

## UMA ANÁLISE DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS TRABALHADA POR FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA EM UM GRUPO DE ESTUDOS

Andresa Maria Justulin – Lourdes de la Rosa Onuchic

[ajustulin@utfpr.edu.br](mailto:ajustulin@utfpr.edu.br) – [Ironuchic@gmail.com](mailto:Ironuchic@gmail.com)

Universidade Tecnológica Federal do Paraná/UTFPR – Universidade Estadual Paulista  
“Julio de Mesquita Filho”/UNESP - Brasil

Núcleo temático: A resolução de problemas em matemática.

Modalidade: CB.

Nível educativo: Formação e atualização de ensino.

Palavras-chave: Resolução de Problemas; Formação de Professores; Matemática; Metodologia de Ensino-aprendizagem-Avaliação.

### Resumo

*Este trabalho, que aborda uma tarefa desenvolvida no âmbito da formação inicial de professores de Matemática, teve como objetivo investigar como futuros professores implementaram a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas em um grupo de estudo sobre a temática. A pesquisa desenvolveu-se com alunos de uma universidade pública do interior do estado de São Paulo – Brasil. Após os participantes discutirem teórica e metodologicamente a Resolução de Problemas, eles foram convidados a selecionar um problema e trabalhá-lo como gerador de novo conteúdo matemático no grupo de estudo que integravam. A análise dos dados seguiu uma abordagem qualitativa, investigando as interlocuções e as estratégias apresentadas pelos futuros professores. Os resultados indicaram que os participantes tendem a apresentar problemas de livro-didático, de natureza fechada, e que as discussões desencadeadas apoiam-se no uso da técnica operatória em detrimento do incentivo a novas estratégias para a resolução de problemas. Tal resultado é um indício de que essa Metodologia precisa ser explorada desde a formação inicial, o que possibilita a reflexão sobre o ensino de Matemática atual e incentiva o uso de metodologias ativas e diferenciadas.*

### Introdução

A atividade de resolver problemas sempre fez parte do dia a dia do ser humano. Entretanto, no ensino de Matemática nem sempre parece natural, aos professores, utilizar problemas como gerador ou desencadeador de novo conteúdo. Essa é a proposta quando se aborda a Resolução de Problemas<sup>6</sup> como metodologia de Ensino

---

<sup>6</sup> Neste texto será utilizado resolução de problemas com “rp” minúsculos ao se referir à atividade de resolver problemas e com “RP” maiúsculos ao tratá-la como metodologia de ensino de Matemática.

de Matemática. Os trabalhos de Onuchic (1999), Onuchic e Allevato (2004) e Allevato e Onuchic (2014) fundamentam a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

A definição de problema adotada neste texto é a de “(...) tudo aquilo que não sabemos fazer, mas que estamos interessados em resolver” (Onuchic, 1999, p. 15). Desse modo, considera-se que o que é problema para um aluno, pode ser exercício para outro; cabendo ao professor selecionar uma gama de problemas para o trabalho em sala de aula.

Na proposta da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, os processos de ensino, aprendizagem e avaliação, considerados como distintos, principalmente no início do século XX, são expressos como palavra composta, expressando que ensino e aprendizagem devem ocorrer simultaneamente e a avaliação deve estar integrada ao ensino para promover a aprendizagem.

Tal metodologia propõe algumas atividades ou ações a serem desenvolvidas pelo professor, em sala de aula, ao trabalhar problemas com seus alunos em direção à construção de novos conceitos e conteúdos matemáticos. O problema torna-se o ponto de partida e o meio para ensinar Matemática. A utilização de trabalho em grupos e discussões, em sala de aula, para a construção do conhecimento ativa e coletivamente são destaques na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas. Nesse contexto, o professor faz o papel de mediador e condutor, enquanto os alunos assumem o papel de coconstrutores de seu conhecimento.

