Concepciones de los estudiantes de profesorado de matemática sobre la demostración

Virginia Montoro
Centro Regional Bariloche
Universidad Nacional del Comahue, Argentina

Resumen: *En el presente trabajo reseñaremos algunos de los resultados de una exploración de las concepciones de los estudiantes de profesorado de Matemática sobre la* demostración matemática. *Como base para esta investigación, se les propuso a los estudiantes, al comienzo de la asignatura Geometría Euclídea del Plano, tareas relacionadas con demostrar y se les entrevistó individualmente mediante preguntas abiertas.*

Se categorizaron las producciones de los estudiantes en cuanto a qué tipo de pruebas *realizaron cada uno de ellos al comienzo del estudio de la Geometría. Se analizaron las respuestas de estos estudiantes a algunas preguntas abiertas de la entrevista poniendo de manifiesto concepciones sobre el* aprendizaje *de la demostración matemática presentes en distintos grupos de estudiantes. Posteriormente se delinearon aspectos de las ideas de los estudiantes sobre* qué significa demostrar *en matemática, y si significa lo mismo en todas las ramas de esta ciencia y si esto es así en otras ciencias. Además de reseñar estos resultados, se establecen relaciones entre ellos y se dan conclusiones generales sobre las concepciones de los estudiantes de profesorado sobre la demostración matemática.*

Palabras clave: *Demostración; Profesores en formación; Matemáticas; Concepciones.*

Abstract: *The present paper reviews the results of an exploration of mathematics student teachers conceptions on mathematical proof. At the beginning of the "Euclidean Geometry of the Plane" course, students were asked to solve proof related problems and interviewed individually using open questions. Students´ solutions to the problems were categorized depending on what kind of proof each student used in this first approach to geometry. On the other hand, their answers to the questions in the interview were analyzed. Results highlighted conceptions on proof learning which are present in different groups of students. We outline different aspects of students´ ideas about what does it mean "to prove" in mathematics, and about whether it means the same in different areas of mathematics and in other sciences. Finally, we establish relationships among the results and we reach general conclusions regarding students´ conceptions on mathematical proof.*

Keywords: *Proof; Student teachers; Mathematics; Conceptions.*

INTRODUCCIÓN

La noción filosófica de *demostración*, desde la tradición platónico-aristotélica y hasta nuestros días, se relaciona con la derivación de un enunciado a partir de otros enunciados, llamados premisas, mediante la aplicación de determinadas leyes lógicas; en esta idea de demostración subyace siempre una búsqueda razonable de la verdad; sin embargo al término *demostración* se lo utiliza en los ámbitos sociales y profesionales más diversos y posee los mas diversos significados.

En matemática la idea de demostración y el verbo demostrar tienen una dimensión precisa y notable. Se diferencia claramente de procedimientos de verificación que se utilizan en otras áreas del saber como las ciencias experimentales, en donde las demostraciones se basan en la evidencia empírica de los hechos; o la economía, que se sustenta en la evidencia estadística de los resultados, o la historia, "demostrada" a través de evidencia de los datos y de los documentos. Al decir de Arsac (1987) la demostración es el procedimiento de validación que caracteriza la matemática respecto de las ciencias experimentales y así ocupa un lugar central desde el punto de vista epistemológico en esta disciplina.

En la literatura especializada aparecen definiciones *esenciales* de lo que se entiende por demostración de un teorema matemático: una sucesión de deducciones lógicas rigurosas desde alguna proposición ya aceptada hasta la que se pretende probar. Sin embargo no podemos soslayar que demostrar en matemática es una tarea cognitivamente compleja, no siempre tan diáfana como la redacción final de una demostración parece indicar; la denominada *demostración final* de un teorema es la culminación de un proceso, la presentación limpia y ordenada de una larga investigación nunca exenta de intuición, pruebas, errores, refinamientos, etc. (Polya,1954; Lakatos, 1976; Schoendfeld, 1992).

Consideramos a la demostración como esencial en el método matemático, y por lo tanto, un componente ineludible en la Educación Matemática y fundamentalmente en la formación de profesores; las pruebas están íntimamente conectadas con la construcción de las ideas matemáticas, demostrar debería ser una actividad tan natural como definir, representar o resolver problemas. Ahora bien, en el proceso de aprendizaje de la matemática, a la argumentación utilizada para *demostrar* una proposición, se la puede concebir bajo distintos aspectos, puede apareces con mayor o menor grado de explicitación y con distintos niveles de rigor; como un medio de autovalidar los conocimientos o como un contenido a aprender.

