Epsilón - *Revista de Educación Matemática* *2010, Vol. 27(2), nº 75, pp. 101-106*

Podemos introducir a los estudiantes en la investigación en matemáticas desde niveles educativos bajos. Un ejemplo

Francisco Moreno Soto
I.E.S.O. "Cuatro de Abril". Zahinos.

INTRODUCCIÓN

Las condiciones de la educación han cambiado en la recién constituida sociedad de la información, produciendo un desajuste en la misma, tradicionalmente conservadora de los objetivos, contenidos y métodos, al disociar el mundo de los intereses de los alumnos y de la sociedad de los procesos educativos realizados en las aulas. Este desajuste se va ahondando cada vez con más rapidez y profundidad por este retraso en la adaptación en la educación, adaptación que debería lograr el mismo nivel que en otras actividades humanas. En este proceso cabe interrogarse sobre qué cambios en los objetivos, contenidos y secuenciación pueden producir beneficio en los procesos de aprendizaje (Cabezas y Roanes, 2000).

Por otra parte, la matematización de todas las ciencias, incluidas las llamadas humanas y sociales entre las que podemos incluir la Economía, plantea problemas en los estudios al afectar a alumnos que pueden tener dificultades, por diversas razones, para construir "el edificio" matemático necesario en su formación.

Por todo ello, debemos plantearnos un nuevo enfoque en la educación matemática, dirigido hacia la investigación y el descubrimiento, con el fin de dar una respuesta eficaz a los problemas señalados anteriormente.

En este trabajo presentamos un ejemplo de cómo llevar a la práctica esta idea; para ello haremos uso de un parámetro estadístico poco habitual como es el del inverso del coeficiente de variación.

MEDIDAS DE DISPERSIÓN

Las distribuciones estadísticas de un solo carácter pueden ser resumidas cuantitativamente desde dos puntos de vista: el de la tendencia central y el de la dispersión. En este sentido, Calot (1974) definió algunas propiedades deseables para una característica de tendencia central o de dispersión. Así, éstas deben:

1. Definirse de manera objetiva, lo que conduce a expresiones algebraicas.
2. Usar todas las observaciones y no algunas de ellas solamente.
3. Tener un significado concreto.
4. Ser sencillas de calcular.
5. Prestarse fácilmente al cálculo algebraico.
6. Ser poco sensible a las fluctuaciones y errores muestrales.

El problema es que alguna de estas condiciones podrían ser contradictorias (condiciones 2 y 6) y no será posible encontrar una característica que responda simultáneamente a todas estas condiciones.

Por medidas de tendencia central entendemos una serie de medidas o valores que tratan de representar o resumir una distribución de frecuencias dada, sirviendo además para realizar comparaciones entre distintas distribuciones de frecuencia. Suelen denominarse también promedios. Entre las más destacadas podemos citar: la mediana, la moda, la media o una generalización de esta última como es la φ-media.

Ahora bien, acompañando a las medidas anteriores siempre aparecen las medidas de dispersión que tienen como propósito estudiar lo concentrada que está la distribución en torno a algún promedio. Las medidas de dispersión más habituales son: las diferencias y las desviaciones. Según que las desviaciones sean respecto a la mediana o a la media y según se considere la mediana o la media de la serie de desviaciones, se obtiene varios índices de dispersión: la mediana de las desviaciones absolutas a la mediana o MEDA utilizada en balística (artillería), la desviación absoluta media respecto a la mediana, la desviación absoluta media respecto a la media, la desviación cuadrática media y la desviación típica.

Ahora centrémonos en este último parámetro de dispersión.

