*Epsilón* - *Revista de Educación Matemática* 2010, Vol. 27(3), nº 76, pp. 109-148

# Modelar y resolver problemas con la calculadora ClassPad 330

**Mauricio Contreras del Rincón**
*I.E.S. Benicalap (Valencia)*

## UNAS PALABRAS PARA EMPEZAR

En Portugal, los exámenes finales de matemáticas que dan acceso a la Universidad vienen realizándose desde el año 1999 con calculadora gráfica. No es que se tolere el uso de calculadora gráfica en la resolución de los problemas, es que la resolución de los problemas propuestos no sería posible si no se dispone de una buena calculadora gráfica. En pocas palabras, la calculadora gráfica es obligatoria, como podemos observar en los mismos enunciados de los exámenes. Por otra parte, la calculadora gráfica está presente no solamente en los exámenes nacionales que permiten acceder a la Universidad, si no también en los exámenes finales de matemáticas de 10º, y 11º año de Secundaria, en los que también su uso es obligatorio.

En nuestro país la situación es muy diferente. En cada comunidad autónoma las normas de selectividad son distintas y los currículos de secundaria y Bachillerato también son diferentes. Se podría decir que, mientras el currículum aconseja y apuesta por el uso de las TIC, en particular, de las calculadoras (y de las gráficas también), lo cierto es que hay comunidades autónomas donde no se permite el uso de calculadoras gráficas, o donde se tolera el uso de algunas marcas y no de otras, o donde se permite el uso de gráficas, pero no el de calculadoras CAS.

Sin embargo, la tendencia en todos los países europeos es a utilizar cada vez más tecnología para la resolución de problemas, y, en particular, calculadoras gráficas y CAS sin ningún tipo de restricción, tal como se aprecia en los países nórdicos y centroeuropeos.

Las actividades que se proponen en este texto proceden de los exámenes de selectividad portugueses. Aunque en Portugal se permite calculadora gráfica, no se permite en cambio, el uso de CAS. En este trabajo se apuesta por la tecnología CAS de la ClassPad 330, ya que con ella se facilita mucho el trabajo de modelización, el cual es un poco más complejo con la calculadora gráfica. La intención de este trabajo es mostrar que hay matemáticas que se pierden si no se usa una calculadora gráfica o simbólica en las clases. Hay maneras de ver los conceptos e ideas matemáticas que no serían posible si no se dispone de tecnología gráfica o CAS. Hay conexiones entre campos conceptuales diferentes que no se aprecian si no se dispone de tecnología gráfica o CAS. Si repasamos las competencias matemáticas según PISA, (Pensar y razonar, argumentar, comunicar, modelar, plantear y resolver problemas, representar, utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones), vemos que la calculadora ClassPad 330 favorece el desarrollo de todas ellas. Por tanto, prohibir o restringir su uso sería equivalente a prohibir o restringir que todos los estudiantes alcancen mejores niveles de desarrollo de su competencia matemática. El objetivo de este trabajo es ayudar a estudiantes y profesores en la tarea de lograr una mayor competencia matemática y un mejor nivel en el uso de tecnologías.

## LOS PROBLEMAS

### 1. Horas de Sol

En el presenta año civil, en Lisboa, el tiempo que transcurre entre la salida y ocultación del Sol, en el dia que ocupa el lugar n del año, está dado, en horas, aproximadamente, por:

$$f(n) = 12{,}2 + 2{,}64 \cdot \text{sen}\,\frac{\pi \cdot (n - 81)}{183}, \quad n \in \{1, 2, 3, ..., 366\}$$

(el argumento de la función seno está expresado en radianes).

Por ejemplo,: en el dia 3 de febrero, trigésimo cuarto día del año, el tiempo que transcurre entre la salida y ocultación del Sol fue de f (34) ≈ 10,3 horas.

1) En el día 24 de Marzo, Día Nacional del Estudiante, el Sol salió a las seis y media de la mañana. ¿En qué instante se ocultó el Sol ese día? Presenta el resultado en horas y minutos (los minutos redondeados a las unidades).

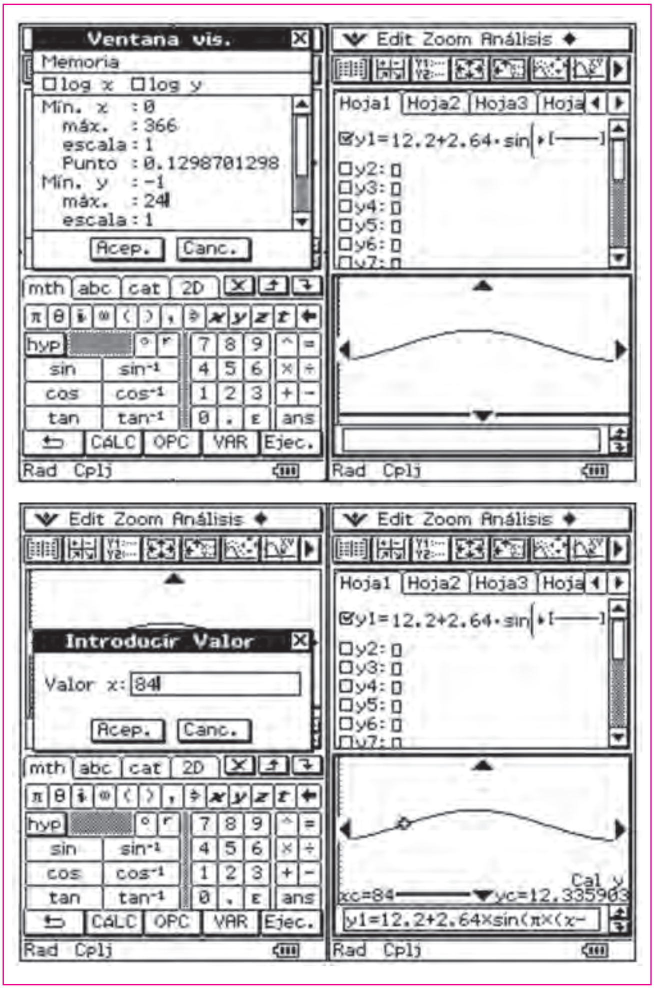
Notas:

- Recuerda que, en el presente año, el mes de Febrero tiene 29 días.
- Siempre que, en los cálculos intermedios, realices redondeos, conserva, como mínimo, tres cifras decimales.

2) En algunos días del año, el tiempo que transcurre entre el nacimiento y la ocultación del Sol es superior a 14,7 horas. Utilizando la calculadora, determina en cuántos días del año ocurre esto. Indica cómo lo haces.

#### *Resolución*

1) El día 24 de Marzo es el día 31+29+24=84 del año. Para ver cuántas horas de sol hubieron ese día, representamos la gráfica de la función y calculamos el valor f(84), con la opción **Análisis / Resolución gráfica / CalY**

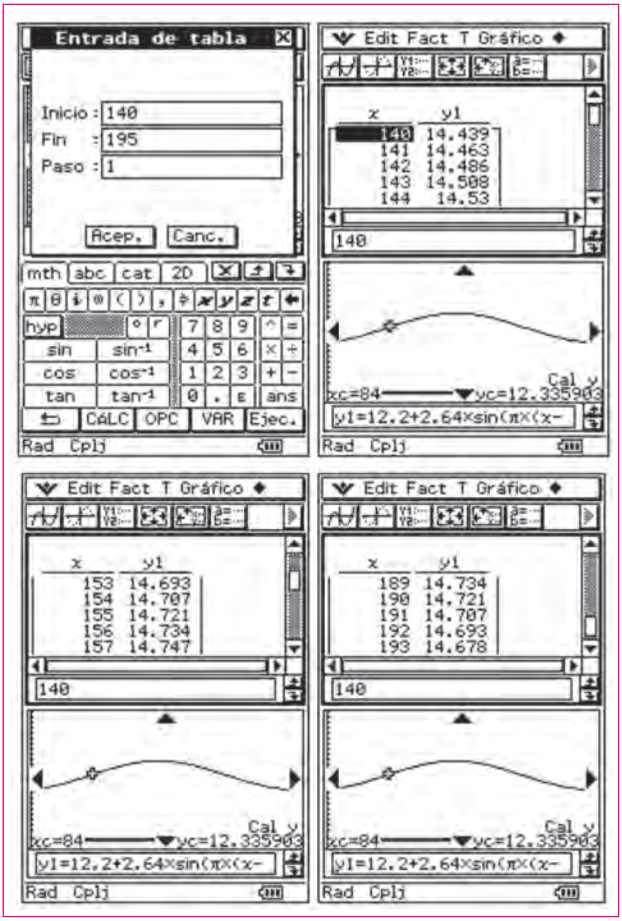



Ese día, el número de horas de sol fueron 12.335903. Podemos concluir que la puesta de Sol del día 24 de Marzo tuvo lugar a las 6 h 30 m + 12 h 20 m = 18 h 50 m.

2) Pretendemos hallar n de forma que f(n)>14.7. Con la calculadora gráfica tenemos dos formas de obtener la respuesta.

***Primera forma: usando tablas de valores***

Construimos una tabla de valores de la función, tal como se indica a continuación:

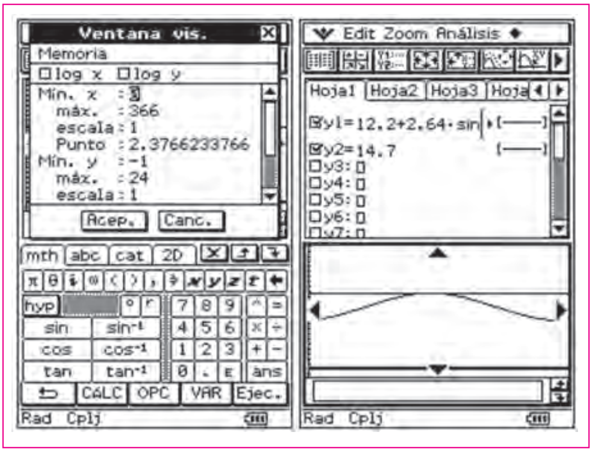



Vemos que f(x) > 14.7 si  154 ≤ x ≤ 191, lo que supone un total de 191 – 153 = 38 días. Por tanto, durante 38 días, el número de horas de sol es superior a 14,7 horas.

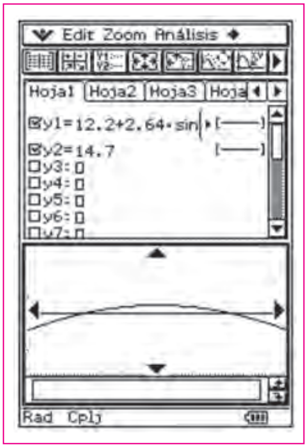
Nota: debes configurar la calculadora para que los ángulos se expresen en radianes.