Este trabalho apresenta resultados da tese de doutorado da primeira autora sob orientação da segunda. Por meio de uma tarefa desenvolvida no âmbito da formação inicial de professores de Matemática pretende-se analisar como futuros professores implementaram a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas em um grupo de estudo sobre a temática.

### **A Resolução de Problemas na formação inicial de professores de Matemática**

O trabalho com resolução de problemas, ao longo do tempo e das pesquisas, revelou variados enfoques. O primeiro deles, de Fernandes et al (1997), apresenta um conjunto de trabalhos de Portugal e de outros países sobre a Resolução de Problemas na Formação Inicial de

professores de Matemática. Nele, Vale (1997) trabalhou com professores do 4º ano do curso de Matemática e Ciências da Natureza de uma Escola Superior de Educação, por cinco meses. A pesquisa teve por objetivo investigar o desempenho e as concepções de futuros professores em relação à resolução de problemas. Os futuros professores deram pouca importância às fases do modelo de Polya e julgaram que as tarefas propostas foram interessantes e apropriadas para apresentar aos seus alunos.

Para Vale (1997)

A formação inicial pode contribuir favoravelmente, entre outros aspectos, para aprofundar os conhecimentos e as competências dos futuros professores sobre a resolução de problemas, pois estes estão em melhores condições que os professores em serviço, uma vez que poderão estar mais receptivos para a aprendizagem e para a alteração de suas concepções. (p. 8).

Leitão e Fernandes (1997) estudaram processos usados pelos futuros professores de Matemática ao resolverem problemas em grupo. Os participantes foram quatro alunos que resolveram, em grupo, seis problemas. O grupo foi acompanhado por um professor que realizou uma observação direta participativa e gravou em áudio suas discussões. Os resultados indicaram que os alunos tiveram sucesso na resolução dos problemas e que o grupo mostrou-se comunicativo e reflexivo, buscando sempre um consenso e procurando outras formas de resolução do problema.

No Brasil, em relação aos trabalhos envolvendo a Resolução de Problemas e o contexto da formação inicial de professores destacam-se os de Costa (2012) e de Azevedo (2014). No primeiro, o autor investigou como (futuros) professores de Matemática exploram o conceito de proporcionalidade através da resolução de problemas. A pesquisa investigou também algumas crenças dos (futuros) professores antes, durante e depois de vivenciarem a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Os resultados indicaram que a Metodologia ajudou os (futuros) professores a saírem do estado de ouvintes e a se tornarem questionadores, investigativos e participativos, sendo co-construtores de seus próprios conhecimentos. Além disso, mobilizaram diversas estratégias de resolução para os problemas propostos e puderam refletir sobre “quando” e “como” ensinar proporcionalidade aos seus futuros alunos. No segundo, a autora fez uso de duas disciplinas da graduação para tratar aspectos teóricos e práticos da Resolução de Problemas com seus alunos, futuros professores. As análises evidenciaram que a Resolução

de Problemas se mostrou um importante caminho para preparar o futuro professor de Matemática.

### **Procedimentos metodológicos**

O grupo de estudo cujo um dos encontros será tratado neste trabalho, era formado por seis alunos do Curso de Licenciatura em Matemática (Felipe, Juliana, Fernanda, Aline, Camila e Vítor<sup>7</sup>), de uma universidade estadual do interior do estado de São Paulo/ Brasil e pela pesquisadora. Ao todo foram realizados 15 encontros, que abarcaram conteúdos matemáticos indicados pelos próprios participantes como difíceis de ensinar ou de aprender enquanto alunos da Educação Básica. No último deles, os participantes foram convidados, em duplas, a implementarem a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas no próprio grupo de estudo. Assim, os participantes, no último encontro, propuseram três problemas, mas por limitação de espaço será analisado apenas um deles, o problema de Aline e Fernanda.