Respecto de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática encontramos los trabajos precursores de Polya (1954), Fischbein (1982), Balacheff (1987), Arsac (1992) y Duval (1991) que estudian situaciones de validación y prácticas argumentativas de los alumnos, las concepciones de verdad y falsedad y la tipología de pruebas que ellos producen. No podemos dejar de considerar los aportes (entre otros) de Dreyfus (1999), Godino y Martínez (1997, 2001), Martínez (2002), Ibáñez, (2002) y Sáenz (2002) que analizan los rasgos característicos del significado de la demostración en distintos contextos institucionales y las distintas dimensiones para este concepto como así también las dificultades con que se encuentran los estudiantes universitarios para producir demostraciones formales.

En el presente trabajo reseñaremos algunos de los resultados de la exploración de las concepciones de los estudiantes de profesorado de Matemática sobre la *demostración* realizada en el marco de dos proyectos de investigación: *La demostración en geometría en la formación de profesores* y *El aprendizaje de la demostración en geometría.* En estos proyectos nos propusimos como objetivo general el estudio del proceso de aprendizaje de la demostración por parte de estudiantes de Profesorado de Matemática en el contexto de problemas de Geometría y como objetivo particular, indagar acerca de las concepciones de estos estudiantes sobre la demostración matemática. Este trabajo tratará particularmente este último objetivo particular.

Como base para esta investigación, se les propuso a estudiantes del Profesorado de Matemática; al comienzo de la asignatura Geometría Euclídea del Plano, tareas relacionadas con *demostrar* y se los entrevistó individualmente mediante preguntas abiertas a fin de profundizar la indagación sobre sus concepciones sobre la demostración matemática.

En primera instancia se realizó una categorización de las producciones de los estudiante frente a las tareas de demostrar propuestas y se obtuvo información sobre *qué tipo de pruebas* realizaron cada uno de ellos al comienzo del estudio de la Geometría, para detalles puede verse Montoro (2005).

Si bien en el lenguaje matemático las palabras prueba y demostración se toman como sinónimos, en este trabajo; a fin de atender a toda la gama de argumentaciones que producen los estudiantes para justificar una aserción, optaremos por usar la palabra “prueba” en un sentido amplio, dado que el término “demostración” en Matemática que hace referencia a lo estrictamente formal. De este modo intentamos cubrir los distintos tipos de argumentaciones, desde los estadios más intuitivos a los estrictamente formales utilizando la palabra “prueba” para designa las distintas formas de realizar una argumentación que puede llevar a una justificación de lo que se está afirmando.

Con el fin de delinear aspectos de las concepciones de los estudiantes sobre *cómo se aprende a demostrar*, se analizaron las respuestas de estos estudiantes a algunas preguntas abiertas de la entrevista y mediante la interpretación del léxico utilizado se puso de manifiesto concepciones sobre el aprendizaje de la demostración matemática presentes en distintos grupos de estudiantes, ver detalles en Montoro (2007).

Es objetivo del presente artículo, además del ya propuesto de reseñar estos resultados, es encontrar relaciones entre ellos y dar conclusiones generales sobre las concepciones de los estudiantes de profesorado sobre la demostración matemática. También en esta línea, se analizaron otras preguntas de la entrevista y se delinearon aspectos de las ideas del los estudiantes sobre qué significa demostrar en matemáticas y si significa lo mismo en todas las ramas de esta ciencia y si esto es así en otras ciencias (Montoro, 2008).

METODOLOGÍA

Participantes

Participaron 13 estudiantes que cursaban la asignatura Geometría Euclídea del Plano del Profesorado de Matemática del Centro Regional Universitario Bariloche, de la Universidad Nacional del Comahue, Rep. Argentina. La asignatura citada corresponde al segundo año de estudios.

Las edades de estos estudiantes oscilaban entre 19 y 33 años, y en su totalidad habían cursado previamente las asignaturas Álgebra I y II; Cálculo I y II y Geometría Analítica; en éstas asignaturas trabajaron numerosas demostraciones y en la primera estudiaron elementos de lógica proposicional y métodos de demostración.

INSTRUMENTOS DE INDAGACIÓN

Se les propuso a los estudiantes; al comienzo de la asignatura Geometría Euclidea del Plano dos tareas para ser resueltas en forma individual por escrito y que se transcriben a continuación:

Tarea 1:

A continuación se presentan tres enunciados referidos a cuadriláteros:

- E1: Si un cuadrilátero es un rectángulo, entonces sus diagonales son congruentes.
- E2: Si las diagonales de un cuadrilátero son congruentes, entonces el cuadrilátero es un rectángulo.
- E3: Si las diagonales de un cuadrilátero no son congruentes, entonces el cuadrilátero no es un rectángulo.