Definición 1. La varianza es la media de las desviaciones cuadráticas de los datos respecto a la media.

$$s^2 = \sum_{i=1}^{k} f_i \, (x_i - \overline{x})^2$$

Según el teorema de Köning:

$$s^2 = \sum_{i=1}^{k} f_i \, (x_i - \overline{x})^2 = \sum_{i=1}^{k} f_i \, x_i^2 - \overline{x}^2$$

Esta medida tiene un problema y es que está expresada en unidades al cuadrado, lo que puede producir una falsa imagen de la dispersión de la distribución. Para evitar este problema, en su lugar suele utilizarse la desviación típica que es la raíz cuadrada positiva de la varianza, es decir:

$$s = +\sqrt{s^2}$$

medida que satisface las condiciones 1, 2 y 5 de Calot. Además la desviación típica es más sensible que la media a las fluctuaciones en el muestreo y a los valores erróneos (puesto que aquellos aparecen al cuadrado). A veces su cálculo es demasiado pesado en ciertos campos de aplicación en los que las condiciones excluyen prácticamente el uso de cualquier tipo de máquina de calcular y exigen un resultado numérico rápido. Es así como en el control industrial se prefiere el recorrido (diferencia entre el mayor y el menor valor de los datos) más rápido de calcular que la desviación típica.

Otras características de dispersión son los cuantiles y los momentos que pueden entenderse como generalizaciones de la mediana y la varianza.

Una medida de comparación interesante es el coeficiente de variación que se define (en general para variables positivas únicamente) como la razón de la desviación típica a la media:

$$CV = \sigma / \bar{x}$$

Como la media y la desviación típica se expresan en la misma unidad que la variable X, se trata de una cantidad sin dimensión, independiente de las unidades elegidas, es decir, invariante ante un cambio de escalas. Este hecho permite que pueda utilizarse este coeficiente para comparar distribuciones diferentes.

EL INVERSO DEL COEFICIENTE DE VARIACIÓN

Las medidas de dispersión descritas son las más habituales pero, ¿se pueden utilizar otras? La respuesta a esta pregunta es afirmativa, siendo una de las medidas más llamativas el inverso del coeficiente de variación.

Definición 2. Se define el inverso del coeficiente de variación (en general para variables positivas únicamente) como la razón de la media a la desviación típica:

$$\textit{Inverso del coeficiente de variación} = \frac{\bar{x}}{\sigma}$$

Este índice se utiliza en campos como la ingeniería, coeficiente señal-ruido o la biología, índice de inercia fenotípica (Pérez Fernández y Moreno Soto, 2001).

INVESTIGACIÓN PROPUESTA: COMPARACIÓN DE EMPRESAS

Como señalamos en la introducción, en este trabajo presentamos un ejemplo de como podría enfocarse la enseñanza de las matemáticas para acercar al alumno a la investigación y el descubrimiento. Pasemos a describirlo.

Consideraciones curriculares

- Materia: Matemáticas de Bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales.
- Curso: 1º ó 2º.
- Área temática elegida: Estadística Descriptiva.
- Objetivo planteado: el alumno debe adquirir los conceptos señalados en los apartados 2 y 3, para poder aplicarlos en situaciones presentes en la Economía y la Empresa. La mayoría de los conceptos del apartado 2 se supondrán conocidos, por lo que el trabajo se centrará fundamentalmente en los contenidos del apartado 3 que serán adquiridos por descubrimiento.
- Método de trabajo: formulación de un pequeño trabajo de investigación.

El trabajo debe terminar con la formulación de una expresión del tipo siguiente en la que el alumno debe reconocer un inverso del coeficiente de variación.

$$I = \frac{\sum_i (S_i \, x \, \bar{P}_i)}{nxSD_{sp}} \quad (4.1)$$

Comentarios acerca de la expresión del índice final

Veamos en qué sentido el índice (4.1) se corresponde con un inverso del coeficiente de variación. Para ello debemos señalar qué representa cada una de las componentes que aparecen en el índice.

$$I = \frac{\sum_i (S_i \, x \, \bar{P}_i)}{nxSD_{sp}}$$

donde:

Si = número de productos supervivientes con el tratamiento i.

$\bar{P}_i$ = valor medio de la variable para el tratamiento i.

n = número de tratamientos.

SD_{sp} = desviación típica del total de las medidas.