Neste trabalho, a abordagem qualitativa mostrou-se apropriada para analisar como futuros professores implementaram a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas em um grupo de estudo, visto que “busca interpretar o caso como um todo orgânico, uma unidade em ação própria, mas que guarda forte relação com seu entorno ou contexto sociocultural” (Fiorentini & Lorenzato, 2012, p. 111). Neste contexto, também se analisou como os futuros professores exploraram o problema proposto, e a abordagem qualitativa “fornece informações mais descritivas que primam pelo significado dado às ações” (Borba & Araújo, 2012, p. 24).

### **Resultados e Análise**

#### ***O Problema de Aline e Juliana***

Quais são as raízes da equação  $x^2 - 14x + 48 = 0$ ? Esboce o gráfico da função relacionada, considerando o que significam os coeficientes  $a = 1$ ,  $b = -14$  e  $c = 48$ .”

O problema foi escolhido pelas participantes e selecionado a partir da internet. Ele, em especial e diferentemente dos demais apresentados, mostrou-se fechado, mas com possibilidade de ser explorado graficamente. Esperava-se que os participantes utilizassem de

---

<sup>7</sup> Nomes fictícios.

conhecimentos adquiridos na graduação para encaminhar discussões finais com o grupo de estudo.

Neste encontro estavam presentes quatro licenciandos e a pesquisadora; e formou-se, para o trabalho em grupo, um trio (Andresa, Fernanda e Vítor) e a dupla Aline e Juliana.

A primeira estratégia para a solução do problema foi o uso da Fórmula de Bháskara<sup>8</sup> para resolver a equação e a determinação do vértice da parábola, por meio da fórmula  $V = \left(\frac{-b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a}\right)$ , conforme figura 1:

$$x^2 - 14x + 48 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Delta = (-14)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 48$$

$$\Delta = 196 - 192 = 4 \quad x = \frac{14 \pm 2}{2} \begin{cases} x' = \frac{14+2}{2} = \frac{16}{2} = 8 \\ x'' = \frac{14-2}{2} = \frac{12}{2} = 6 \end{cases}$$

$$V\left(\frac{-b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) \quad S = \{6, 8\}$$

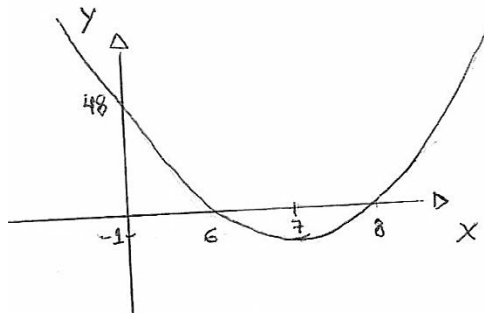
$$V\left(\frac{14}{2}; -\frac{4}{4}\right) = V(7; -1)$$

**Figura 1** – Parte da resolução do problema de Aline e Juliana.

Fonte: Dados da pesquisa.

Fernanda e Vítor, que estavam sentados um ao lado do outro, pensaram na ideia da derivada para obter  $\frac{-b}{2a}$ , que indicaria o ponto de máximo ou de mínimo de uma função. Após essa discussão, eles determinaram as raízes da equação, obtendo os valores 6 e 8. Em seguida, apresentaram o esboço do gráfico da função:

<sup>8</sup> Como é conhecida no Brasil.



**Figura 2** - Esboço do gráfico solicitado no problema de Aline e Juliana, por Fernanda.

Fonte: Dados da pesquisa.

Pode-se notar que Fernanda não se preocupou, durante a construção do esboço, com a escala do gráfico. É necessário, mesmo durante o esboço de um gráfico, o cuidado com as unidades de medida. Nesse caso, pode-se observar que Fernanda marcou de 0 a 6 um ponto e utilizou a mesma medida para marcar de 6 a 7 e de 7 a 8, o que não seria correto.

Durante a plenária, Aline e Juliana foram questionando o grupo e destacando alguns pontos importantes:

Juliana: O que é importante no esboço? Onde vai cortar o  $y$ ?; Quais são as raízes?; e onde está o vértice?...