Decir si E1, E2 y E3 son verdaderos o falsos, justificando cada respuesta.

Tarea 2:

Definición: Se llama mediatriz de un segmento a la recta perpendicular al mismo por el punto medio.

A continuación se enuncian tres propiedades relacionadas con la mediatriz de un segmento:

- *P1: Los puntos de la mediatriz de un segmento equidistan de los extremos del mismo.*

- *P2: Las mediatrices de los lados de un triángulo tienen un punto en común.*
- *P3: Todo triángulo se puede inscribir en una circunferencia.*

  - *3.a) Demostrar P1.*
  - *3.b) Justifica la siguiente afirmación: "P2 es verdadera".*
  - *3.c) A partir de P1 y P2 demostrar P3.*

Días más tarde se realizó una entrevista individual a cada uno de los participantes, con la presencia de una investigadora a cargo de la entrevista y otra observadora. En la que se lo consultó sobre el sentido de cada producción y además se le realizó las siguientes preguntas abiertas:

1. *¿Cómo piensas que se aprende a demostrar?*
2. *¿Qué consideras que te sirvió para aprender a demostrar?*
3. *¿Cómo hacías tus primeras demostraciones?*
4. *¿Y las actuales?*
5. *¿Cómo imaginas tus demostraciones después de recibido?*
6. *¿Cómo sabes cuando una demostración es correcta?*
7. *¿Consideras que demostrar es lo mismo en cualquier rama de la matemática?*
8. *¿Consideras que es lo mismo demostrar en matemática que en otras disciplinas?*

Las respuestas fueron orales y en forma de dialogo con la entrevistadora, que solo intervenía si era necesario aclarar algún aspecto; las respuestas fueron grabadas y luego trascriptas en su totalidad

METODOLOGÍA DE ANÁLISIS

Análisis del tipo de pruebas en tareas de demostrar (Tareas 1 y 2)

Para el análisis de las tareas 1 y 2 se realizó, en una primera etapa, una categorización de las producciones de los alumnos en cada uno de los ítems de las tareas, buscando en cada una de ellas indicadores que dieran cuenta del papel que se le asigna al ejemplo, la utilización de procedimientos propios de la matemática, el aporte de argumentos deductivos y de lenguaje simbólico.

Luego a cada producción se le asignó una categoría de *"tipo de prueba"* siguiendo la caracterización de Siñeriz y Ferraris (2005). En esta caracterización se denomina como pruebas *empíricas* aquellas que se sustentan en conocimientos prácticos que se captan a través de los sentidos y/o la acción; procedimientos de validación en los cuales se utilizan los ejemplos como elementos para convencer. Diferenciando según sea el papel del ejemplo en:

a) *Prueba ingenua* que consiste en extraer de la observación de un pequeño número de casos (en ocasiones sólo un caso) la certeza de verdad de una aserción.

b) *Prueba crucial* es aquella en la cual se usa un ejemplo cuidadosamente seleccionado por quien argumenta, tomado como representante de clase y finalmente.

c) *Prueba genérica* es un procedimiento de validación realizado mediante operaciones o transformaciones sobre un ejemplo.

Las pruebas *intelectuales* son aquellas que se componen de argumentaciones que implican propiedades y relaciones entre propiedades y su comunicación está caracterizada por el lenguaje matemático. Distinguiremos la experiencia mental y la deducción formal. En la *experiencia mental* se consideran ejemplos que no son tomados como elementos de convicción sino para ayudar a organizar la justificación o como soporte de la argumentación. Si bien los argumentos pueden ser informales, se sabe que con verificar en uno o varios casos no alcanza; hay conciencia de lo que falta, lo que lleva a producir otra clase de argumentos para convencer y por último en la *deducción formal* la justificación se basa en operaciones mentales sin recurrir necesariamente a la ayuda de ejemplos específicos. Se hacen inferencias en base al conocimiento de propiedades y definiciones, se realizan operaciones sintácticas con los enunciados que permiten trascender al ejemplo. La esencia de la justificación es la transformación de las expresiones simbólicas que se conectan en la argumentación (Siñeriz y Ferraris. 2005).

Con el propósito de evidenciar asociaciones entre las categorías asignadas a las pruebas ofrecidas por los estudiantes, como así también, agrupar a estos según sean similares los tipos de pruebas ofrecidos, aplicamos un Análisis Factorial de Correspondencias Múltiples (AFCM)[1] (Benzécri, 1973), método de análisis multivariado de datos especialmente diseñado para identificar asociaciones entre modos de respuestas de los/las participantes y agrupar a éstos según sus modos de respuesta. El AFCM fue aplicado a la tabla que cruza a los estudiantes y el tipo de prueba que producen éstos para cada ítems de cada una de las tareas 1 y 2, según la categorización citada.

