

Revista Electrónica AMIUTEM

Volumen I, Número 1. Fecha: Junio de 2013

EL MUNDO DEL AZAR: UN ENFOQUE VISUAL

Jorge Domínguez y Domínguez, Jorge Axel Domínguez López
jorge@cimat.mx, jadlaxel@yahoo.com
Centro de Investigación en Matemáticas, Conteck México

Resumen

En este artículo se muestran algunas estrategias educativas y actividades de aprendizaje para favorecer conceptos de probabilidad y estadística. En la actualidad existen pocos recursos didácticos que provean a los alumnos de herramientas que los motive, los oriente, los informe. Aquí, se describe la elaboración de un material asistido por computadora con el fin de contribuir a la enseñanza y aprendizaje en las áreas mencionadas. Éste se ha denominado Calculador Estadístico: CalEst. Su desarrollo tecnológico considera una serie de módulos con un enfoque visual cuyo objetivo es facilitar la percepción de conceptos. En la práctica, se observa que los usuarios adquieren habilidad para reflexionar y tener aptitudes en el proceso de abstracción para escribir símbolos matemáticos

Palabras claves: Animación, Didáctica, Probabilidad, Estadística, Enseñanza.

Introducción

Como conocemos, uno de los principales objetivos de la estadística es ayudar o apoyar en la toma de decisiones bajo condiciones de incertidumbre. La probabilidad es el camino para cuantificar los resultados que no se pueden predecir con certidumbre. Así, en la operación de variables aleatorias se requiere del conocimiento de las distribuciones de probabilidad. Éstas tienen una amplia aplicación en la inferencia estadística, además permiten modelar diferentes problemas que son de utilidad en diversas áreas del conocimiento para explicar e interpretar el comportamiento de variables aleatorias.

Las nociones de probabilidad desempeñan un papel esencial en el análisis e interpretación de los datos estadísticos, con esa finalidad, en este proyecto se presentan varias animaciones con el propósito de motivar el aprendizaje de algunos conceptos de probabilidad, tales como juegos clásicos con monedas, dados, extracción de canicas con remplazo y sin remplazo, las ruletas con tamaño fijo y aleatorio entre otros. En el marco teórico de este trabajo se indican nociones relevantes de la probabilidad. Muchos fenómenos de la naturaleza están gobernados por el mundo del azar, la probabilidad es un camino para entenderlos, el efecto visual ayudará para su cálculo e interpretación.

Es importante desarrollar recursos didácticos con el fin de contribuir al cambio de valores y actitudes de los estudiantes, ya que éstos pueden proporcionarles información, técnicas y motivación que les ayude en sus procesos de aprendizaje (Marquès, 2001). Así mismo, Marquès (2001) señala que la eficacia de éstos depende en gran medida de la manera en que el profesor oriente su uso. Por ejemplo, existe material para motivar el aprendizaje de conceptos de probabilidad a través de caricaturas (Cubrero, 2001).

Nuestra propuesta pedagógica es una alternativa que proporciona a los profesores una opción para la enseñanza de la estadística con una perspectiva visual. Además, el calculador relacionado con el planteamiento de algunas estrategias didácticas de aprendizaje, contribuye a generar conocimiento práctico y teórico en temas de estadística y probabilidad. En el apartado de metodología se describen algunas de estas ideas.

Asimismo, los estudiantes tienen una alternativa para aprender diferentes técnicas estadísticas, desarrollando prácticas con este material educativo, donde se crean diferentes escenarios ilustrados por situaciones con animación gráfica. Se ha utilizado el material en talleres de enseñanza de la estadística con profesores y estudiantes, se exponen algunos logros de esas experiencias.

Marco Teórico

En este apartado se presentará la propuesta metodológica para motivar el aprendizaje de la estadística y probabilidad. El material educativo desarrollado tiene el propósito de ofrecer una competencia didáctica al docente, con el fin de que ayude a los estudiantes a comprender diferentes conceptos dentro de esta temática. Una serie de actividades que cumplen con este proyecto se exponen en Domínguez-Domínguez (2010).

Marquès (2001) señala que *“la estrategia didáctica con la que el profesor pretende facilitar los aprendizajes de los estudiantes debe ser integrada por una serie de actividades que contemplen la interacción de los alumnos con determinados contenidos”*. La propuesta que reportamos en este artículo, y que llamamos CalEst, tiene el objetivo de proporcionar a los estudiantes motivación, información y orientación para guiar sus aprendizajes, entre ellos cuenta con una metodología activa de aprender-haciendo.

Los contenidos básicos en el aprendizaje en estadística y probabilidad contemplan los temas de espacio muestral, las definiciones de probabilidad frecuentista y teórica, diferentes operaciones de probabilidad, un libro para profesores comprometidos con la enseñanza y que incluye estos conceptos (Billstein et al., 2009). A partir de estos temas se presenta el concepto de variable aleatoria y las distribuciones de probabilidad correspondientes. Luego su aplicación en la inferencia estadística.