(...)

Fernanda: Eu só sei que se o  $a$  é positivo, a concavidade do gráfico é para cima. Do  $b$  e o  $c$ , eu não lembro de nada...

Aline: Existe algum jeito de resolver essa equação sem usar Bháskara?

Andresa: Sim... por soma e produto! Sim... o que queremos?

Procurando todos os divisores de 48 teríamos:

$$\begin{cases} x + y = 14 \\ x \cdot y = 48 \end{cases}$$

		1
48	2	2
24	2	4
12	2	8
6	2	16
3	3	3 - 6 - 12 - 24 - 48
1		

Assim,

$$\begin{aligned} 48 &= 1 \times 48 \rightarrow 1 + 48 = 49 \\ 48 &= 2 \times 24 \rightarrow 2 + 24 = 26 \\ 48 &= 4 \times 12 \rightarrow 4 + 12 = 16 \\ 48 &= 8 \times 6 \rightarrow 8 + 6 = 14 \\ 48 &= 16 \times 3 \rightarrow 16 + 3 = 19 \end{aligned}$$

E, portanto,  $S = \{6; 8\}$ .

Continuando a trabalhar com o problema, Juliana conduz a aula questionando o que os coeficientes da equação significam no gráfico:

Juliana: [...] se (o coeficiente)  $b$  for zero, o que acontece?

Fernanda: Ele não corta o eixo  $x$ ?

Juliana: Ele intercepta o eixo  $x$  e o gráfico é simétrico (em relação ao eixo  $y$ ).

[...]

Aline: Aqui... por exemplo, a parábola corta no ponto 48 o eixo  $y$ ... daí você vai ver... do lado direito desse ponto... o que acontece com a parábola? Ela desce! (decrece). Isso aqui é quando  $b < 0$  e  $b = -14$  [...] igual à parábola que vocês desenharam...

[...]

Juliana: E o que o  $c$  determina?

Vítor: Onde a parábola corta o eixo  $y$ ! É o ponto  $y = 48$ .

A dupla afirmou que esse é um conteúdo recomendado para ser trabalhado no 9º ano do Ensino Fundamental. Fernanda considerou que esse não deveria ser um problema inicial, mas seria adequado para o aluno investigar o que significa, graficamente, ser raiz e o que os coeficientes significam no gráfico. Para isso, no entanto, o aluno já deveria saber como calcular as raízes de uma equação e como esboçar uma parábola.

Para finalizar a abordagem do problema, a pesquisadora questionou o grupo sobre como se relacionariam essas conclusões com os conceitos do cálculo. Desse modo, o grupo concluiu, no momento da formalização do problema, que na função  $y = ax^2 + bx + c$ :

- O coeficiente  $a$  indica o comportamento da concavidade da parábola que, neste problema, seria voltada para cima, pois  $a > 0$ . Esse resultado se relaciona com o teste da derivada segunda que, nesse caso, depende do sinal do coeficiente  $a$ .
- O coeficiente  $b$  indica se a parábola cruza o eixo  $y$  em seu ramo crescente ou decrescente. (se  $b > 0$ , a parábola cruza o eixo  $y$  no ramo crescente; se  $b < 0$ , a parábola cruza o eixo  $y$  no ramo decrescente ou, se  $b = 0$ , a parábola cruza o eixo  $y$  no vértice). Essa conclusão pode ser obtida a partir do teste da derivada primeira que indica os pontos críticos. Como para  $x > 7$ ,  $f'(x) = 2x - 14 > 0$  e para  $x < 7$ ,  $f'(x) = 2x - 14 < 0$ , então tem-se um ponto de mínimo. No problema trabalhado,  $b = -14$  e a parábola intercepta o eixo  $y$  em seu ramo decrescente.
- O coeficiente  $c$  indica onde o gráfico intercepta o eixo  $y$ , quando se faz  $x = 0$  na equação  $x^2 - 14x + 48 = 0$  e, portanto,  $c = 48$ .