Análisis de las concepciones de los estudiantes sobre el *aprendizaje de la demostración* (Preguntas abiertas 1 a 6)

Con el fin de delinear aspectos de las concepciones de los estudiantes sobre el *aprendizaje* de la demostración matemática, se analizaron las seis primeras preguntas abiertas enunciadas mas arriba. Se confeccionó una base de datos donde

1. Si bien el AFCM es un método especialmente útil para grandes matrices de datos; nada hay en su fundamentación que impida aplicarlo para pocos individuos; es utilizado aquí para evidenciar relaciones entre los modos de respuestas de los estudiantes, que de otra manera hubiesen sido muy difíciles de sacar a la luz y que pueden ser constatadas luego en los datos.

se asoció a cada estudiante sus respuestas literales; como así también su edad, el avance en la carrera y finalmente el tipo de pruebas producidas en las tareas 1 y 2.

Se utilizó una metodología de análisis que permite evidenciar similitudes y diferencias entre las respuestas de los distintos grupos de estudiantes y mediante la interpretación del léxico utilizado poner de manifiesto posibles concepciones presentes en distintos grupos de estudiantes. Se utilizó para ello el análisis lexicográfíco del corpus de respuestas respecto de las formas léxicas utilizadas por los estudiantes; de los segmentos repetidos y luego una análisis factorial de la tabla léxica agregada, que es aquella que cruza los grupos de individuos (según sea el tipo de pruebas que producen) con las formas léxicas utilizadas.

Con el propósito de descubrir ideas diferenciadas presentes en el corpus como así también tipos de respuestas y su relación con los tipos de pruebas que producen los estudiantes; se realizaron 3 análisis lexicográficos. El primer análisis corresponde a las respuestas de las preguntas: 1 y 2 que entendemos indagan sobre *cómo se aprende a demostrar*; el segundo análisis corresponde a las preguntas 3 y 4 que lo hacen sobre *qué cambia al aprender a demostrar* y por último el de las respuestas a las preguntas 5 y 6 que indagan sobre: *cómo es una demostración correcta*. A modo ilustrativo se las relacionó también con la edad y al avance en la carrera de los estudiantes. Para mayor detalle en la aplicación del análisis lexicográfico puede consultarse a Béncue (1991) y Lebart y otros (1995).

Para cada uno de estos análisis se realizó, además, una clasificación de las palabras (o grupo de palabras) utilizadas en las respuestas según estuviesen presentes en las mismas repuestas y su correspondiente asociación con alguno de los grupos de *tipos de pruebas*. Esta clasificación se realizó con el método de *clasificación jerárquica ascendente* (Ward, 1963) previo análisis factorial de correspondencias.

Análisis de las concepciones de los estudiantes sobre qué significa demostrar en matemática y en otras ciencias (Preguntas abiertas 7 y 8)

Con el propósito de delinear aspectos de las concepciones de los estudiantes sobre *qué significa demostrar* en matemática, como así también sobre posibles relaciones de estas concepciones con el tipo de pruebas que producen los estudiantes al comienzo del estudio de la Geometría, se realizó el análisis de las producciones de los participantes para las preguntas 7 y 8 según la siguiente secuencia; en una primera etapa y con el fin de sistematizar los datos primarios, se categorizaron las respuestas según los argumentos esgrimidos por los estudiantes para justificar su respuesta afirmativa o negativa a las preguntas. Luego con el propósito de evidenciar cuan similares o diferentes pueden ser las respuestas de los distintos estudiantes, como así también asociaciones entre las respuestas dadas a estas preguntas y posibles relaciones de estas con las pruebas que estos estudiantes producen aplicamos un Análisis Factorial de Correspondencias Múltiples (AFCM) (Benzécri, 1973), método de análisis multivariado de datos diseñado para identificar asociaciones entre modos de respuestas de los participantes y agrupar a éstos según sus modos de respuesta.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Del tipo de pruebas en tareas de *demostrar* (Tareas 1 y 2)

Respecto al tipo de pruebas producidas por los estudiante en las tareas 1 y 2 presentamos una tabla a continuación donde se muestra para cada estudiante, la edad, el avance en la carrera y el tipo de pruebas que produjeron en general (según las asociaciones explicitadas por el AFCM realizado) en las tareas 1 y 2.