El módulo didáctico del CalEst incluye una serie de escenarios para el cálculo de probabilidades (ver figura 1). La descripción está referida con juegos de azar; sin embargo, mediante la elaboración de prácticas, estos conceptos se pueden relacionar con problemas de la vida real (Domínguez-Domínguez, 2006). La colección de unidades que contiene este módulo, tiene en cuenta el lanzamiento de monedas, de dados, de dados con diferente número de caras, de una moneda y un dado, árboles o ramificaciones, ruletas con diferentes divisiones, ruletas con divisiones aleatorias, extracción de canicas: con remplazo y sin remplazo. Lo que permite abordar con amplitud el contenido temático de un curso de probabilidad, en los niveles medio y superior.

Con referencia a situaciones cotidianas, los resultados de experimentos aleatorios de un fenómeno o problemas son: registrar el sexo de un bebé al nacer, anotar la preferencia de un cliente por la marca de un teléfono, registrar la opinión de una persona respecto a la píldora del día después, medir la concentración de oxígeno en un río contaminado, preguntar a una persona si es partidaria o no de consumir un determinado producto, conocer el estado de salud de una persona, el tiempo de vida de un tipo de lámpara, el tiempo de vida de un virus, el número de vehículos que pasan por una caseta durante un intervalo de 15 minutos.

Se señalan algunas ideas básicas con el fin de conocer cómo utilizar el material educativo aquí propuesto, también se puede emplear con el fin de profundizar en el estudio de la estadística y probabilidad. El material es apropiado para explotarlo en diferentes niveles educativos. Se plantea como una actividad importante, elaborar una serie de prácticas para abordar diferentes temas y alcanzar una mayor utilidad del material.

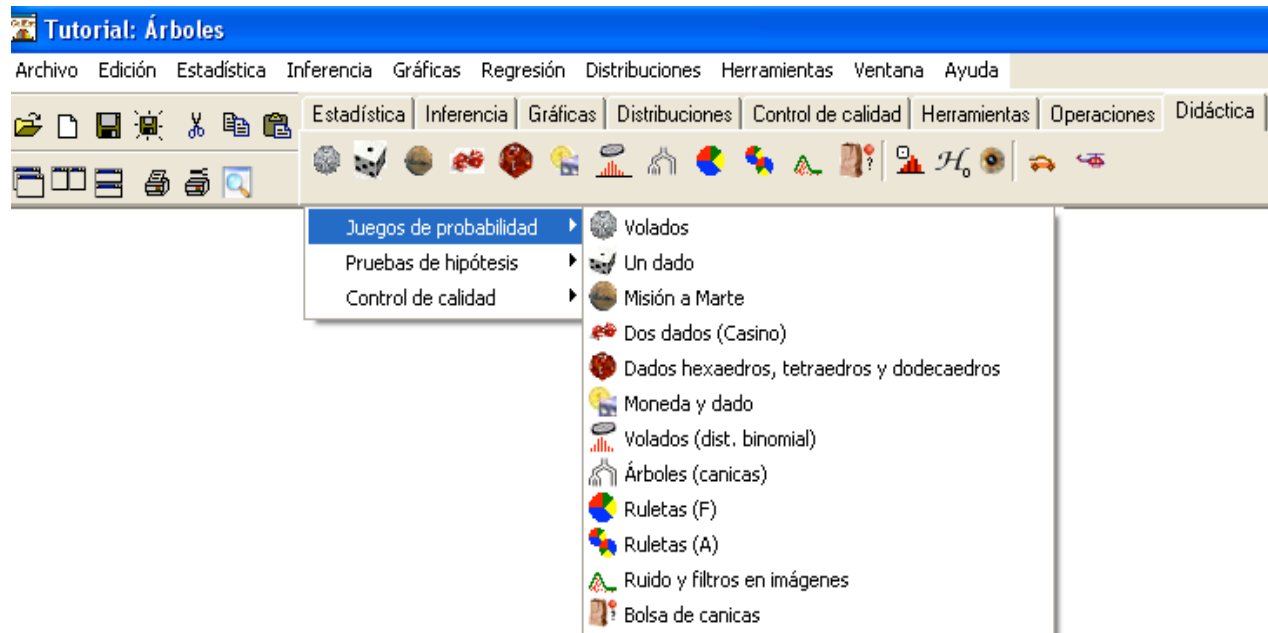


Figura 1. Descripción del material didáctico con respecto a juegos de probabilidad

Con la finalidad de ilustrar los conceptos de espacio muestra y las definiciones de probabilidad frecuentista y clásica, se muestra la caracterización de árboles que aparece en el material (ver figura 2).

Varios problemas teóricos y prácticos se pueden plantear, aquí solo se presenta la gráfica y se propone la probabilidad de que la canica salga por una de las filas impares,

$$P(\text{la canica salga por un fila impar}) = 0.125 + 0.125 + 0.125 + 0.125 = 0.5$$

por la definición clásica.