- As raízes  $x_1$  e  $x_2$  indicam onde o gráfico intercepta o eixo  $x$ . Nesse caso, como  $\Delta = 4 > 0$ , ele intercepta o eixo  $x$  em dois pontos distintos. Se  $\Delta < 0$ , o gráfico não intercepta o eixo  $x$  e as raízes seriam complexas. Se  $\Delta = 0$ , o gráfico intercepta o eixo  $x$  em um único ponto, uma raiz dupla.

### Considerações finais

Na formação de professores esse problema permitiu resgatar conceitos do cálculo durante sua formalização. Faz-se necessário que os futuros professores compreendam essa relação ao invés de somente apoiar-se nas “fórmulas ou regras matemáticas”, sem atribuir-lhes significado.

Durante a condução da atividade final pelos futuros professores foi possível perceber que eles buscaram, inicialmente, que o grupo pensasse sobre o problema. Em seguida, provocaram uma discussão em direção à construção do conceito. Ao final, após cada integrante do grupo apresentar como havia pensado, o futuro professor, que estava propondo o problema, fez a formalização dos conceitos matemáticos envolvidos. Desse modo, foi possível perceber que o grupo compreendeu e aplicou a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, evidência de uma aprendizagem profissional docente.

### Referências bibliográficas

Allevalo, N. S. G. & Onuchic, L. R. (2014) Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que Através da Resolução de Problemas?. In Onuchic, L. R. et al. (Eds.) *Resolução de Problemas: Teoria e Prática*. (pp. 35-52). Jundiaí: Paco Editorial.

Azevedo, E.Q. (2014). *O processo de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas no contexto da formação inicial do professor de Matemática*. Tese de doutorado, Universidade Estadual Paulista “Julio de Mesquita Filho”, Rio Claro, SP, Brasil.

Borba, M. & Araújo, J. L. (2012) Pesquisa qualitativa em Educação Matemática: notas introdutórias. In Borba, M.& Araújo, J. L. (Eds). *Pesquisa qualitativa em Educação Matemática*. (pp. 23-30). Belo Horizonte: Autêntica.

Costa, M. S. (2012). *Ensino-Aprendizagem-Avaliação de proporcionalidade através da resolução de problemas: uma experiência na formação inicial de (futuros) professores de Matemática*. Tese de doutorado, Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, SP, Brasil.



Fernandes, D. et al. (1997). *Resolução de problemas na formação inicial de professores de Matemática: múltiplos contextos e perspectivas*. Aveiro: GIRP.

Fiorentini, D. & Lorenzato, S. (2012). *Investigação em Educação Matemática*. (3.ed., Coleção Formação de Professores). Campinas: Autores Associados.

Leitão, A. & Fernandes, H. (1997). Trabalho de grupo e aprendizagem cooperativa na resolução de problemas por futuros professores de matemática. In D. Fernandes et al. (Eds), *Resolução de problemas na formação inicial de professores de matemática: múltiplos contextos e perspectivas*. (pp. 1-38). Aveiro: GIRP.

Onuchic, L.R. (1999). Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In Bicudo, M.A.V (Ed), *Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas* (pp. 199-218). Rio Claro: Editora da UNESP.

Onuchic, L.R. & Allevato, N.S.G. (2004). Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In BICUDO, M.A.V. & BORBA, M.C. (Ed), *Educação Matemática – pesquisa em movimento* (pp.213-231). Rio Claro: Editora da UNESP.

Vale, I. (1997). Desempenhos e concepções de futuros professores de Matemática na resolução de problemas. In D. Fernandes et al. (Eds), *Resolução de problemas na formação inicial de professores de matemática: múltiplos contextos e perspectivas*. (pp. 1-38). Aveiro: GIRP.