La categoría que se le asignó a cada estudiante, responde al tipo de prueba que predomina en sus producciones ya que se observa que estos estudiantes suelen dar distintos tipos de prueba en los distintos ítems de una misma tarea. Entre los alumnos que dan pruebas intelectuales, vemos mayormente un cambio en el item 2b (contraejemplo) es decir que cuando tienen que "mostrar" un ejemplo que no cumple la proposición, tienden a satisfacerse con pruebas de un estatus menor que el formal, sin embargo los alumnos que tienden a dar pruebas experimentales repiten el tipo de prueba con el contraejemplo.

Tabla 1: se muestra para cada estudiante, la edad, el avance en la carrera y el tipo de pruebas que produjeron en general en las tareas 1 y 2.

	Edad	Avance en la carrera	Tipo de prueba
E1	Mas de 25	Avanzado	Experiencia Mental
E2	22-24	Medio	Formales
E3	19-21	Medio	Empíricas Genérica-Crucial
E4	19-21	Medio	Experiencia Mental
E5	Mas de 25	Medio	Empíricas Genérica-Crucial
E6	22-24	Medio	Formales
E7	19-21	Medio	Experiencia Mental
E8	19-21	Menor	Ingenuas
E9	19-21	Medio	Ingenuas
E10	19-21	Medio	Formales
E11	19-21	Medio	Ingenuas- Crucial
E12	19-21	Medio	Ingenuas
E13	22-24	Avanzado	Ingenuas

Concepciones de los estudiantes sobre el *aprendizaje de la demostración.* Las seis primeras preguntas abiertas de la entrevista

Resaltamos los aspectos comunes de las ideas diferenciadas en los tres análisis de las seis primeras preguntas (agrupadas de a 2) como componentes de la idea que poseen estos estudiantes respecto de *aprender a demostrar*; a saber:

- una teoría de demostrar; lógica, métodos de demostración
- de lo que partes; lo que te dan
- las herramientas, el cómo; lo que se usa, la trampita
- la fundamentación, justificar cada paso
- la conclusión, a lo que tienes que llegar

Estos distintos aspectos que se presentan como relevantes para los estudiantes a la hora de aprender a demostrar no están presentes en todas las respuestas, por el contrario vemos que hay grupos de estudiantes que se centran sólo en uno de ellos.

En cuanto a las concepciones de los estudiantes sobre el aprendizaje de la demostración que surgen del análisis de las 6 primeras preguntas de la entrevista y las relaciones de estas concepciones con el tipo de pruebas que producen cada uno de los participantes al comienzo del estudio de la Geometría; encontramos principalmente tres grupos de ideas:

- *se aprende una teoría de demostrar;* como podría ser aprender los métodos de demostración o estudiar lógica; relacionadas con estudiantes de menor edad y menor avance en la carrera y que producen mayormente pruebas ingenuas,
- *se aprende a demostrar entendiendo demostraciones bien presentadas,* consideran que pueden aprender comprendiendo los razonamientos de otros (profesor-libros), es decir suponen que pueden aprender de "ejemplos" de demostraciones y son estudiantes que producen principalmente pruebas de ejemplo genéricos o de ejemplo crucial, cuya principal característica es la de basarse en un ejemplo representativo,
- *a demostrar se aprende demostrando*; consideran que se aprende a demostrar haciendo sus propias demostraciones, idea asociada a los estudiantes de mediana edad, avanzados en la carrera y que producen mayoritariamente pruebas formales.

En cuanto a lo que estos estudiantes consideran como una demostración correcta podemos diferenciar tres grupos de ideas:

- *una buena demostración es la que llega a la conclusión*, sin embargo no nos dice nada de cómo llegar y bajo que condiciones: asociadas mayormente a estudiantes que dan pruebas ingenuas,

- *una demostración es correcta, cuando se tienen la seguridad de que es así*; parecieran confiar en sus propias argumentaciones, es un seguridad subjetiva. Este grupo está asociado a la última etapa de las pruebas empíricas y a la de experiencia mental,
- *la corrección de una demostración se centra en la justificación de cada paso*, asociada a los estudiantes que producen pruebas formales.

Concepciones de los estudiantes sobre qué significa demostrar en matemática y en otras ciencias. Preguntas abiertas 7 y 8

Se pudo establecer una tipología de los estudiantes, en relación a las posibles ideas sobre el significado de la demostración en matemática y sobre la diferencia entre lo que significa demostrar en distintas ramas de la matemática y en otras disciplinas, en tres clases, realizándose una caracterización de cada una de estas clases:

- *En otras disciplinas es aproximado*. Clase conformada por: E2; E3; E4; E5 y E6.

  Podríamos caracterizarla por la respuesta: *en otras disciplinas demostrar es aproximado, no formal; en matemática demostrar es decir porqué y la diferencia de la demostración en distintas ramas de la matemática esta dada por el grado de formalidad.*

- *En otras disciplinas es empírico.* Clase conformada por: E1; E8; E9 y E13.