Por la Probabilidad empírica, como se muestra en la Figura 2,

$$P(\text{la canica salga por un fila impar}) = 0.1733 + 0.08 + 0.1333 + 0.1233 = 0.51$$

Probabilidad frecuentista o empírica. Se realiza un experimento y se cuenta el número de veces que el evento A ocurre. La probabilidad empírica del evento A es la frecuencia relativa de A , así $P(A)$ es:

$$P(A) = \left(\frac{\text{Número de veces que } A \text{ ocurrió}}{\text{Número de veces que se repitió la prueba}} \right) = \left(\frac{f}{N} \right)$$

Probabilidad Clásica o Teórica. Se supone que un experimento tiene n diferentes eventos simples y cada uno de éstos tiene la misma posibilidad de ocurrir. Si un evento A ocurre en s de esas n , entonces:

$$P(A) = \left(\frac{\text{Número de resultados de } A}{\text{Número de resultados en el espacio muestral}} \right) = \left(\frac{s}{n} \right)$$

En resumen: La probabilidad satisface las siguientes propiedades:

- La probabilidad de un evento imposible es 0.
- La probabilidad de un evento que tiene una certeza de ocurrir es 1.

- Para cualquier evento A , la probabilidad de A está entre 0 y 1 inclusive, esto es: $0 \leq P(A) \leq 1$.

Distribución Binomial: Si se realiza una serie de n ensayos Bernoulli independientes, entonces la variable aleatoria número de éxitos en n ensayos tiene una distribución Binomial con parámetros n y p . Una descripción de esta distribución es $B(n,p)$. A la serie de realizaciones se le conoce como experimento Binomial y se deben verificar las siguientes condiciones:

- Existe un número n fijo de ensayos.
- Cada ensayo produce uno de dos posibles resultados, referidos como éxito y falla.
- La probabilidad de éxito de un ensayo, p , es constante.
- Los ensayos son independientes, es decir, la probabilidad de éxito en cualquier ensayo no es afectada por el resultado de un ensayo previo.

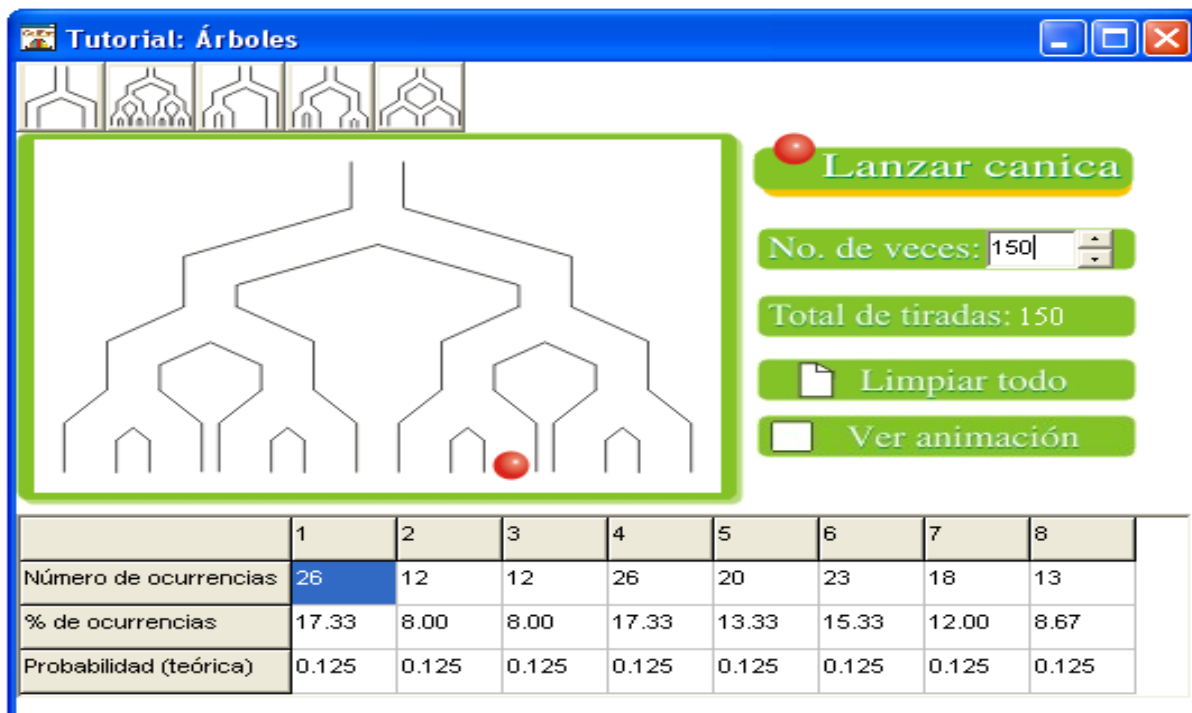


Figura 2. Cálculo de probabilidades con el diagrama de árbol

- La distribución de probabilidad está dada por:

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{p} p^x (1-p)^{n-x} \text{ para } x = 0, 1, \dots, n$$

Interpretación de la expresión anterior: $P(x)$ es la probabilidad de x éxitos en n ensayos. Donde

$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$, $x = 0, 1, \dots, n$ significa que se puede utilizar la fórmula para cada valor de x , que es el número de los éxitos posibles en n ensayos.