***Segunda forma: usando gráficos***

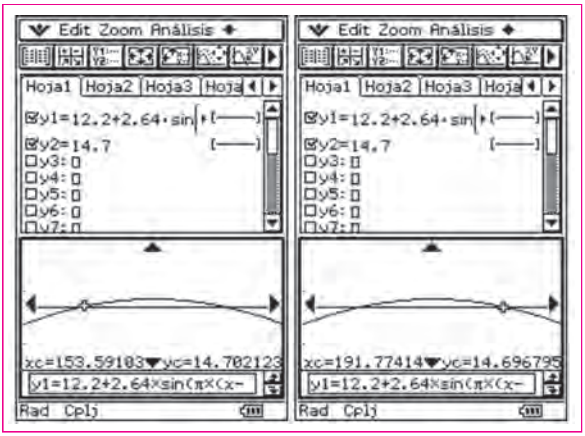
Introduce la función Y2 = 14.7 en el editor de gráficos y representa gráficamente las dos funciones, con la siguiente ventana de visualización:



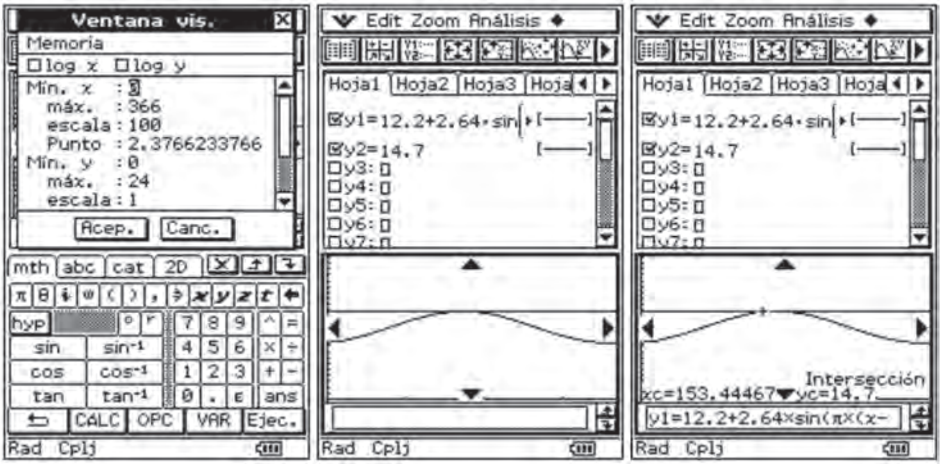

Ampliamos la zona central del gráfico con un zoom de cuadro:




A continuación, hallamos los puntos de intersección con el cursor de recorrido.



lo que confirma el resultado obtenida con las tablas de valores. También podemos obtener el mismo resultado, usando el comando **Análisis / Resolución gráfica / Intersección**, tal como indican las siguientes pantallas:




Comprobamos que las 14,7 horas de sol ocurrirán en dos instantes, aproximadamente, correspondientes a 153,445 días y 191,555 habiendo por tanto 191 – 154 + 1 = 38 días con más de 14,7 horas de sol.

### *Competencias*

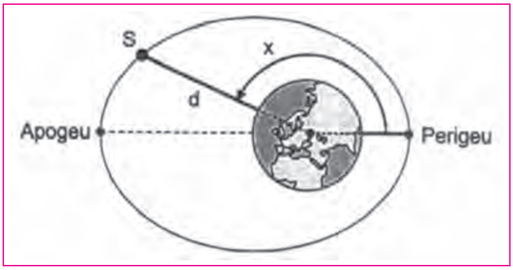
En esta actividad hay que utilizar el cursor de recorrido, tablas de valores y gráficos de la calculadora gráfica para resolver una inecuación trigonométrica, interpretando previamente la función correspondiente en el contexto del fenómeno periódico en estudio. Con la ClassPad, el problema se resuelve gráficamente, en vez de algebraicamente.

- Modelar: como el modelo ya está dado en el enunciado por medio de la función seno, más que construir el modelo, hay que comprenderlo interpretándolo en el contexto del fenómeno periódico que se está analizando.
- Conectar tablas y gráficos para resolver problemas.
- Representar y comunicar el resultado.

## 2. El Satélite

Un satélite S tiene una órbita elíptica alrededor de la Tierra, tal como se representa en la figura. Ten en cuenta que los elementos señalados en ella no están en la misma escala. En la elipse están señalados dos puntos:

- El apogeo, que es el punto de la órbita más alejado del centro de la Tierra.
- El perigeo, que es el punto de la órbita más próximo al centro de la Tierra.



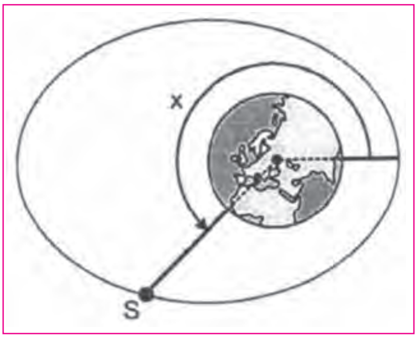

El ángulo, x, señalado en la figura, tiene su vértice en el centro de la Tierra, su lado origen para por el perigeo, y su lado extremo pasa por el satélite S y su amplitud está comprendida entre 0 y 360 grados.

La distancia d, en km, del satélite al centro de la Tierra, está dada por:

$$d = \frac{7820^{o}}{1 + 0{,}07 \cdot \cos x}$$

Considera que la Tierra es una esfera de radio 6378 km.

1) Determina la altitud del satélite (distancia a la superficie de la Tierra) cuando éste se encuentra en el apogeo. Presenta el resultado en km, redondeando a las unidades.
2) En cierto instante, el satélite está en la posición indicada en la figura.




La distancia al centro de la Tierra es, entonces, de 8.200 km.

Determina el valor de x, en grados, redondeando a las unidades.

## *Resolución*

1) Si el satélite se encuentra en el apogeo, el ángulo x tiene amplitud igual a 180º. Basta calcular d(180), que es la distancia del satélite al centro de la Tierra.


La distancia del satélite al centro de la Tierra en el apogeo es 8408,6 km.

Si a esta distancia le restamos el radio de la Tierra, tenemos 8408,6 – 6378 = 2030,6 km, que es la altitud a la que está el satélite cuando se encuentra en el apogeo.

2) El razonamiento en este apartado es inverso al del apartado anterior. Queremos resolver la ecuación d(t)=8200, lo que podemos hacer con el comando **solve** de la calculadora:

Como el ángulo x está en el tercer cuadrante, la solución es:

$$X = 360^{o} - 131.4541813 = 228.5458187^{o} = 228{,}55^{o}$$

### *Competencias*

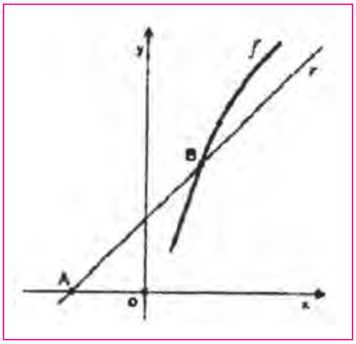
Como el modelo ya viene en el enunciado, nuevamente hemos de comprender el modelo conectándolo con el contexto de la situación planteada. Después hay que usar el modelo para resolver una ecuación trigonométrica que permita obtener el ángulo pedido.

- Modelar: comprender el modelo, dado por la función coseno en términos de la situación propuesta.
- Conectar el modelo con la situación propuesta para obtener valores particulares y para dar el paso inverso, resolviendo la ecuación trigonométrica que permite resolver el problema.
- Argumentar la validez de la solución recurriendo a las propiedades de las funciones trigonométricas.

## 3. Función

Considera la función f de dominio R, definida por $f(x)=2x - \cos x$:

1) Utilizando el teorema de Bolzano, demuestra que la función f tiene, por lo menos, un cero en el intervalo $(0, \pi)$.
2) Sea f' la función derivada de f. Demuestra que $f'(x)>0$, para todo x de R, y justifica que el cero de f, cuya existencia está garantizada por el enunciado del apartado anterior, es el único cero de esta función.
3) En la figura de abajo están representadas: a) parte del gráfico de la función f, b) parte de una recta, cuya inclinación es de 45º, que contienen al punto $A(-3, 0)$ y que corta al gráfico de la función f en el punto B.



Utilizando la calculadora, determina el área del triángulo AOB, donde O designa el origen de coordenadas. Presenta el resultado redondeando a las unidades.

## *Resolución*

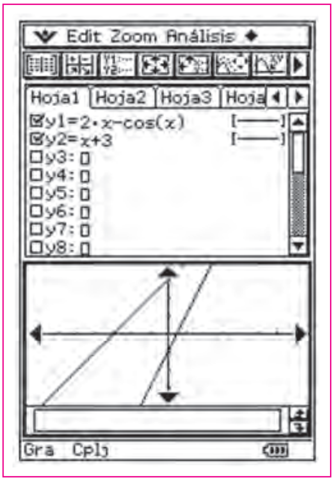
1) Se trata de ver que la función f cumple las hipótesis del teorema de Bolzano. Evidentemente, f es continua en $[0, \pi]$ y $f(0)= -1<0$ y $f(\pi)=2\pi+1>0$. Aplicando el teorema de Bolzano, existe al menos un punto a € $(0, 2\pi)$ tal que $f(a)=0$.

2) La derivada de la función es $f'(x)=2 - (-\text{sen } x)=2+\text{sen}x$. Como $\text{sen } x > 0$ en el intervalo $(0, \pi)$, resulta que $f'(x)>0$, para x€$(0, \pi)$.

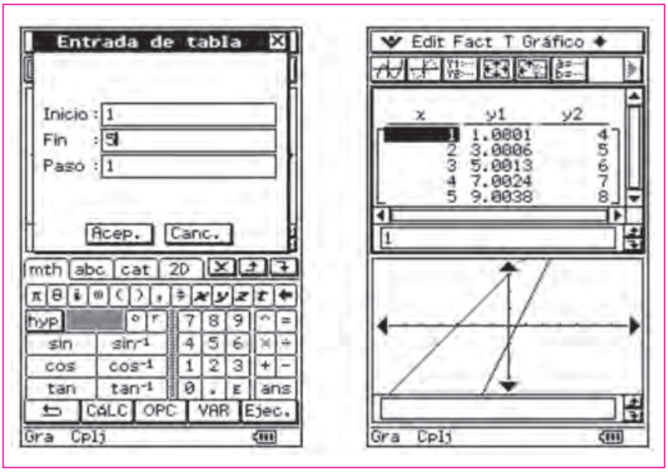
3) La recta r que contiene al punto A(-3, 0) y cuya inclinación es 45º, tiene por ecuación la expresión $y=x+3$. De hecho, la ecuación de una recta es del tipo $y =mx+b$, en la que m es la pendiente de la recta y b la ordenada en el origen. La inclinación 45º de la recta corresponde a una pendiente $m=1$ (basta observar que para cualquier vector director de la recta, los vectores componentes tienen la misma norma). Para calcular b se sabe que el punto A de coordenadas (-3, 0) pertenece a la recta. Por tanto: $0=1\times(-3)+b \Leftrightarrow b=3$. Así, la ecuación de la recta es $y=x+3$.