  Podríamos caracterizarla por la respuesta: *en otras disciplinas demostrar es evidenciar experimentalmente y en las distintas ramas de la matemática, demostrar es distinto en cuanto a la formalidad.*

- *Una demostración es una secuencia*: Clase conformada por: E7, E10, E11 y E12.

  Puede caracterizarse por la respuesta: e*n matemática la demostración es una secuencia y en todas las ramas es lo mismo (una secuencia) y en cualquier disciplina es lo mismo, es una secuencia. La demostración como una secuencia (partir - desarrollar - llegar).*

No hay una asociación clara entre los grupos de estudiantes según sus tipos de respuestas y los tipos de pruebas que producen. Sin embargo es notable que en el primer grupo no hay ningún estudiante de los que producen pruebas ingenuas; estos están repartidos entre los dos últimos grupos.

CONCLUSIONES

Un grupo importante de estos estudiantes ofrecen pruebas empíricas al comenzar el estudio de la geometría, incluso muchas pruebas ingenuas, a pesar de haber cursado ya materias donde se ha visto a la demostración como un contenido específico.

Nos parece relevante resaltar los aspectos que los estudiantes destacan como importantes al momento de aprender a demostrar: aprender una teoría de demostrar; aprender lógica, métodos de demostración (particularmente el método por el absurdo); prestar atención a las hipótesis (lo que conozco, lo que ya sé, lo que me dan); tener en cuenta los axiomas; utilizar gráficos y figuras; aprender a fundamentar, a justificar; aprender a analizar (desarmar), a sintetizar (saber a donde llego) y a formalizar (necesidad de escribir).

En las respuestas de los estudiantes que producen pruebas formales encontramos presentes todos los aspectos citados en el párrafo anterior, es decir que su concepción de la demostración matemática es más rica que en los otros casos; consideran que se aprende a demostrar *demostrando*; haciendo muchas demostraciones; es decir la conciben como un procedimiento; un hacer; una habilidad que se adquiere relacionado con los contenidos y desarrollándola concretamente. Los estudiantes que producen pruebas ingenuas; están asociados principalmente al aspecto de *aprender una teoría de demostrar*; lo que nos hace pensar en cierta desconexión entre la valorización específica que hacen de aprender lógica por ejemplo (quizás sin relación a un contenido especifico) y las pruebas que producen estos estudiantes frente a una tarea de demostrar específica.

Podemos describir un gradiente, en cuanto a lo que consideran los estudiantes respecto a *cómo se aprende a demostrar*; entre la teoría de demostrar hacia la practica de demostrar. Desde los estudiantes que consideran que se aprende a demostrar, aprendiendo una *teoría de demostrar* y que producen pruebas ingenuas –es decir las pruebas más alejadas de una demostración matemática–; luego aquellos que consideran que pueden aprender con demostraciones bien presentadas, entendiendo los razonamientos de otros –profesor, libros–, es decir consideran que pueden aprender de "ejemplos" y que principalmente son estudiantes que producen pruebas genéricas o de ejemplo crucial, cuya principal característica es la de basarse en un ejemplo representativo; por último los estudiantes que consideran que se aprende a demostrar *demostrando;* haciendo sus propias demostraciones, idea que se asocia a los estudiantes de mediana edad, avanzados en la carrera (es decir que hacen la carrera en el tiempo estipulado) y que producen pruebas formales, esto es pruebas que podrían considerarse demostraciones matemáticas.

En cuanto a lo que estos estudiantes consideran como una demostración correcta; un grupo se centra en que una *buena demostración es la que llega a la conclusión*, sin embargo no nos dice nada de cómo llegar y bajo que condiciones, se trata de un grupo de respuestas asociadas mayormente a estudiantes que dan pruebas ingenuas. Otro grupo de estudiantes considera que una demostración es correcta cuando tienen *la seguridad de que es así*; parecieran confiar en sus propias argumentaciones, este grupo está asociado a la última etapa de las pruebas empíricas y a la de experiencia mental; justamente las etapas en que comienzan las argumentaciones deductivas, aunque posiblemente en leguaje coloquial no formalizado. Por otra parte los estudiantes que producen pruebas formales, centran la corrección de una demostración mayormente en la *justificación de cada paso.*

Profundizando en el sentido de si conciben a la demostración matemática como distinta según el dominio de conocimiento dentro de la matemática –en álgebra, en geometría o en análisis matemático– podemos concluir que la mayoría de los estudiantes que consideran que *es lo mismo demostrar en cualquier rama de la matemática,* describen a la demostración matemática como partir de algo (hipótesis, axiomas, lo que te dan) y luego mediante algún proceso (secuencia lógica, hacer algo, desarrollando) llegas a algo (concluir, llegar), es decir una secuencia: partir - desarrollar - llegar. En cambio de los que opinan que demostrar *es distinto en las distintas ramas de la matemática* centran esta diferencia en el grado de simbolismo, formalidad, lo estricto del álgebra versus lo aproximado, con números o dibujos y no formalidad del cálculo y la geometría. Hay un grupo de estudiantes que consideran que demostrar en todas las ramas de la matemática es decir porqué; sin embargo en algunas ramas es más formal (álgebra) que en otras (geometría y cálculo).