- Distribución de probabilidad acumulada: $P(X \leq x) = \sum_{x=0}^c f(x)$.
- La media y la varianza para la distribución Binomial son: $\mu = np$ y $\sigma^2 = np(1 - p)$.

La distribución Binomial y CalEst. En la Figura 3 se muestra la representación visual que caracteriza la distribución con parámetros $p = 0.40$ y $n = 10$. El cursor de abajo es un umbral el cual se mueve con el ratón para generar diferentes cálculos de probabilidad. Así se tienen las probabilidades de $P(X < 2) = 0.046$ y $P(X = 2) = 0.121$, tal que, la probabilidad de $P(X \leq 2) = 0.167$. Además, esta presentación cuenta con la calculadora indicada en el último botón del primer renglón, los resultados para este caso se muestran a la derecha en la Figura 3.

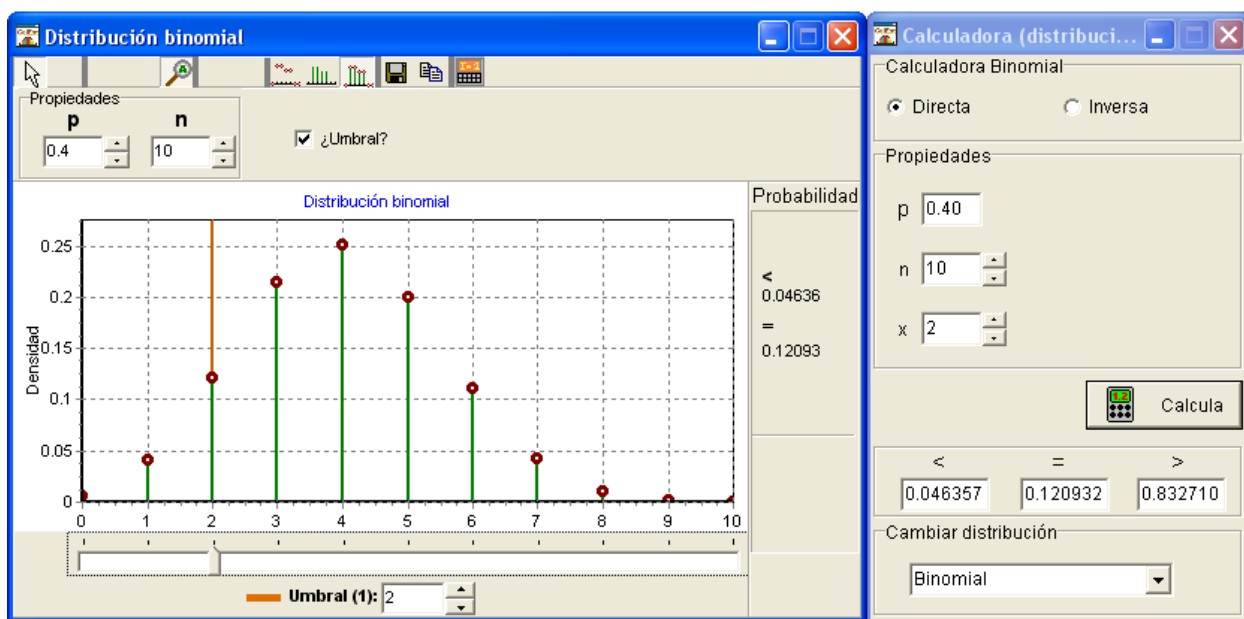


Figura 3. Caracterización dinámica de la distribución Binomial.

Un atractivo de esta propuesta es que el alumno va directamente a conceptualizar la función que define a la distribución Binomial y no se distrae con el engorroso manejo de las tablas. A partir de esta descripción adquiere habilidad para escribir de manera abstracta símbolos matemáticos para realizar las operaciones de probabilidad.

Metodología

La propuesta del material presentado mediante el CalEst tiene la finalidad de propiciar la motivación en los alumnos para comprender los conceptos descritos en el marco teórico. La contribución principal de este desarrollo está en el enfoque visual. Esta versión del material permite crear un número considerable de escenarios didácticos para enseñar y aprender conceptos en temas de estadística y probabilidad. Uno de estos ambientes se expondrá en el siguiente apartado.

Un punto de vista innovador en el proceso de aprendizaje es aplicar el método de proyectos como técnica didáctica (Kilpatrick, 2010). Lo hemos empleado como una alternativa para motivar necesidades, intereses y problemáticas que permitan generar información y analizarla mediante procedimientos estadísticos. Esta estrategia servirá como modelo para que luego el estudiante pueda

establecer diferentes situaciones en función de sus intereses con el fin de aplicar el modelo estadístico y resolver sus problemas.

Nuestra estrategia ha consistido en integrar tanto el calculador como el método de proyectos, en ese sentido se tienen varios proyectos, aquí sólo se describirán dos de ellos.

Uno de los proyectos consiste en armar el mapa de la República de Mexicana, como un rompecabezas. Este consiste en presentar en una computadora, proyector o multimedia la silueta del mapa, a continuación va apareciendo de manera aleatoria un estado de la República el cual se arrastra con el ratón al lugar que le corresponda. Al final se tienen dos respuestas, el tiempo de solución del rompecabezas y el porcentaje de falla. Esto permite trabajar con los conceptos de variable aleatoria, la primera continua y la segunda discreta.