Para determinar el área del triángulo AOB, debemos hallar, en el sistema de referencia dado, las coordenadas del punto B.

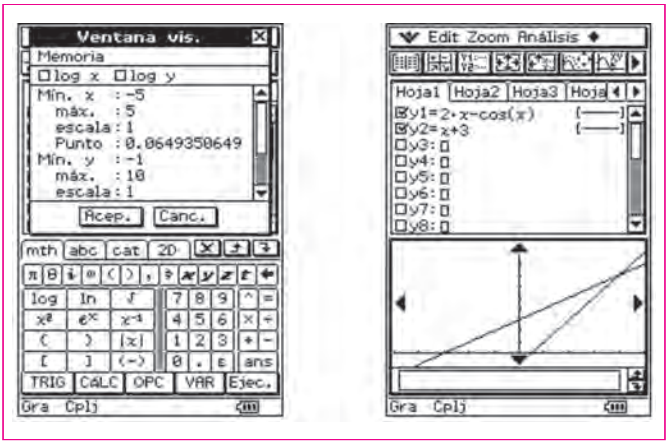
En el menú **Gráficos y Tablas**, introducimos la función f y la recta r.



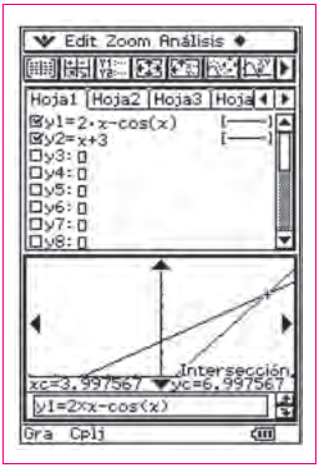

Para definir mejor la ventana de visualización, podemos ver que los valores de x varían entre 2 y 3 y que el valor de la ordenada está comprendido entre 5 y 6. Introducimos una tabla de valores, tal como se indica a continuación.




Analizamos los valores de la tabla y deducimos que la mejor ventana de visualización para el gráfico es la siguiente:




Podemos determinar las coordenadas del punto B, a través de la intersección de la recta r con la función f. Para ello, recurrimos al comando **Análisis / Resolución gráfica / Intersección**.




Concluimos que las coordenadas del punto B son, aproximadamente, (2.32, 5,32).

Podemos determinar el área A del triángulo AOB.

Sea B' la proyección ortogonal del punto B sobre el eje OX. Tenemos:

$$A = \frac{AO \times BB'}{2} = \frac{|0-(-3)| \times |0-5.32|}{2} = \frac{3 \times 5.32}{2} = 7.79 \approx 8 \text{ unidades.}$$

Redondeando a las unidades, el área A del triángulo AOB es igual a 8 unidades cuadradas.

## *Competencias*

En este caso no hay propiamente una actividad de modelización, pero si la hay de argumentación y razonamiento matemático, puesto que hay que utilizar teoremas y propiedades de las funciones para hacer demostraciones, pensar, razonar y argumentar. Además el cálculo del área del triángulo AOB, requiere el uso de tecnología para hallar el punto de intersección B.

- Argumentar: utilizar las propiedades de la función para justificar otras nuevas.
- Representar: hay que dibujar la gráfica de la función y de la recta para hallar el punto de intersección y usarlo para obtener el área pedida.
- Conectar; asociar el punto de intersección de dos gráficas con la resolución del sistema formado por sus ecuaciones.

## 4. “Antidor – Acción rápida y prolongada”

Un laboratorio farmacéutico lanza al mercado un nuevo analgésico, el Anti-Dor. La concentración de este medicamento, en decigramos por libro de sangre, t horas después de ser administrado a una persona, está dada por:

$$C(t) = t^2 \cdot e^{-0.6 \cdot t} \quad (t \geq 0)$$

El laboratorio realiza una campaña de promoción de este medicamento, basada en el slogan “AntiDor: Acción rápida y prolongada”.

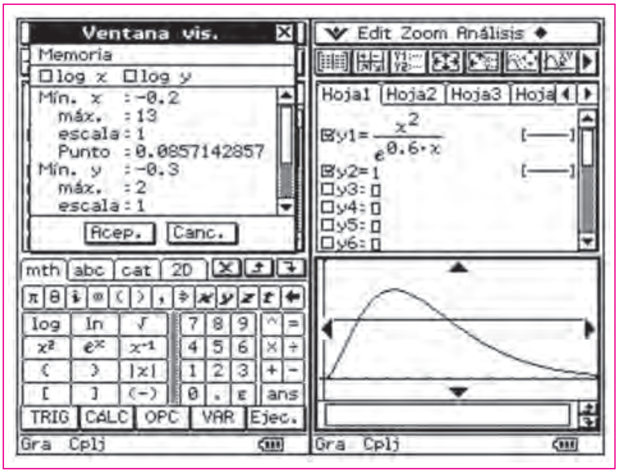
En una breve redacción de sesenta a ciento veinte palabras, comenta el slogan, teniendo en cuenta que:

- Para la mayoría de dolores, el AntiDor solo produce efecto si su concentración es superior a 1 decigramo por libro de sangre.
- De acuerdo con una asociación de defensa del consumidor, un buen analgésico debe comenzar a producir efecto, como máximo, media hora después de haberse tomado, y su acción debe permanecer durante, por lo menos, cinco horas (después de haber comenzado a producir efecto).

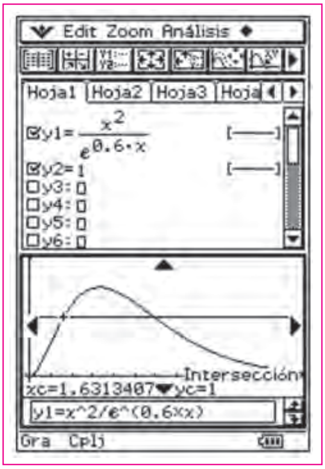
Nota: En la resolución de esta cuestión, debes utilizar la calculadora gráfica e ilustrar la redacción con el trazado de uno o más gráficos.

### *Resolución*

Para la mayoría de los dolores, el Antidor apenas produce efecto si su concentración en la sangre fuera superior a 1 decigramo por litro. Teniendo en cuenta esto, hacemos un análisis conjunto de las dos funciones $C(t) = t^2 \cdot e^{-0.6 \cdot t}$ $(t \geq 0)$ y $E(t) = 1$, $(t \geq 0)$ , siendo E(t) el valor a partir del cual se da el efecto. Utilizamos la siguiente ventana de visualización:

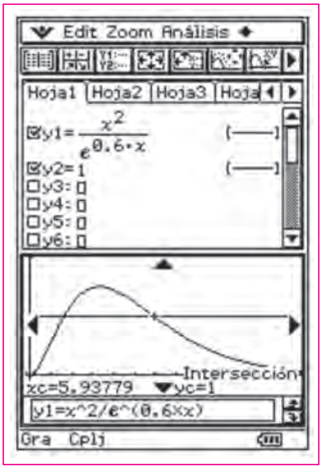


Usamos el comando **Análisis / Resolución gráfica / Intersección** para determinar los puntos de corte de las dos funciones.




Con el primer punto de intersección podemos inferir que el medicamento solo comienza a tener efecto más de una hora y media después de haber sido administrado (cerca de 1.631 horas después).

Por lo que se refiere a la acción prolongada, podemos también observar que el segundo punto de intersección de las curvas acontece 5.938 horas después de la administración del medicamento.




Así, hallando la diferencia, tenemos 5.938 – 1.631 = 4.307 horas de duración del medicamento, lo que contradice las premisas de la asociación de defensa del consumidor para una acción prolongada.

Podemos afirmar que estamos ante un caso de publicidad engañosa, ya que la acción del Antidor no es rápida (pues hace efecto más de una hora y media después de haber sido tomado) ni prolongada (pues el efecto dura menos de cinco horas).

## Competencias

Aunque el modelo ya está construido, hay que comprenderlo, para poder analizar si la publicidad que hace el fabricante es o no correcta. Comprender el modelo implica representarlo gráficamente y analizar si algunos valores particulares se ajustan o no al mismo. Después hay que representar gráficamente la línea de nivel y=1 para poder estudiar la eficacia del medicamento.

- Modelar: comprender el modelo, analizando su validez.
- Representar: dibujar la gráfica de la función y de la línea de nivel y=1 para encontrar el intervalo de eficacia del medicamento.
- Conectar: los puntos de intersección de la gráfica con la línea de nivel son los extremos del intervalo de eficacia del medicamento.

## 5. Una función

Considera la función f, de dominio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = 3x - 2 \ln x$.

1) Utiliza métodos exclusivamente analíticos para resolver las dos cuestiones siguientes:

   1.1) Estudia *f* en cuanto a la existencia de asíntotas de su gráfica.

   1.2) Demuestra que la función *f* tiene un único mínimo.

2) El gráfico de *f* contiene un único punto cuya ordenada es el cuadrado de la abcisa. Utilizando la calculadora, determina un valor aproximado para la abcisa de este punto (presenta el resultado redondeado a las décimas). Explica cómo hacerlo (en la explicación debes incluir el gráfico, o gráficos, que consideréis oportuno para resolver esta cuestión.

### *Resolución*

1.1) Se cumple que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (3x - \ln x) = +8$$

Además

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (3x - \ln x) = +8$$

Por lo tanto, el eje OY es una asíntota vertical de la gráfica de la función.

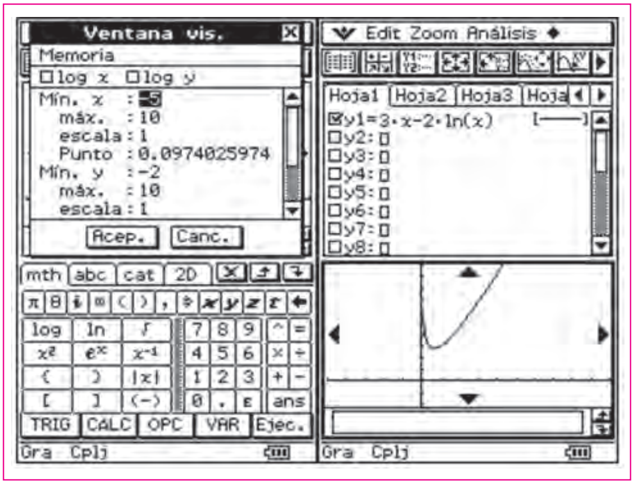
1.2) Se cumple que:

$$f'(x) = 3 - \frac{2}{x} = 0 \leftrightarrow 3 = \frac{2}{x} \rightarrow 3x = 2 \rightarrow x = \frac{2}{3}$$

Este es el único valor crítico y como f es derivable en su dominio, esto indica que solamente puede haber un único máximo. En efecto,

$$f''(x) = \frac{2}{x^2} \geq 0$$

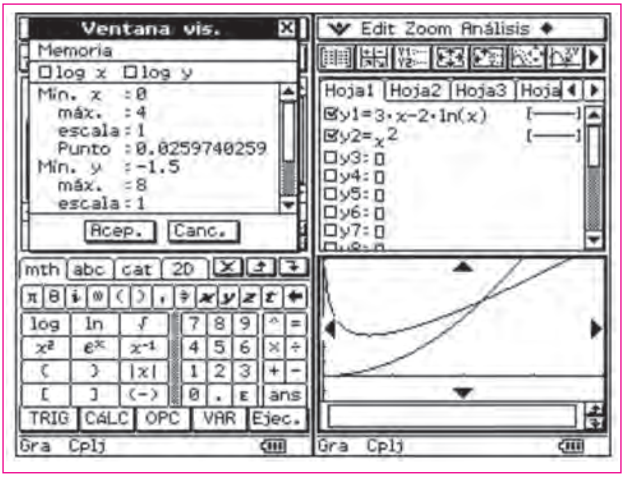
Por tanto, x=2/3 es un mínimo relativo. La gráfica de la función muestra, que en efecto, solo hay un único mínimo relativo.



