una buena herramienta que puede ayudar a estudiantes y profesores en el desarrollo de la competencia matemática.

## BIBLIOGRAFÍA

NCTM (2003) Principios y Estándares para la Educación Matemática. Granada: S.A.E.M Thales.

PISA 2003. Pruebas de Matemáticas y de Solución de Problemas. (2005). Madrid: MEC, INECSE, SUMA.

Contreras, M. (2006) El currículum de Matemáticas con la ClassPad 300. Valencia (España). Contreras, M (ed.). ISBN: 978-84-689-8709-5.

Contreras, M. (2004) Matemáticas con la ClassPad 300: una alternativa dinámica. Curso de formación. Página web de la División Didáctica CASIO en www.flamagas.com. 2004.

Mora, J. A. y otros (2004) El estudio de funciones con calculadora gráfica. www.aulacasio.com.

Páginas web: Aula Casio: www.aulacasio.com; Abel Martín: www.aulamatematica.com; Mauricio Contreras: www.mauriciocontreras.es.