Para involucrar el método de proyectos, primeramente se realizan una serie de cuestionamientos sobre el conocimiento que se debe tener sobre la República Mexicana y se destaca la importancia que significa conocer su mapa. Con la finalidad de generar un aprendizaje significativo, en la elaboración de estos puntos intervienen los participantes. El siguiente paso corresponde al análisis e interpretación estadística de la información generada por los participantes, lo que da lugar a plantearse nuevas preguntas sobre la información y búsquedas del mapa; por ejemplo, la ubicación de los meridianos y paralelos, entre muchas otras ideas. Un papel relevante en el análisis de la información al tener las variables aleatorias es la probabilidad.

En ese sentido, el CalEst ayuda de una manera directa a calcular las probabilidades ya que cuenta con una serie de módulos para tal fin. Esta representación visual desempeña un papel importante en comprender y conceptualizar el cálculo de probabilidades. Para los módulos correspondientes a distribuciones de probabilidad se facilita la percepción de conceptos tales como, variable aleatoria, de función, manejo de expresiones con fracciones y decimales, medir la incertidumbre, así como a visualizar y diferenciar lo que son las funciones de densidad y distribución de probabilidad.

Se tiene un módulo que contiene distribuciones de probabilidad discreta y continua. Ahí se ha creado un mecanismo ilustrado con umbrales que al moverlos permite calcular probabilidades a partir de la gráfica de la función densidad correspondiente. Se tiene la opción de la distribución de probabilidad acumulada, lo que permite comprender la relación entre estas funciones, como se muestra en la figura 4.

La figura 4 muestra la caracterización de la distribución Normal con parámetros $\mu = 260$ y $\sigma = 20$, en segundos, que ilustran el tiempo de respuesta que una persona tarda en armar el mapa de la República Mexicana de una población que corresponde a un grupo de estudiantes. Bajo una serie de estudios realizados para este caso, se puede suponer que la variable tiene una distribución Normal. Observe que se tiene la probabilidad de 0.751 de que un estudiante resuelva el rompecabezas entre 245 y 300 segundos; es decir, $P(245 \leq X \leq 300) = 0.751$. Este cálculo generalmente resulta complicado para el estudiante, por otra parte no se requiere hacer la transformación a la distribución Normal estándar. Así, no se distrae al estudiante del problema que se está estudiando. Considerando este material se pueden hacer una buena cantidad de prácticas para adquirir el dominio de la Normal y sus aplicaciones. Entre otras cosas, este material permite hacer cambios en la estrategia de enseñanza en temas de estadística y probabilidad.

Entre los alcances del método de proyectos está el de hacer pruebas de hipótesis. Para el caso del rompecabezas, se puede plantear que los estudiantes de secundaria tienen mayor habilidad para armar

el mapa de la República Mexicana que los estudiantes de sexto año de primaria. La verificación de estas pruebas requiere del cálculo de probabilidades de la distribución Normal.