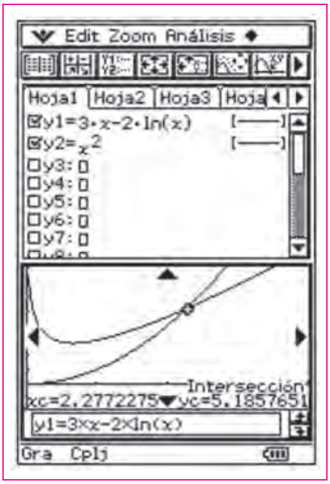

2) La abcisa del punto del gráfico de f cuya ordenada es el cuadrado de la abcisa, puede calcularse hallando el valor de la abcisa del punto de intersección de la gráfica de f con la gráfica de la parábola de ecuación $y = x^2$, Gráficos y tablas introducimos las expresiones de dichas funciones, A continuación estudiamos la evolución de dichas funciones mediante una tabla de valores, en la que se muestren f(1), f(2), f(3), f(4) y f(5).


Examinando la evolución de los valores de la dos funciones, a través de la tabla, podemos observar que el valor de la abcisa del punto pedido está comprendido entre 2 y 3.

Teniendo en cuenta la observación de la tabla, así como el hecho de que el gráfico f solo admite una asíntota vertical (x=0) y un mínimo único, x=2/3 , siendo f(2/3)=2,8, podemos elegir la siguiente ventana de visualización:



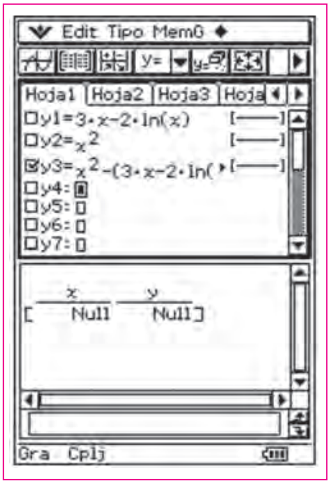

Podemos ahora determinar las coordenadas del punto de intersección de las dos gráficas, seleccionando el comando **Análisis / Resolución gráfica / Intersección**.




Concluimos que las coordenadas del punto de intersección son, aproximadamente, (2.27, 5.18). El valor aproximado a las décimas de la abcisa del punto pedido es 2.3.

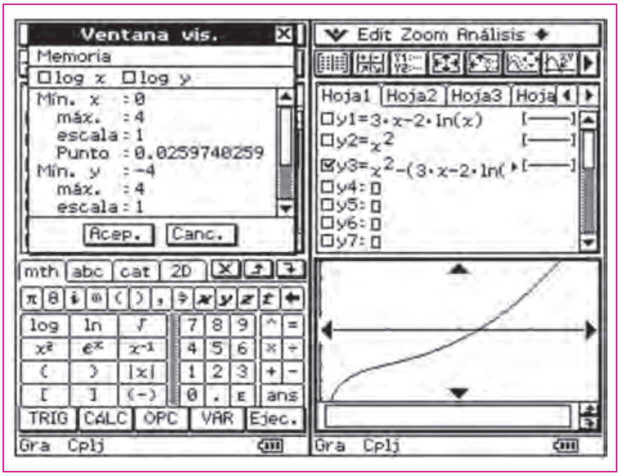
Otra forma:

Como el punto del gráfico de f cuya ordenada es el cuadrado de la abcisa puede ser visto como el punto de intersección de las gráficas de las funciones f e $y = x^2$, su abcisa se puede calcular resolviendo la ecuación $x^2 = 3x - \ln x$. En el menú **Gráficos y tablas**, introducimos la expresión $Y3 = x^2 - (3x - \ln x)$:

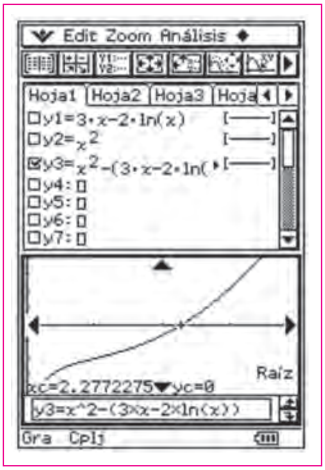



Vamos a examinar la evolución de los valores de la función editada en Y3 mediante una tabla. En la lista de funciones, seleccionamos solamente la función Y3. Define el intervalo de salida de la tabla y muestra la tabla:


Observamos en la tabla que el cero de la función Y3 está comprendido entre 2 y 3. (Esto lo podemos afirmar, ya que la función Y3 es continua en $R^+$, aplicando el teorema de Bolzano). Basándonos en esto, podemos elegir la siguiente ventana de visualización:




Podemos ahora determinar el valor del cero de la función, seleccionando el comando **Análisis / Resolución gráfica / Raíz**.




Vemos que se cumple que la función tiene un cero para x=2,27. Por tanto, el valor aproximado a las décimas para la abcisa del punto pedido es 2.3.

## Competencias

En este caso, se trata de hallar el punto de intersección de las gráficas de las funciones $f(x) = 3x - 2\ln x$, $g(x) = x^2$, lo que puede hacerse gráficamente, mediante el comando Intersección del menú Resolución gráfica o numéricamente, mediante la construcción de una tabla de valores de la función g(x)-f(x) o mediante la obtención del cero de esta función. Es decir, lo que tradicionalmente ha sido un problema de álgebra, se puede enfocar desde un punto de vista gráfico o numérico, acercando así el problema a un núcleo más amplio de estudiantes:

- Modelar: comprender que se puede trabajar con las dos funciones f y g o solamente con una, la resta de ambas. En este caso, no hay modelo de ninguna situación real.
- Representar: hay que dibujar las gráficas de las dos funciones o de la función resta de la dos.
- Conectar: hay que comprender que el punto de corte de la gráfica de la función resta f-g con el eje OX corresponde al valor 0 de la función resta f-g en la tabla de valores.

## 6. Un problema de alturas

Supongamos que la altura A (en metros) de una generación de sexo masculino puede ser expresada, aproximadamente, en función de su peso p (en kilogramos), por:

A(p)= – 0,52 + 0,55 ln (p), (donde ln representa el logaritmo de base e)

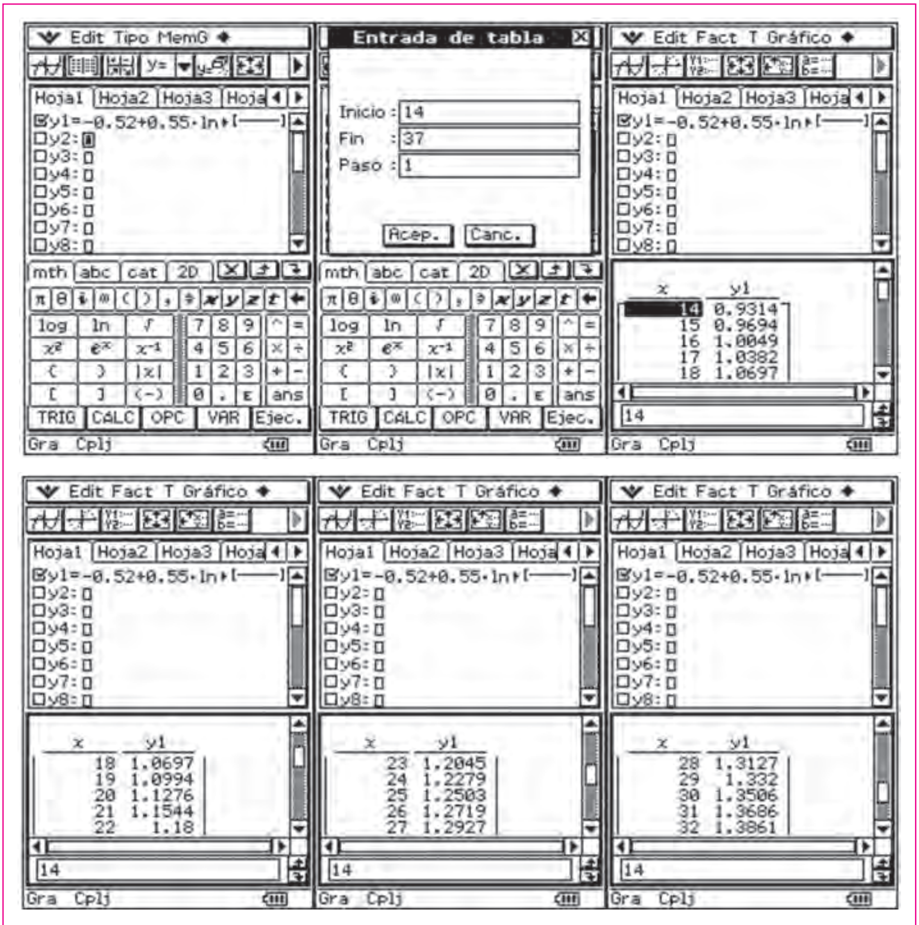
Recurriendo a métodos analíticos y utilizando la calculadora para efectuar cálculos numéricos, resuelve las siguientes cuestiones:

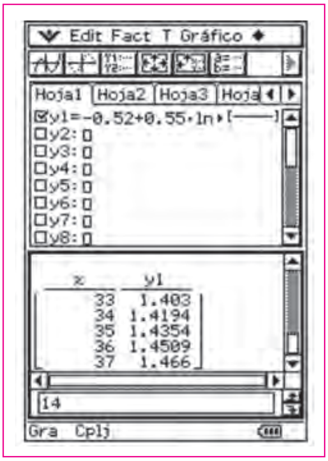
1) Ricardo mide 1,4 m de altura. Admitiendo que la altura y el peso de Ricardo están de acuerdo con la igualdad referida, ¿cuál será su peso? Presenta el resultado en kilogramos, redondeando a unidades.

2) Comprueba que, para cualquier valor de p, la diferencia A(2p) – A(p) es constante. Determina un valor aproximado de esa constante (con dos cifras decimales) e interpreta ese valor en el contexto de la situación descrita.