En cuanto a lo que consideran estos estudiantes respecto a *si demostrar significa lo mismo en otras disciplinas que en matemática* podemos describir tres grupos de estudiantes bien diferenciados: los que piensan que al igual que en matemática demostrar en cualquier disciplina es una secuencia partir - desarrollar - llegar; otro grupo que piensa que no es lo mismo dado que en otras disciplinas se demuestra *experimentalmente*, con datos y el tercer grupo que considera que en otras disciplinas se demuestra de manera no formal, aproximada.

El grupo de estudiantes que opina que tanto en matemática como en otras disciplinas demostrar es una secuencia lógica; equipara esta secuencia al método de otras disciplinas, esto junto con el dato de que la que la mayoría de ellos producen pruebas ingenuas enfrentados a la tarea de demostrar; nos hace preguntarnos sobre las características que tiene para estos estudiantes esa secuencia en matemática.

Este último hecho nos remite a la conclusión anterior de que en general los estudiantes que brindan pruebas ingenuas consideran que se aprende a demostrar estudiando una teoría de la demostración y que éstas serán correctas cuando se llega a *lo que hay que llegar* sin saber muy bien cómo fue este proceso; se podría pensar en esto como una suerte de *idealización* que realizan en cuanto a las demostraciones; ya que estos mismos estudiantes cuando se enfrentan a la tarea de demostrar, se limitan a “mostrar” un caso donde “evidentemente” es cierta la proposición, sin sentir la necesidad de deducir; de producir un argumento lógico que valide la veracidad de la implicación. Lo que nos lleva a la reflexión de que conocer una “teoría” de la demostración no garantiza un aprendizaje de la demostración y que desarrollar contenidos de lógica en las asignaturas no garantiza éste, sino que debiera ser un procedimiento presente en toda la formación del estudiante de matemática; a fin de que pueda éste interiorizarlo como parte inseparable del método Matemático.

Volviendo a la notable diferenciación que hacen estos estudiantes entre la demostración en álgebra, más formal y rigurosa y la demostración en geometría o cálculo, considerándola en estas ramas de la matemática como aproximada, que se puede hacer con ejemplos y no tan formal, pensamos que estas diferencias tienen que ver con su experiencia en las distintas asignaturas cursadas, lo que nos lleva a reflexionar sobre la coherencia en la formación de los futuros profesores, en cuanto a su formación específica en los procedimientos propios de la matemática. En cuanto a esta desconexión entre las asignaturas que cursan nuestros alumnos, nos lleva a plantearnos la necesidad de evidenciar la postura epistemológica de los distintos formadores de formadores.

Otro aspecto a destacar es que las repuestas de un grupo de estudiantes parecieran estar centradas más en la "tarea" que implica demostrar en general, que con validar conocimientos en relación a contenidos matemáticos específicos (conceptos - propiedades) implicados en las demostraciones. Es notable que en general no aparezca la demostración matemática como un medio para validar o convencerse de la verdad de una proposición, sino como un contenido dentro de las asignaturas. El aprender a demostrar aparece, más bien, relacionado con resolver la tarea de demostrar que se le plantea desde el exterior y no como una necesidad de validar los conocimientos. Es posible que estos aspecto no se hayan manifestado debido a la forma de indagación, ya que las preguntas que les realizamos están dirigidas hacia la demostración en general; pero se nos plantea aquí la posibilidad de buscar medios de indagación al respecto; es decir buscar un modo de sacar a la luz cómo se concibe a la demostración, si como una meta propuesta por las cátedras o un modo de validar una proposición o de convencerse de los conocimientos. Queda planteada esta posibilidad para seguir investigando porque de tratarse de una concepción arraigada, se convertiría en un obstáculo, muy importante para el aprendizaje de la matemática.