Si analizamos detenidamente esta expresión podemos comprobar como se trata de una aplicación de inverso del coeficiente de variación:

(1) $Si \times \overline{P}_i$ = Suma de los valores de la variable P bajo el tratamiento i

(2) $\sum_i (S_i \, x \, \overline{P}_i)$ = Suma de todos los valores de la variable P

(3) $\sum_i (S_i \, x \, \overline{P}_i)/n$ = Valor medio de la variable (por tratamiento)

(4) $I = \dfrac{\dfrac{\sum_i (S_i \, x \, \overline{P}_i)}{n}}{SD_{sp}}$ = inverso del coeficiente de variación, puesto que el denominador es la desviación típica.

Problema propuesto

Enunciamos ahora el problema propuesto para llevar a cabo la investigación: encontrar un índice que permita comparar distintos tipos de empresa de forma que podamos determinar cual de ellas se adapta mejor a las distintas circunstancias del mercado. Para ello se deberá tener en cuenta:

1) Se trata de empresas dedicadas a distintos sectores: conserveras, madereras,…
2) Cada empresa lanza una serie de productos al mercado de los cuales unos sobreviven pasado un tiempo y otros no.
3) Cada producto lleva asociado una serie de tratamientos (gastos): mayor o menor gasto en publicidad; mayor o menor gasto en I+D, …, que harán que el producto sobreviva o no. Cada tratamiento presenta una serie de niveles, que en general serán n.
4) Para cada producto se dispone de datos con los que se puede estudiar distintas variables relacionadas con él: beneficio obtenido, cantidad exportada, beneficios procedentes del mercado interno,…, de forma que puedo calcular el valor medio de la variable estudiada para el producto cuando el tratamiento presenta el nivel i.

Comentarios finales

Es evidente que intentar aplicar este índice a datos reales se hace altamente difícil; es más, podemos asegurar que es prácticamente inviable por toda la compleja trama de relaciones que se dan entre los distintos participantes y sobre todo por los gastos asociados que implica. Sin embargo, no es éste el objetivo de este trabajo; como ya señalamos 1 el objetivo real es que el alumno asimile desde la acción los contenidos de tanto de forma conceptual como de forma práctica.

En todo caso el profesor puede ayudarse de ejemplos simplificados (dos o tres empresas y pocos productos y niveles), acordes con el contexto e intereses de sus alumnos, que permitan llevar a cabo el estudio de aplicaciones modélicas y así trabajar los parámetros a estudiar basándose en estos ejemplos.

Puede ser aconsejable el uso de programas de ordenador (no hace falta que sean complejos, bastará una hoja de cálculo).

La construcción de las expresiones por el alumnado como "caja negra" (Drijvers, 1995) puede ser rentable en la comprensión y memorización, así como en el análisis del comportamiento al variar los datos.

La idea defendida en este trabajo podría, y debería, ser extendida a los niveles universitarios. Incluso el ejemplo aquí utilizado puede ser aplicado, quizá con mayor complejidad, en la materia de Estadística Descriptiva de carreras universitarias como la Diplomatura en Empresariales.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Cabezas, J. y Roanes, E. (2000). A proposal of organisation of curricular changes in mathematics propitiated by the use of computers. En *Proceedings of the 13th International Conference on Technology in Collegiate Mathematics* (pp. 40-44). Atlanta GA: Addison Wesley Longman.

Calot, C. (1974). *Curso de Estadística Descriptiva*. Madrid: Paraninfo.

Drijvers, P. (1995). White-Box/Black-Box revisited. *The Int. Derive Journal, 2*(1), 3-14.

García, A. (1997). *Estadística Aplicada: conceptos básicos*. 2ª edición. Madrid: UNED.

Pérez, M. y Moreno, F. (2001). *Aplicación del índice de inercia fenotípica para la elección de especies vegetales susceptibles de uso en restauración ambiental*. Cádiz: Universidad de Cádiz.

Williams, D. G., Mack, R. N. y Black, R. A. (1995). Ecophysiology of introduced Pennisetum setaceum on Hawaii: the role of phenotypic plasticity. *Ecology,* (76), 1569-1580.