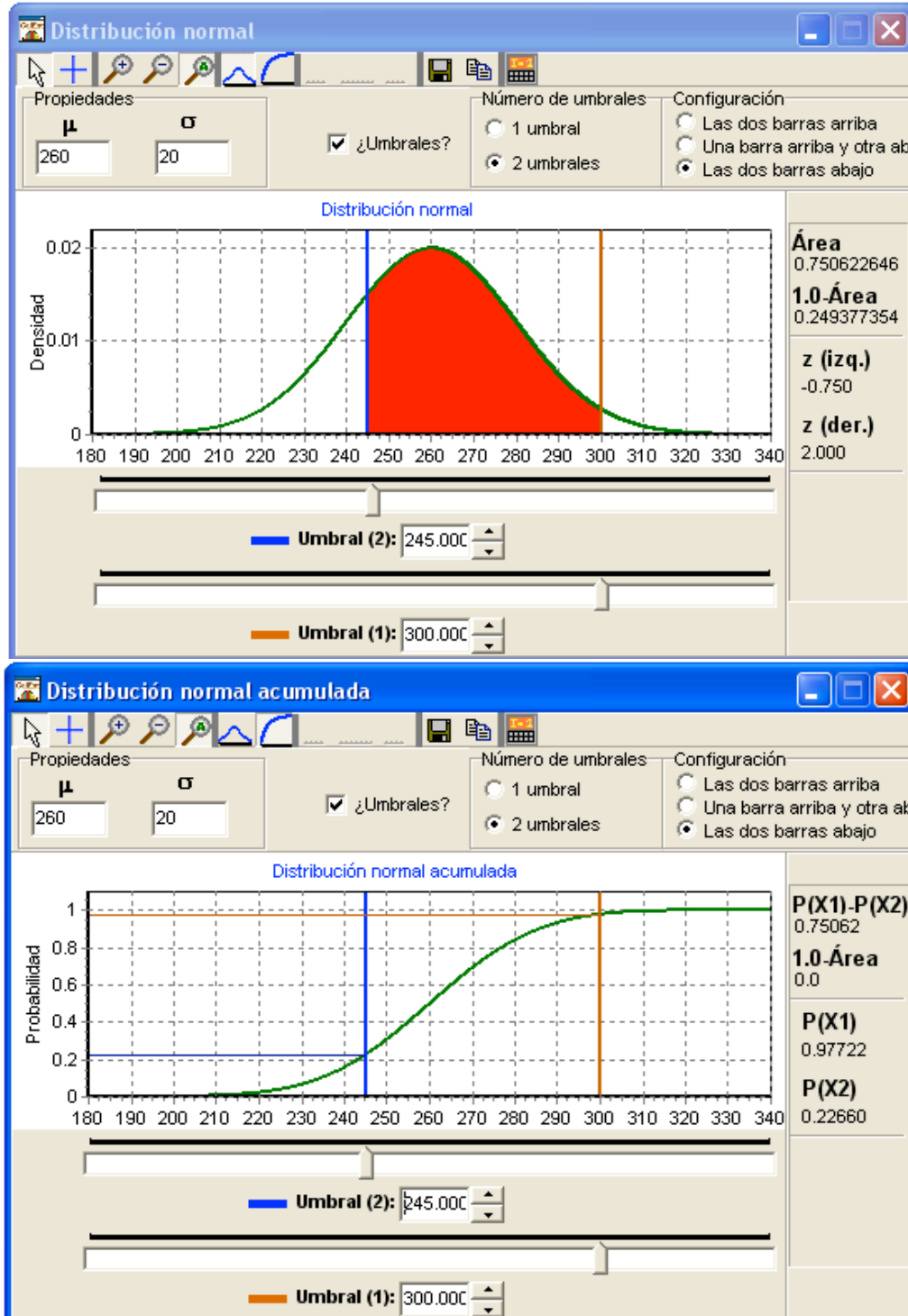


Figura 4. Función densidad y distribución de probabilidad de la Normal.

En el módulo didáctico del CalEst se han diseñado dos esquemas para realizar pruebas de hipótesis. El primero describe la estrategia metodológica que se requiere en estadística en el contraste de hipótesis, en la que se aplica los cálculos de probabilidad de una distribución Normal. El segundo ilustra la metodología de la prueba de hipótesis estadística mediante la simulación de un sistema de seguridad, el cual se basa en la lectura del iris. Este mecanismo muestra de manera animada el procedimiento que se sigue para realizar el contraste de una hipótesis y ofrece una alternativa didáctica para enseñar y aprender los conceptos en este tema (Domínguez-Domínguez, 2011). Varios conceptos estadísticos y de probabilidad son relevantes para comprender y llevar a cabo una prueba de hipótesis, tales como variable aleatoria, estadístico, función de densidad y distribución de probabilidad de una variable aleatoria. A través de esta simulación se explican cada uno de estos conceptos, al final el usuario puede escribir y formalizar el procedimiento de prueba de hipótesis estadística.

La misma idea se extiende a un escenario similar, el cual caracteriza la inferencia estadística sobre el valor de un parámetro o contrastes de parámetros a partir de la información de una muestra aleatoria. Esta situación se ilustra de manera visual con la finalidad de que un usuario comprenda y tenga una mayor claridad en la estructura que se emplea para realizar las pruebas de hipótesis sobre una o dos poblaciones. De esta manera el desarrollo animado servirá como un recurso didáctico en el proceso de enseñanza aprendizaje del contraste de hipótesis.

Exposición de la propuesta

Otra actividad desarrollada en la propuesta que presentamos se refiere a un problema que permite utilizar la distribución Binomial. Éste consiste en mostrar a una persona una tarjeta que contiene 16 palabras. El experimento consiste en mostrar la tarjeta de palabras por 20 segundos a una persona, luego dejar pasar un minuto platicando de otras situaciones con el entrevistado. A continuación, pedirle a la persona que le diga las palabras que recuerda, darle 1 minuto para que responda y finalmente, se anota el número de palabras recordadas.

Dentro de las actividades está el que el estudiante piense de manera crítica y reflexione para construir hipótesis, diseñar y desarrollar procedimientos de análisis y manejo de la información, y cálculo de probabilidades

Aquí lo que se plantea es estudiar la probabilidad de personas que recuerdan 8 o más palabras. El planteamiento probabilístico para estudiar el caso de la memoria a corto plazo, está descrito en el apartado del marco teórico referente a la distribución de probabilidad Binomial. Con la información que se obtiene al hacer la práctica, se justifica que la probabilidad de éxito es $p = 0.30$, en consecuencia la probabilidad de fracaso es: $q = 1 - p = 0.70$. Esta situación se muestra en el módulo didáctico del CalEst, en el que, en el enfoque visual aparecen unas monedas y se pueden simular varias situaciones para describir una buena cantidad de problemas teóricos y prácticos. La idea de esta descripción corresponde a la presentación clásica con una probabilidad de éxito $p = 0.50$. Ésta se puede modificar, lo que representaría el caso de monedas cargadas. En esta presentación el valor de ensayos n varía entre 1 y 20. La salida representa la probabilidad teórica de cada ensayo y la acumulada, además la frecuentista si el proceso se va repitiendo. Después de un número grande de repeticiones se observa la aproximación de la probabilidad frecuentista al valor teórico. La presentación gráfica permite prestar atención a la función de probabilidad de la distribución Binomial, la que contribuye a que los estudiantes puedan realizar las operaciones cognitivas apropiadas para lograr los objetivos de aprendizaje sobre este tema. También, se consigue poner estos recursos

educativos a su alcance, tal que les permitirá realizar actividades de manera individual. La figura 5, indica la descripción con las siguientes propiedades de la Binomial: $n = 9, p = 0.30$, con 180 repeticiones del proceso.