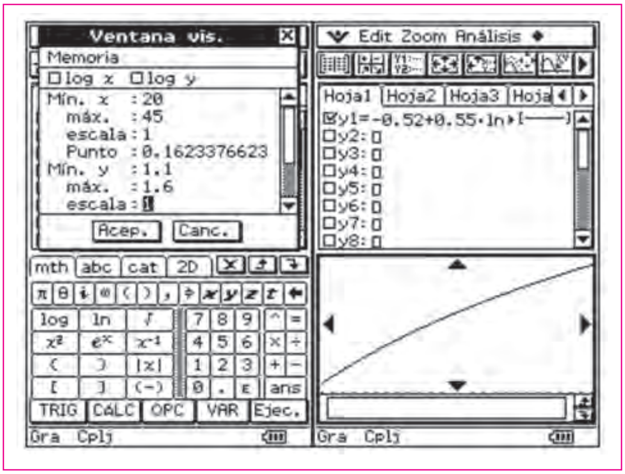
## *Resolución*

1) Introducimos la fórmula de la función en el menú **Gráficos y tablas**. Examinamos la evolución de la función por medio de una tabla de valores:

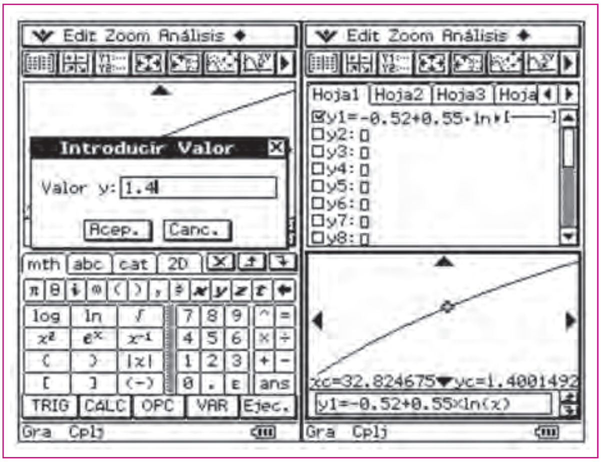





Podemos conjeturar que, en la situación referida, el peso de Ricardo está comprendido entre 32 y 33 kilogramos. Usamos la siguiente ventana de visualización:



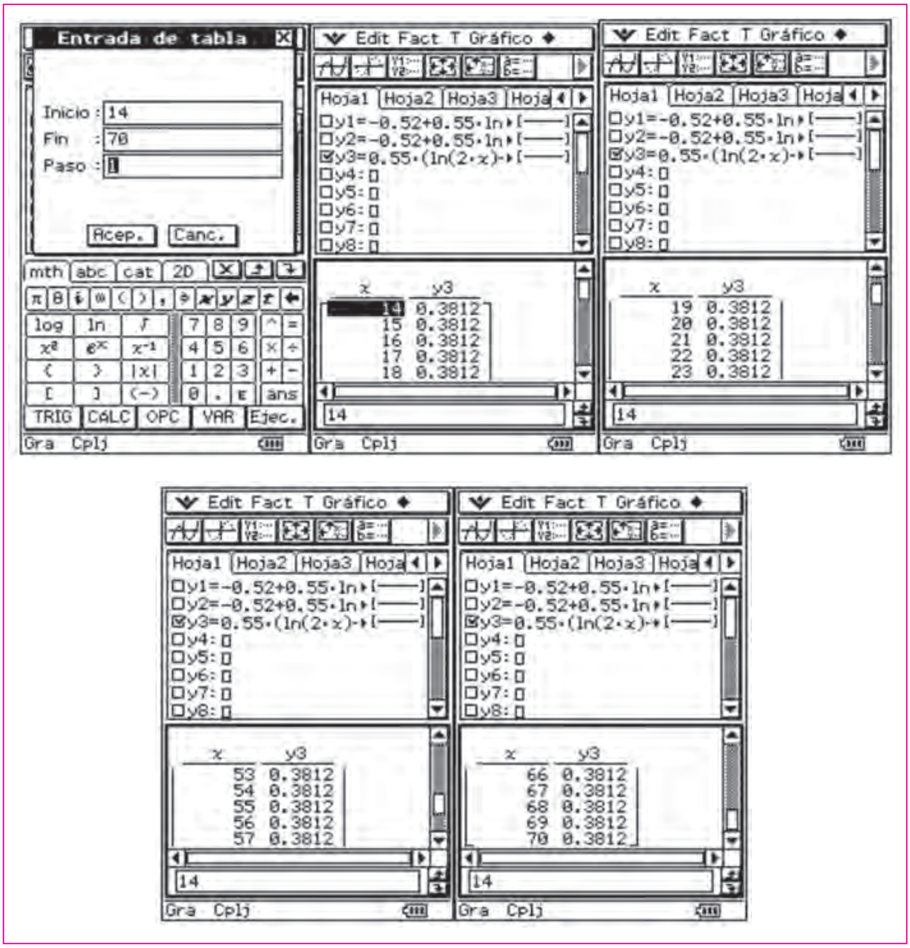

Seleccionamos el comando **Análisis / Resolución gráfica / CalX** e introducimos 1.4 como valor de Y:




En la situación referida, el peso de Ricardo es aproximadamente 33 kilogramos.

2) En Y2 escribimos la expresión Y2=–0.52+0.55 ln (2x) correspondiente a A(2p). Queremos ver que, para cualquier valor de p, la diferencia A(2p) – A(p) es constante. Por tanto, escribimos en Y3 el resultado de Y2 – Y1.


A continuación, desactivamos las funciones Y1 e Y2 y dejamos activa Y3. Construimos una tabla de valores de Y3, tal como se indica a continuación:




Observando, a través de la tabla, la evolución de los valores de la función Y3, vemos que la diferencia A(2p) – A(p) permanece constante, y dicha constante es, aproximadamente, 0,38. En el contexto de la situación descrita, este valor significa que un niño con el doble del peso de otro, tendrá 38 centímetros más de altura.

## Competencias

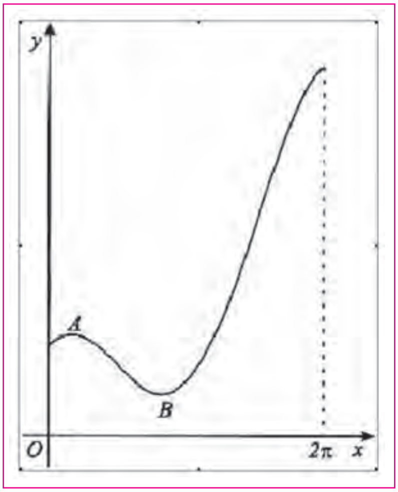
En primer lugar hay que sustituir en la expresión algebraica para obtener el peso de Ricardo. Se busca en este primer apartado una comprensión del modelo que relaciona la altura y el peso. La ClassPad permite una visualización del modelo y sus herramientas algebraicas para resolver el problema. El apartado 2 se puede hacer mediante una tabla de valores, mediante una gráfica o simbólicamente.

- Modelar: comprender el modelo que relaciona el peso y la altura y aplicarlo para obtener valores particulares.

- Representar: hay que dibujar la gráfica de la función.
- Conectar: hay que comprender que una tabla de valores de la función puede ser suficiente para hallar el peso conociendo la altura y para decidir si la resta A(2p)–A(p) es o no constante.
- Argumentar y comunicar: hay que utilizar la tabla de valores para argumentar que la resta A(2p) – A(p) es constante.

## 7. Sube y baja

En la figura está representado el gráfico de la función f, de dominio $[0, 2\pi]$, definida por $f(x) = x + 2 \cos x$.




A y B son puntos del gráfico cuyas ordenadas son extremos relativos de f.

1) Sin recurrir a la calculadora, resuelve las siguientes cuestiones:

   1.1) Demuestra que la ordenada del punto A es $\dfrac{\pi + 6\sqrt{3}}{6}$

   y que la del punto B es $\dfrac{5 \cdot \pi + 6\sqrt{3}}{6}$

   1.2) ¿Cuál es el recorrido de f?

2) Considera la recta tangente a la gráfica de f en el punto A. Esta recta corta al gráfico en otro punto C. Recurriendo a la calculadora gráfica, determina un valor aproximado para la abcisa del punto C (presenta el resultado redondeando a las décimas). Explica cómo hacerlo (en la explicación debes incluir el gráfico, o gráficos, que consideres oportuno para resolver esta cuestión.

## *Resolución*

1) Como f/x)=x+2cosx $\rightarrow$ f'(x)=1–2senx=0 $\rightarrow$ sen x = 1/2 $\rightarrow$ x = $\pi$/6 ó x = 5$\pi$/6. Hay, por tanto, dos valores críticos. Por el criterio de la segunda derivada: f''(x)=–2cos x. Entonces: f''($\pi$/6)=–2cos ($\pi$/6)=–1.73<0 $\rightarrow$ x=$\pi$/6 es un máximo relativo (punto A) y

$$f(\pi/6)=\frac{\pi}{6}+2\cdot\cos(\frac{\pi}{6})=\frac{\pi}{6}+2\cdot\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}=\frac{\pi+6\sqrt{3}}{6}$$

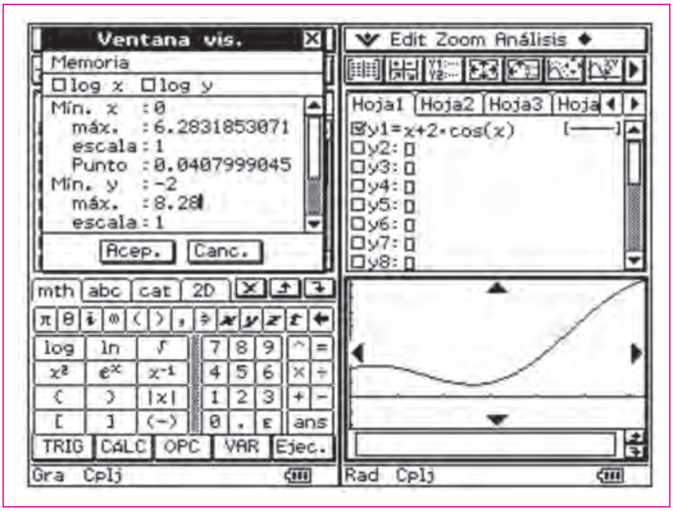
Por otra parte, f''(5$\pi$/6)=–2 cos(5$\pi$/6)=1.732>0 $\rightarrow$ x=5$\pi$/6 es un mínimo relativo (punto B) y

$$f(5\pi/6)=\frac{5\pi}{6}+2\cdot\cos(\frac{5\pi}{6})=\frac{5\pi}{6}-2\cdot\cos(\frac{\pi}{6})=\frac{5\pi}{6}-\sqrt{3}=\frac{5\pi-6\sqrt{3}}{6}$$