A modo de cierre diremos que las concepciones sobre la demostración de los futuros profesores de matemática distan de ser simples y uniformes y es un punto importante a tener en cuenta por los interesados en la formación de los futuros docentes de matemática. Reconocer esta multiplicidad de significados y componentes nos sitúa en mejores condiciones para estudiar su evolución en el aprendizaje de los estudiantes y para colaborar en el aprendizaje de este procedimiento esencial del método matemático. Es nuestra tarea como formadores de profesores de matemática mediar para que nuestros estudiantes posean un marco conceptual sólido en matemática y para ello deberemos prestar especial atención al proceso de aprendizaje de la demostración.

Agradecimientos: La presente investigación se ha realizado en el marco de dos proyectos de investigación avalados y subsidiados por la secretaría de Investigación de la Universidad Nacional del Comahue (Argentina): *La demostración en geometría en la formación de profesores,* PI 04B105 y *El aprendizaje de la demostración en geometría,* PI 04B134.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alsina, C. (2003). C. D. Q. Como quisiéramos demostrar. *Epsilon,* 57, 345-356.

Arsac, G. (1987). El origen de la demostración: ensayo de epistemología didáctica. *Recherches en didactique des mathematiques, 8*(3), 267-312.

Balacheff, N. (1987). Processus de pruebe et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics, 18,* 147-176.

Balacheff, N. (1990). Beyond a psychological approach: the psychology of mathematics education. *Learning of Mathematics, 10*(3), 2-8.

Béncue, M. (1991). *Análisis de datos textuales. Metodos estadísticos y algorímos.* Paris: CISIA.

Benzecri, J. P. (1973). *Practique de l'analyse des données*. Tomo 3: Linguistique et lexicologie. París: Dunod.

Carretero, M. (1997). *Introducción a la Psicología cognitiva*. Colección: Psicología Cognitiva y Educación. Buenos Aires: AIQUE.

Dreyfus, T. (1999). Johnny can't prove. *Educational Studies in Mathematics, 38*, 85-109.

Duval, R. (1991). Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la demostration. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 233-261.

Fischbein, E. (1982). Intuition an Proof. *For the learning of Mathematics, 3*(2), 9-24.

Godino, J. D. y Martínez, A. (1997). Significado de la demostración en educación matemática. *PME XXI,* Vol. 2, pp. 313-320. Lahti: PME.

Godino, J. D. y Martínez, A. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la Educación Matemática. *Enseñanza de las Ciencias 19*(3), 405-414.

Ibáñez, M. J. (2002). Cuatro cuestiones en torno al aprendizaje de la demostración. En M. F. Moreno, F. Gil, M. Socas y J. D. Godino (Eds): *Investigación en Educación Matemática. Quinto Simposio de la sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (Pp. 11-26). Almeria: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Almería.

Lakatos, I. (1978). *Pruebas y refutaciones*. Madrid: Alianza.

Lebart, L., Morineau, A. y Fénelon, J. (1979). *Traitement de Donnés Statistiques*. París: Dunod.

Lebart, L., Morineau, A. y Piron, M. (1995). *Statistique Exploratoire Multidimensionnelle.* París: Dunod.

Martínez, A. (2002). La demostración en matemática. Una aproximación epistemológica y didáctica. En M. F. Moreno, F. Gil, M. Socas y J. D. Godino (Eds): *Investigación en Educación Matemática. Quinto Simposio de la sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (Pp 29-43). Almeria: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Almería.

Montoro, V. y Juan, M. T. (2005). Demostrar... demostrar... ¿ Qué es eso? Modo de indagación sobre las concepciones de estudiantes de profesorado acerca de la demostración en geometría. *Memorias del VII Simposio de Educación Matemática Chivilcoy*.

Montoro, V. (2005). Explorando la producción de los estudiantes de profesorado en cuanto a la demostración en geometría euclídea. *Resumen en Actas* XXVIII Salta: REM-UMA.

Montoro, V. (2007). Concepciones de estudiantes de profesorado acerca del aprendizaje de la demostración. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias, 2*(1), 101-121.

Polya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid: Tecnos.

Sáenz, C. (2002). Sobre conjeturas y demostraciones en la enseñanza de las matemáticas. En M. F. Moreno, F. Gil, M. Socas y J. D. Godino (Eds): *Investigación en Educación Matemática. Quinto Simposio de la sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (Pp 47-62). Almeria: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Almería.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. En *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, NTCS (Pp.* 334-370). Berkeley: Macmillan Publishing Company.

Siñeriz, L. y Ferraris, C. (2005). Tipos de prueba: una de las categorías de un Modelo Teórico del proceso de aprendizaje de la demostración en geometría. *Memorias del VII Simposio de Educación Matemática Chivilcoy*, Vol. XII.

Ward, J. (1963). Hierarchical grouping to optimize an objective function. *Journal American Statistic Association, 58*, 236-244.