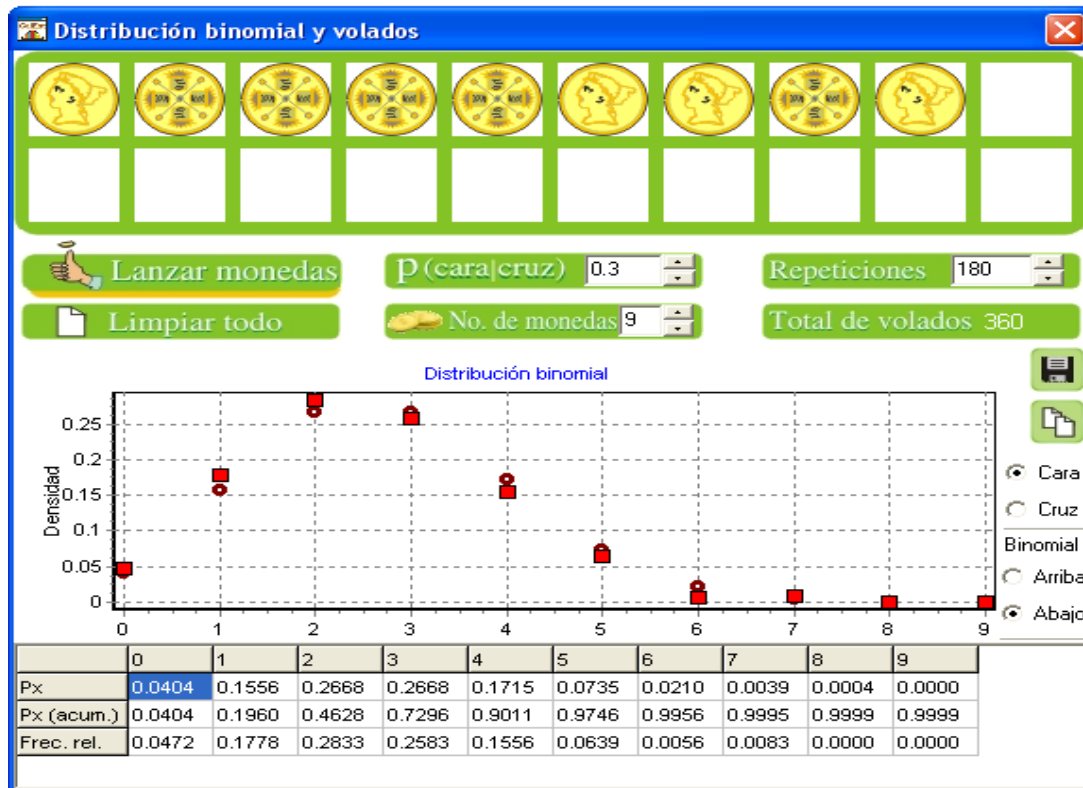


Figura 5. Distribución que representa el caso de éxito en la memoria a corto plazo

En el bloque Didáctico aparece una opción denominada distribución Binomial y volados, este enfoque tiene varios objetivos:

1. Conocer la distribución Binomial considerando como caso inicial el valor de $p=0.5$. Ese valor se puede mover para tener otros valores de p y así ver cómo cambia la gráfica de la distribución. Además, se pueden proponer diferentes valores de n hasta el valor de $n=20$.
2. Comprender los conceptos probabilidad y regularidad estadística. Al lanzar las monedas varias veces aparecen los valores de la probabilidad definida en la expresión Binomial y el de la frecuencia empírica. Cuando el número de repeticiones es muy grande los valores de cada celda se van aproximando.
3. Calcular probabilidad de la Binomial para diferentes valores de los parámetros.
4. Aplicar este esquema en diferentes problemas donde el éxito y la falla corresponderían a la cara y cruz (sello) en la moneda, respectivamente.
5. Se tiene el valor de la probabilidad acumulada $P(X \leq x)$.
6. Plantear las soluciones a ejemplos y ejercicios expuestos en diferentes libros de estadística. En cada caso tiene que identificar el valor de los parámetros n y p .