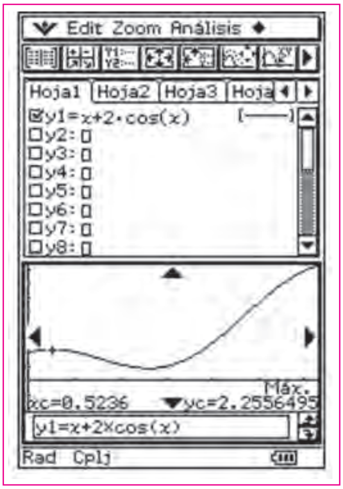
2) Introducimos la función en el menú Gráficos y tablas. Teniendo en cuenta que el dominio es [0, 2$\pi$] y que el recorrido de f es

$$\left[\frac{5\pi-6\sqrt{3}}{6},\ 2\pi+2\right]$$

consideramos la siguiente ventana de visualización:




El punto A es el máximo de la función. Configuramos la ClassPad para que muestre en pantalla el valor de la derivada de la función en cada punto. Para calcular el máximo, seleccionamos el comando **Análisis / Resolución gráfica / Max**, obteniendo:

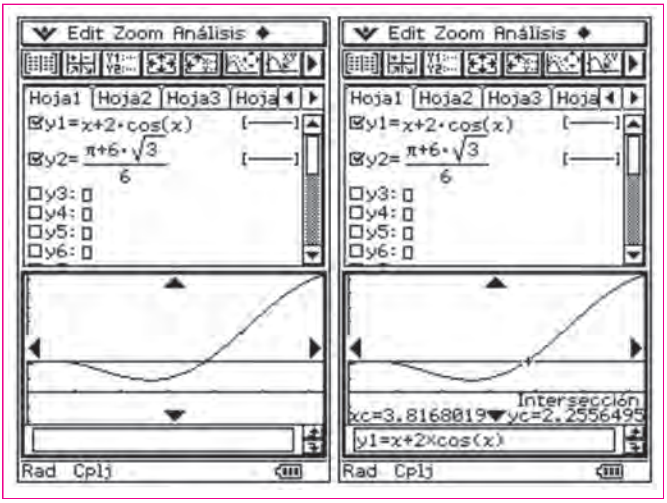



Las coordenadas (0.523599; 2.25565) representan al punto A (máximo de la función).

La recta tangente al gráfico de f en el punto A tiene por ecuación:

$$Y = \frac{\pi + 6\sqrt{3}}{6}$$

Editamos esta expresión en Y2. Para determinar la abcisa del punto C, recurrimos al comando **Análisis / Resolución gráfica / Intersección**




Concluimos así que las coordenadas del ponto C son, aproximadamente, (3.81; 2.25).

El valor aproximado a las décimas para la abcisa del punto C es 3,8.

## Competencias

En primer lugar hay que sustituir en la expresión algebraica para obtener el peso de Ricardo. Se busca en este primer apartado una comprensión del modelo que relaciona la altura y el peso. La ClassPad permite una visualización del modelo y sus herramientas algebraicas para resolver el problema. El apartado 2 se puede hacer mediante una tabla de valores, mediante una gráfica o simbólicamente:

- Modelar: comprender el modelo que relaciona el peso y la altura y aplicarlo para obtener valores particulares.
- Representar: hay que dibujar la gráfica de la función.
- Conectar: hay que comprender que una tabla de valores de la función puede ser suficiente para hallar el peso conociendo la altura y para decidir si la resta A(2p)-A(p) es o no constante.
- Argumentar y comunicar: hay que utilizar la tabla de valores para argumentar que la resta A(2p) – A(p) es constante.

## 8. Busca la tangente

De una función f, de dominio $[-\pi, \pi]$, sabemos que su derivada f’ está definida igualmente en el intervalo $[-\pi, \pi]$ y está dada por: $f'(x)=x+2\cos(x)$.

El gráfico de f contiene un único punto donde la recta tangente es paralela al eje OX. Utilizando la calculadora, determina un valor, redondeado a las centésimas, para la abcisa de ese punto. Explica cómo hacerlo.

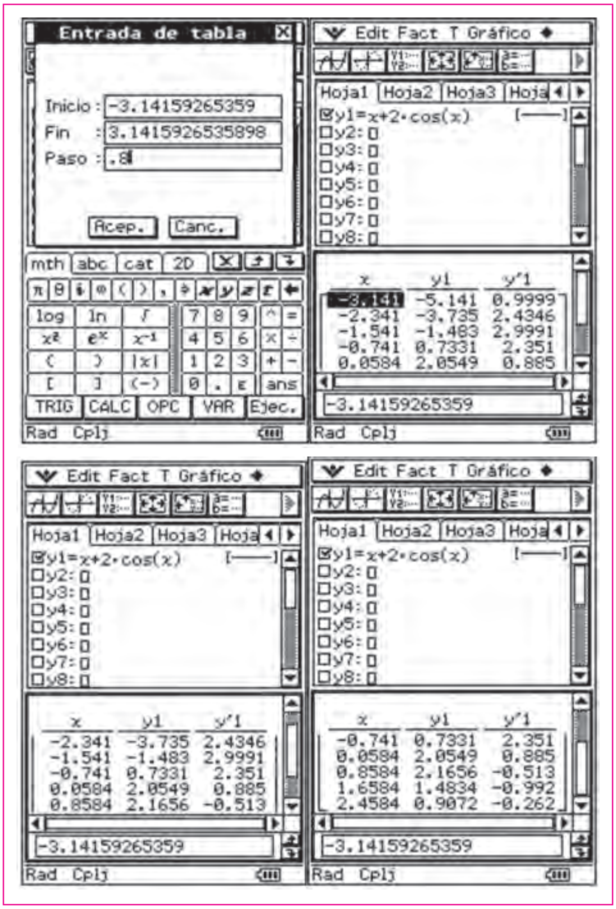
### *Resolución*

Para que una recta paralela al eje OX sea tangente al gráfico de f en un punto dado, la derivada de la función en ese punto debe ser 0.

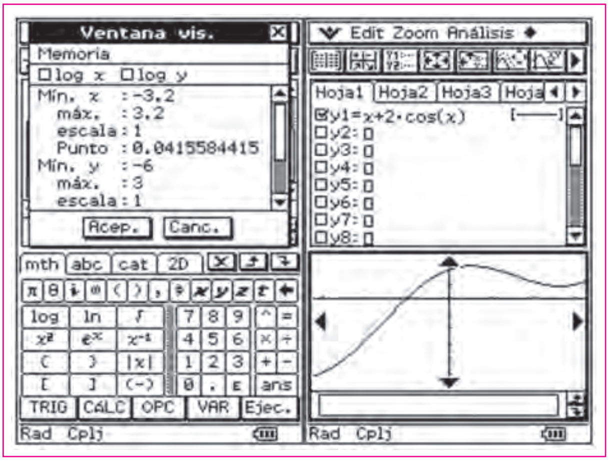
Introducimos la fórmula de la función f’ en el menú **Gráficos y tablas**. Previamente, configuramos la ClassPad para que los ángulos se expresen en radianes.

A continuación analizamos la evolución de la función f’ mediante una tabla de valores.

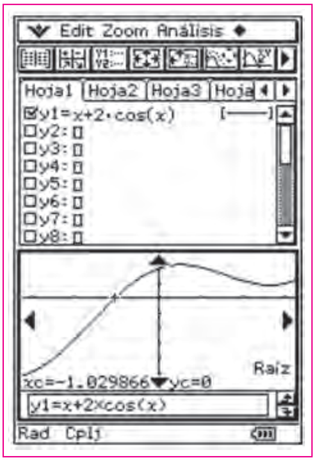

El intervalo de salida de la tabla será [–π, π].



Podemos observar que cuando el valor de x está comprendido entre –π y π, los respectivos valores de f'(x) están comprendidos entre –5,20 y 2,19. Teniendo en cuenta esta observación, podemos elegir la siguiente ventana de visualización:




Para determinar el cero de f', seleccionamos el comando **Análisis / Resolución gráfica / Raíz**, obteniendo el siguiente resultado:




Concluimos así que el cero de f' ocurre para x=–1,03, que es la abcisa del punto buscado.

## *Competencias*

En este problema hay que utilizar las propiedades de las derivadas, relacionándolas con la forma de la gráfica de la función. La ClassPad permite visualizar la gráfica, al mismo tiempo que podemos recorrer con el cursor ésta, obteniendo en cada punto sus coordenadas y también el valor de la derivada en cada punto. También se puede visualizar una tabla de valores, o usar comandos específicos de la calculadora para determinar el punto de corte de la gráfica con el eje OX.

- Modelar: en esta tarea no hay que modelar ninguna situación contextual.
- Representar: hay que dibujar la gráfica de la función.
- Conectar: hay que relacionar las propiedades de las derivadas con la gráfica de la función, conectando el hecho de tener derivada nula con el hecho de tener tangente horizontal.
- Pensar y razonar: hay que comprender y razonar porqué la pendiente de la recta tangente es la derivada de la función y porqué si la derivada es cero la recta tangente es horizontal.
- Argumentar y comunicar: hay que utilizar la tabla de valores o el gráfico de la función para argumentar que la derivada se anula cuando la recta tangente es horizontal y localizar el punto de tangencia.

## 9. Una inecuación

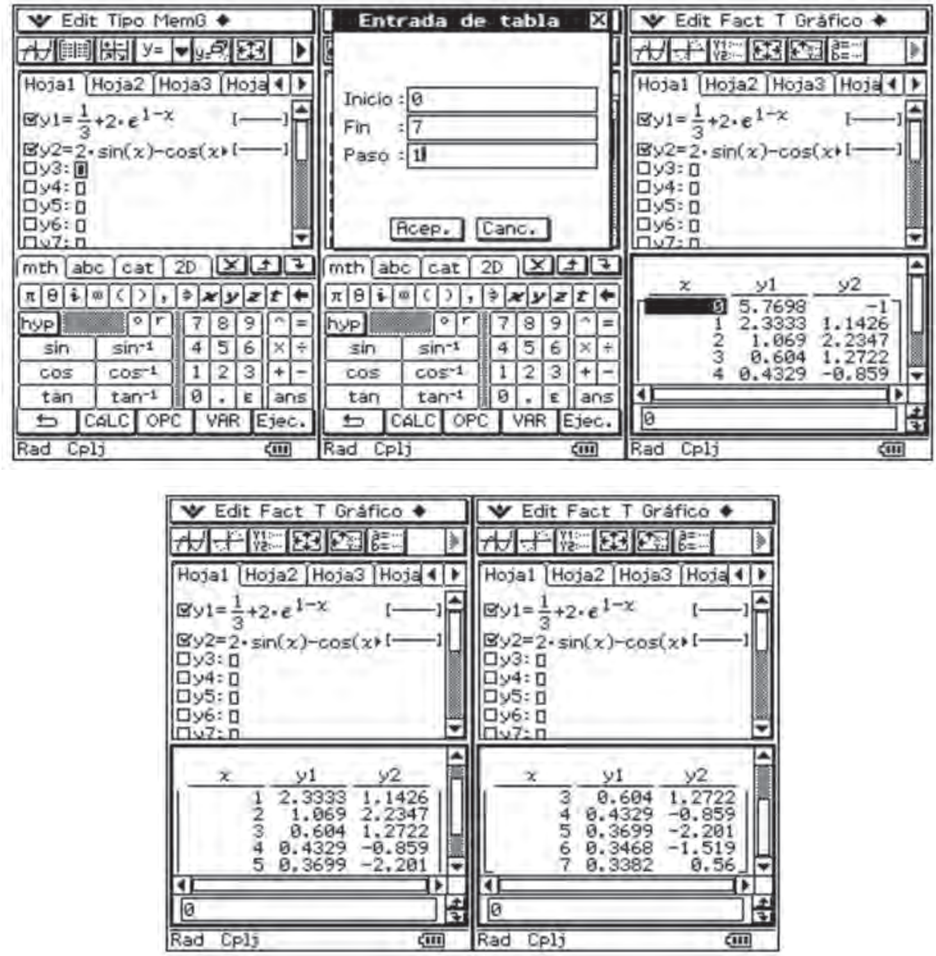
Considera las funciones f y g, de dominio R, definidas por:

$$f(x) = \frac{1}{3} + 2 \cdot e^{1-x} \qquad\qquad g(x) = 2 \text{ sen } x - \cos x$$

Utilizando la calculadora, determina las soluciones enteras de la inecuación $f(x)>g(x)$ en el intervalo $[0, 2\pi]$. Explica como lo haces.

### *Resolución 1*

En el menú **Gráficos y tablas**, introducimos las dos expresiones. Como se pretende determinar las soluciones enteras de la inecuación $f(x)>g(x)$ en el intervalo $[0, 2\pi]$, vamos a considerar valores de x comprendidos entre 0 y 7. De esa forma definimos los parámetros de salida de la tabla de valores:




Vemos que f(x) es mayor que g(x) para los valores enteros {0, 1, 4, 5, 6}.

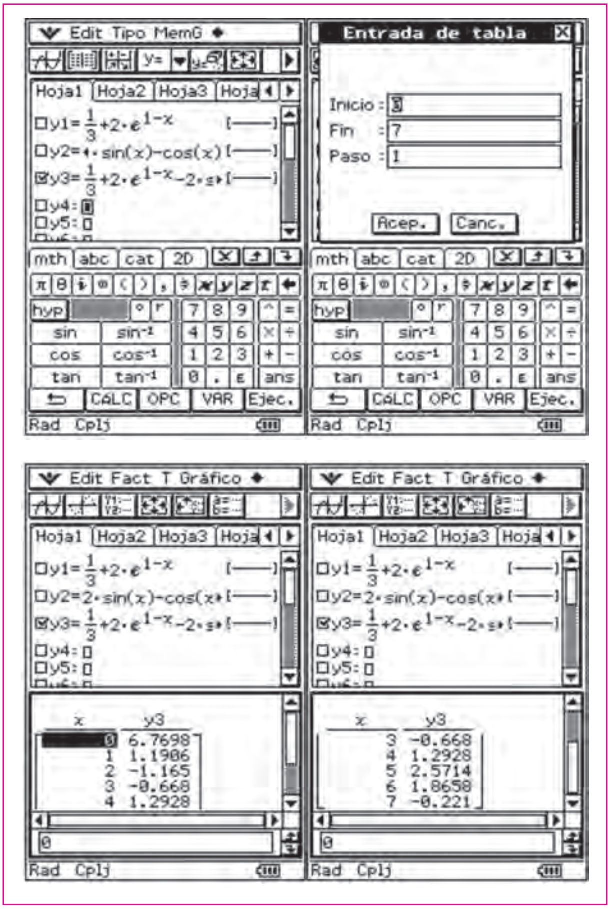
## *Resolución 2*

Se cumple que f(x)>g(x) es equivalente a f(x) – g(x)>0.

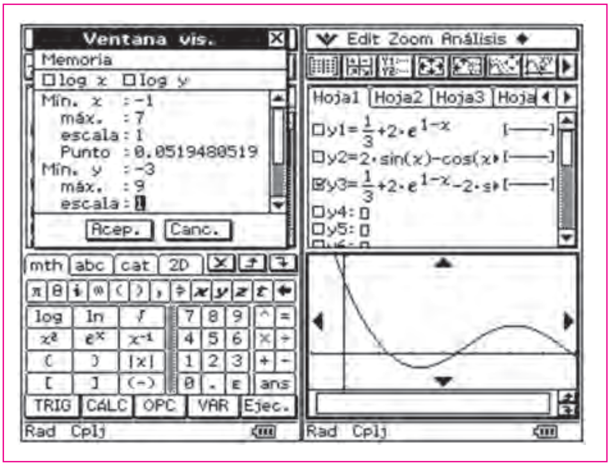
En el menú **Gráficos y tablas**, escribimos la expresión de las funciones f, g y f – g.

Desactivamos Y1 e Y2 y dejamos seleccionada Y3.

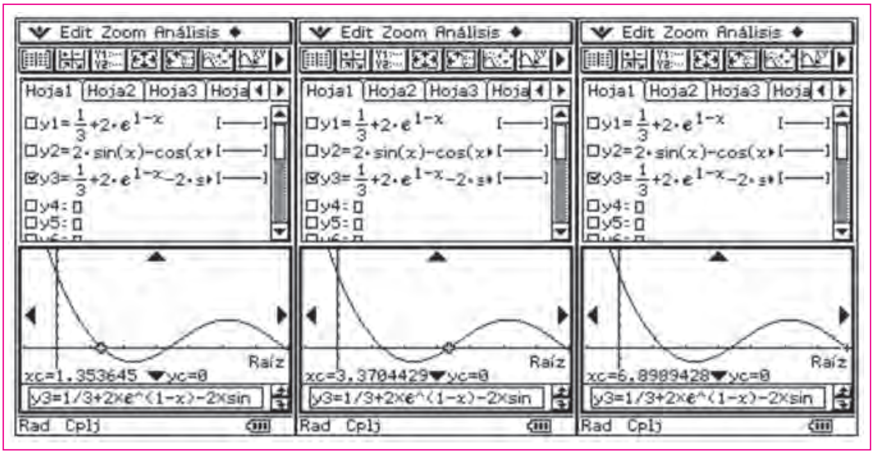
A continuación, visualizamos una tabla de valores de Y3, dando a x valores entre 0 y 7.




En esta tabla vemos que los valores de f(x) – g(x) están comprendidos entre –1,17 y 6,77. Teniendo en cuenta esta observación, definimos la siguiente ventana de visualización:



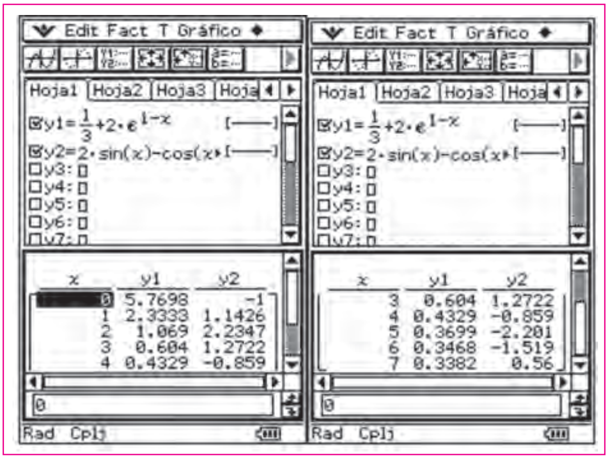
Seleccionamos el comando **Análisis / Resolución gráfica / Raíz** para hallar los ceros de la función f(x) – g(x).



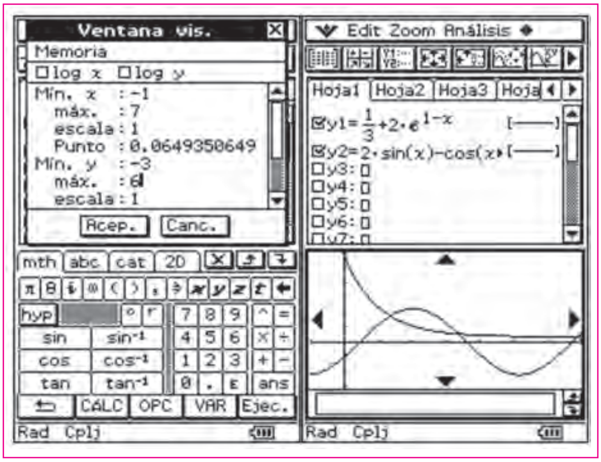

Vemos que los ceros de f – g son 1,35; 3,37; 6,89. Por lo tanto, la función f – g toma valores positivos en los intervalos [0; 1,35), (3,37; 2π). Por lo tanto, los valores enteros para los que f(x) – g(x) es positiva son: 0 y 1 en el intervalo [0; 1,35), y 4, 5 y 6 en el intervalo (3,37; 2π). Por tanto, las soluciones enteras de la inecuación son {0, 1, 4, 5, 6}.

## *Resolución 3*

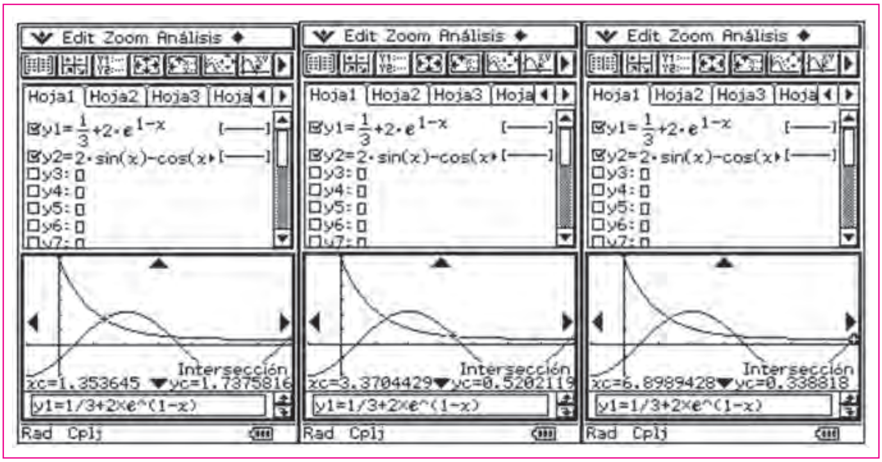
Escribimos las dos funciones en Y1 e Y2. Para proceder a la representación gráfica necesitamos determinar la mejor ventana de visualización. Para ello, analizaremos la evolución de los valores de las dos funciones, mediante una tabla de valores. La tabla la construimos entre 0 y 7, ya que el dominio de las funciones es el intervalo [0, 2π].




En la tabla observamos que los valores de f(x) están comprendidos entre 0,34 y 5,77 y los valores de g(x) están comprendidos entre –2,20 y 2,23. Teniendo en cuenta esta observación, seleccionamos la siguiente ventana de visualización:




A continuación, seleccionamos el comando **Análisis / Resolución gráfica / Intersección**, para hallar los puntos de corte de las dos funciones:




Vemos que los tres puntos de intersección se obtienen para x=1,35, x=3,37 y x=6.89. Vemos, además que entre x=1,35 y x=3,37, la gráfica de f(x) va por encima de la gráfica de g(x) y lo mismo ocurre si x>6.89. Por tanto, el conjunto de las soluciones enteras de la inecuación f(x)>g(x) en el intervalo [0, 2π] es {0, 1, 4, 5, 6}.

## *Competencias*

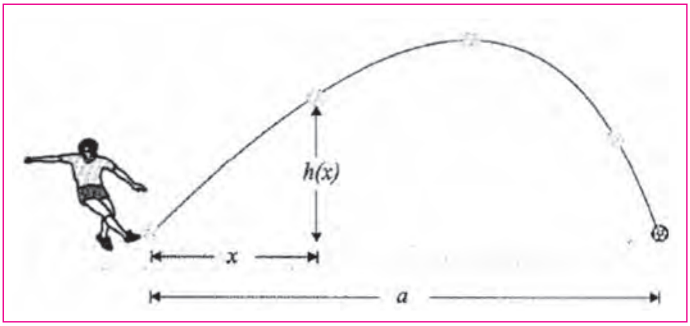
En este caso hay que resolver una inecuación en la que intervienen funciones irracionales transcendentes. La resolución algebraica con lápiz y papel es muy compleja; por ello, la calculadora CAS cumple un papel esencial, al acercar un contenido matemático difícil a un sector amplio de estudiantes, que si no fuera por la calculadora no podrían abordar la tarea. Para la resolución existen distintas estrategias: se puede construir una tabla de valores de cada función y compararlas, o bien se puede construir una tabla de valores de la función resta de ambas y estudiar su signo y comprobar el resultado visualizando la gráfica; o, simplemente, bastaría representar gráficamente ambas funciones y localizar el intervalo comprendido entre los puntos de intersección de ambas gráficas. La ClassPad permite hacer cualquiera de estas cosas, gracias a las opciones relativas a gráficos y tablas de valores.

- Modelar: en esta tarea no hay que modelar ninguna situación contextual.
- Representar: hay que dibujar la gráfica de las funciones o de la función resta de ambas y estudiar sus propiedades.
- Conectar: hay que relacionar el intervalo solución de la inecuación con el intervalo en el que una gráfica va por encima de la otra, cuyos extremos son puntos de corte de las dos gráficas. O relacionar el intervalo solución con el intervalo en el que la gráfica de la función resta está situada por encima del eje OX, cuyos extremos son los ceros de la función resta.

- Pensar y razonar: hay que comprender y razonar porqué existe solamente una cantidad finita de soluciones, siendo que las gráficas tienen infinitos puntos. Hay que comprender y razonar la existencia de restricciones de tipo numérico a la hora de resolver el problema y que, por tanto, la resolución gráfica conlleva inevitablemente soluciones extrañas que se deben eliminar.
- Argumentar y comunicar: hay que utilizar las tablas de valores o los gráficos de las funciones para argumentar que solamente hay una cantidad finita de soluciones enteras.

## 10. El balón de fútbol

En la figura está representada la trayectoria de un balón de fútbol después de haber sido golpeada por un jugador de la selección española, durante un encuentro de preparación para la EURO-2012.




Designamos por a la distancia, en metros, entre el punto donde el balón fue golpeado y el punto donde cae. Considera la función h definida en [0, a] por h(x)=2x+10 ln (1 – 0.1x).

Admitimos que h(x) es la distancia, en metros, del balón al suelo, en el momento en que su proyección sobre el suelo se encuentra a x metros del lugar donde fue golpeado.

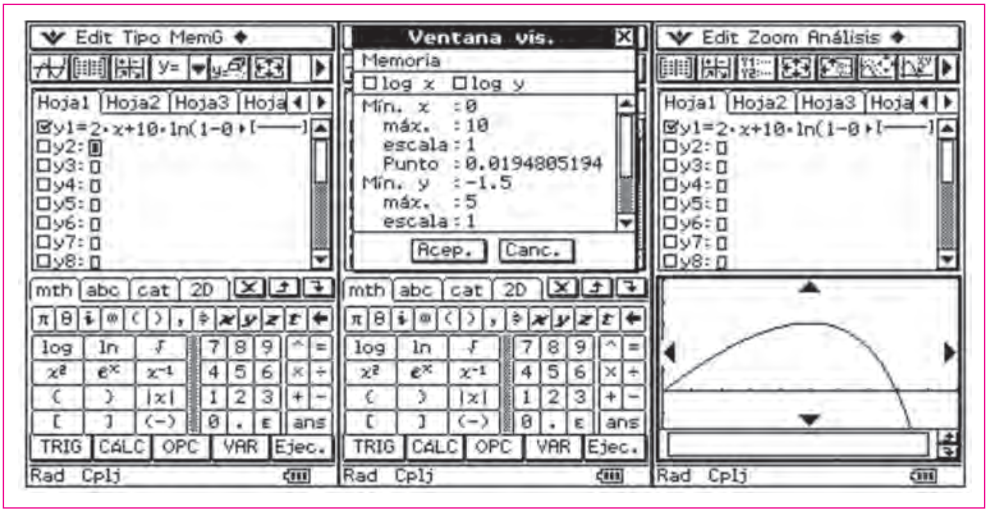
Utilizando la calculadora, determina el valor de a, redondeando a las décimas. Explica cómo lo haces, presentando todos los elementos obtenidos en la utilización de la calculadora.

### *Resolución*

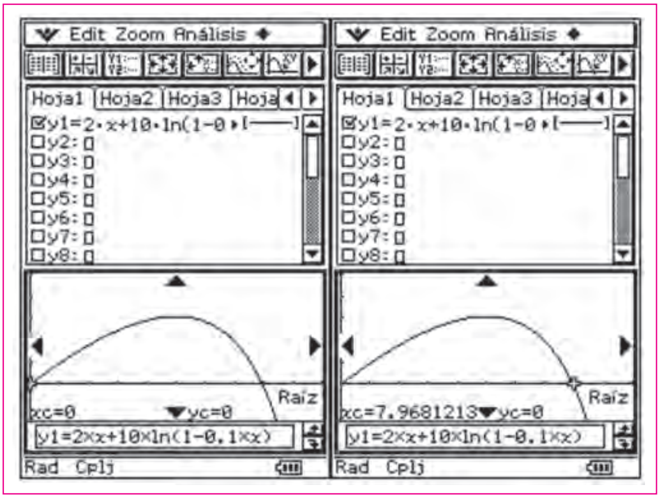
Se pretende encontrar la solución de la ecuación h(x)=0.

En el menú **Gráficos y tablas**, introducimos la fórmula de la función Y1 = 2x + 10 ln(1–0,1x).

Visualizamos la gráfica con la siguiente ventana de visualización:




Para calcular el cero de esta función, usamos el comando **Análisis / Resolución gráfica / Raíz**.




En el momento en que el balón fue lanzado, la altura a la que se encontraba del suelo era de cero metros. Lo mismo se verifica en el momento en que cae. Vemos que a = 7,97.

## *Competencias*

En este problema hay que hallar el cero de la función que da la altura del balón en cada instante. Este cero se puede obtener gráficamente, visualizando la función o mediante una resolución algebraica, la calculadora CAS permite hacer las dos cosas:

- Modelar: en esta tarea ya se da el modelo, por tanto, se trata de comprender el modelo, más que construirlo. Comprender el modelo significa interpretar el significado de la ecuación en relación con el contexto del problema.
- Representar: hay que dibujar la gráfica de la función que da la altura según el tiempo transcurrido.
- Conectar: hay que relacionar el punto de intersección con el eje OX con la solución del problema.
- Pensar y razonar: hay que comprender y razonar que, aunque la gráfica presenta una parte negativa para los valores de Y, más allá del punto de corte con OX, no tiene sentido que el balón esté situado por debajo del suelo. Por tanto, hay que comprender y razonar que el modelo tiene sus límites, separando del modelo matemático del problema real a resolver.
- Argumentar y comunicar: hay que utilizar el gráfico de la función para argumentar en qué momento el balón alcanza su máxima altura, qué altura alcanza, y en qué momento toca el suelo.

## CONCLUSIONES

En las diez actividades anteriores se ponen en acción algunas de las tareas que permiten desarrollar la competencia matemática: modelar, pensar y razonar, representar, argumentar, conectar, comunicar, plantear y resolver problemas. En algunas ocasiones estas acciones están implícitas en la tarea que se propone, en otras tareas surgen de manera natural, por el mero hecho de usar la calculadora CAS, y las habilidades que los estudiantes ponen en juego con ellas no se podrían activar con los métodos clásicos de lápiz y papel, especialmente por la carga algebraica que contienen los algoritmos habituales.

Con la ClassPad, la visualización de los problemas es inmediata, lo que favorece el tratamiento geométrico, disminuyendo la carga algebraica. De esta manera es posible acercar las matemáticas a los estudiantes, al evitar un amplio abanico de dificultades que se plantearían si no se usara la calculadora. Además, supone también una revolución metodológica, porque se puede abordar la resolución de problemas de varias maneras: aritmética (por ejemplo, mediante tablas de valores), gráfica (mediante la visualización de gráficas y figuras geométricas) y algebraica (mediante las funciones y comandos CAS).

Por tanto, el uso de la ClassPad supone un gran avance al permitir reflexionar sobre estrategias y contenidos que no se podrían tratar sin tecnología. Por ello, cualquier prohibición del uso de calculadoras supone una restricción en el aprendizaje de las matemáticas, significa cerrar la puerta a importantes contenidos matemáticos para muchos estudiantes. Más bien al contrario, debería favorecerse el uso de tecnologías en general y de la ClassPad en particular, para lograr una mejora en el desarrollo de la competencia matemática.

## BIBLIOGRAFÍA

GAVE, Gavinete de avallaçao educacional. (2007) *Teste intermédio de Matemática*. Ministerio da Educaçao. Portugal.

GAVE, Gavinete de avallaçao educacional. (2008) *Teste intermédio 11º ano Matemática B*. Ministerio da Educaçao. Portugal.

GAVE, Gavinete de avallaçao educacional. (2007) *Teste intermédio 10º ano Matemática A*. Ministerio da Educaçao. Portugal.

GAVE, Gavinete de avallaçao educacional. (2006) *Exame Nacional do Ensino Secundário*. Ministerio da Educaçao. Portugal.

GAVE, Gavinete de avallaçao educacional. (2004) *Teste intermédio de Matemática*. Ministerio da Educaçao. Portugal.

PISA 2003. *Pruebas de Matemáticas y de Solución de Problemas*. (2005). Madrid: MEC, INECSE, SUMA.

Contreras, M. (2006) *El currículum de Matemáticas con la ClassPad 300.* Valencia (España). Contreras, M (ed.). ISBN: 978-84-689-8709-5.

Contreras, M. (2004) *Matemáticas con la ClassPad 300: una alternativa dinámica. Curso de formación.* Página web de la División Didáctica CASIO en www.flamagas.com. 2004.

Páginas web: Aula Casio: www.aulacasio.com; Abel Martín: www.aulamatematica.com; Mauricio Contreras: www.mauriciocontreras.es.