Experimentación

Se realizó una experimentación del material en el taller “Estrategias para la enseñanza de la estadística y probabilidad” en el que participaron 44 personas. De ellos, 6 son profesores de nivel bachillerato y el resto estudiantes del cuarto semestre de licenciatura en matemáticas. De este grupo, sólo 7 personas tenían ciertos conocimientos de probabilidad. Primeramente se aplicó un cuestionario que consistió en las siguientes preguntas:

- ¿Quiénes de ustedes saben calcular probabilidades?
- ¿Es complicado calcular probabilidades?
- ¿Conocen aplicaciones del cálculo de probabilidades?
- ¿Por qué es útil el cálculo de probabilidades?
- ¿Saben por qué es importante el cálculo de probabilidades en la enseñanza de la matemática?
- ¿Saben lo que es una función densidad?
- ¿Conocen lo que es una función de distribución?
- ¿Es difícil aprender estos conceptos?

Posteriormente se les planteó el problema de la memoria a corto plazo y, después de una breve argumentación sobre la importancia del problema, se formularon una serie de preguntas que podrían ser relevantes para el estudio. Las cuestiones consideradas fueron:

- ¿Qué puntos de vista nos pueden ser de interés en este proyecto?
- ¿Cuál es la descripción estadística de la información?
- ¿Cuál es el número de palabras recordadas por el 50% de las personas?
- ¿Existe mucha variabilidad en la respuesta?
- ¿Qué porcentaje de personas recordaron 6 o menos palabras?
- ¿Qué porcentaje de personas recordaron entre 6 y 10 palabras?
- ¿Qué porcentaje de personas recordaron 8 o más palabras?
- ¿Qué afirmación podría plantearse para saber si una persona tiene buena memoria a corto plazo?
- ¿Cómo mide la variabilidad?
- ¿Qué otras preguntas pueden plantearse en referencia a este proyecto?

Se les propuso a los participantes realizar la práctica, cada uno de ellos entrevistó a 5 personas para aplicarle la prueba de memoria a corto plazo, a personal de la Universidad. Además, cada uno de los entrevistados se les preguntó la edad, el género, y grado escolar. Con el fin de crear otros proyectos.

Resultados

El taller tuvo una duración de 12 horas. El proyecto de la memoria a corto plazo permitió realizar la evaluación de los conceptos de estadística y probabilidad presentados. Éste se llevó a cabo utilizando un proyector para mostrar el material CalEst y en una hoja se contestaron las preguntas planteadas.

Aquí se hace un resumen de los resultados, destacando el planteamiento estadístico, la aplicación de los cálculos y la escritura de la probabilidad.

Primero, con la información se realizó un análisis descriptivo de los datos y se respondieron las preguntas planteadas, de las que el 91% de las asistentes respondieron correctamente y escribieron de manera correcta los cálculos de probabilidad.

Se hizo énfasis entre los participantes en la importancia para aprender a plantearse hipótesis sobre diferentes situaciones reales. Con ese fin, se planteó como hipótesis: “una persona que recuerda 8 o más palabras tiene buena memoria a corto plazo”. Entonces habrá que determinar la proporción de personas que recuerdan 8 o más palabras. De una población, se plantea que si la proporción de personas que recuerdan 8 o más palabras es menor de 0.30, es decir $p < 0.30$, se dice que esa población tiene mala memoria a corto plazo. El planteamiento estadístico de las hipótesis para una proporción (Triola, 2008), es:

$$H_0 : p = 0.30$$

$$H_1 : p < 0.30$$

H_1 : representa la hipótesis que se desea probar, se conoce como hipótesis alternativa. H_0 es la hipótesis contrastante que por lo general se fija en la igualdad y se le denomina hipótesis nula. La proporción se distribuye como una Normal, si se satisface que $np > 5$ y $n(1-p) > 5$. En este caso, se satisface ya que $n = 220$, la media y la desviación estándar de la distribución son

$$\mu = 0.30 \text{ y } \sigma = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0.03$$

La figura 6 describe las hipótesis, la que está a la derecha representa la hipótesis nula y la que está a la izquierda, una de las posibles alternativas. La prueba se construye a partir de la información, así de los datos se estima la proporción. Ésta se compara con un valor de referencia que deja el cálculo de una probabilidad. La probabilidad que se toma como indicación, se conoce como nivel de significancia y se representa por α , en este caso el valor es 0.047. Por lo general, se escoge $\alpha = 0.05$. Esta probabilidad genera un umbral que permite decir si el grupo entrevistado tiene una memoria menor a 0.30.

Para el caso bajo estudio, la proporción de los 220 que recordaron 8 o más palabras es de $\hat{p} = \frac{49}{220} \cong 0.22$. Este es el valor que compara con el del umbral, es decir 0.25. Dado que este es menor a 0.25, se dice que la información no apoya a la hipótesis nula y por lo tanto, no se acepta la hipótesis alternativa; esto es, podemos concluir que el grupo entrevistado no tiene una buena memoria a corto plazo.

Así que la conceptualización del cálculo de probabilidades se aplica de forma sencilla para resolver problemas de interés real. ¿Cuáles son los elementos principales e importantes? El cálculo de probabilidades $P(X \leq 0.25)$ bajo H_0 y $P(X \geq 0.25)$ bajo H_1 . Estas dos probabilidades constituyen conceptos importantes en la metodología para la prueba de hipótesis (Triola, 2008).

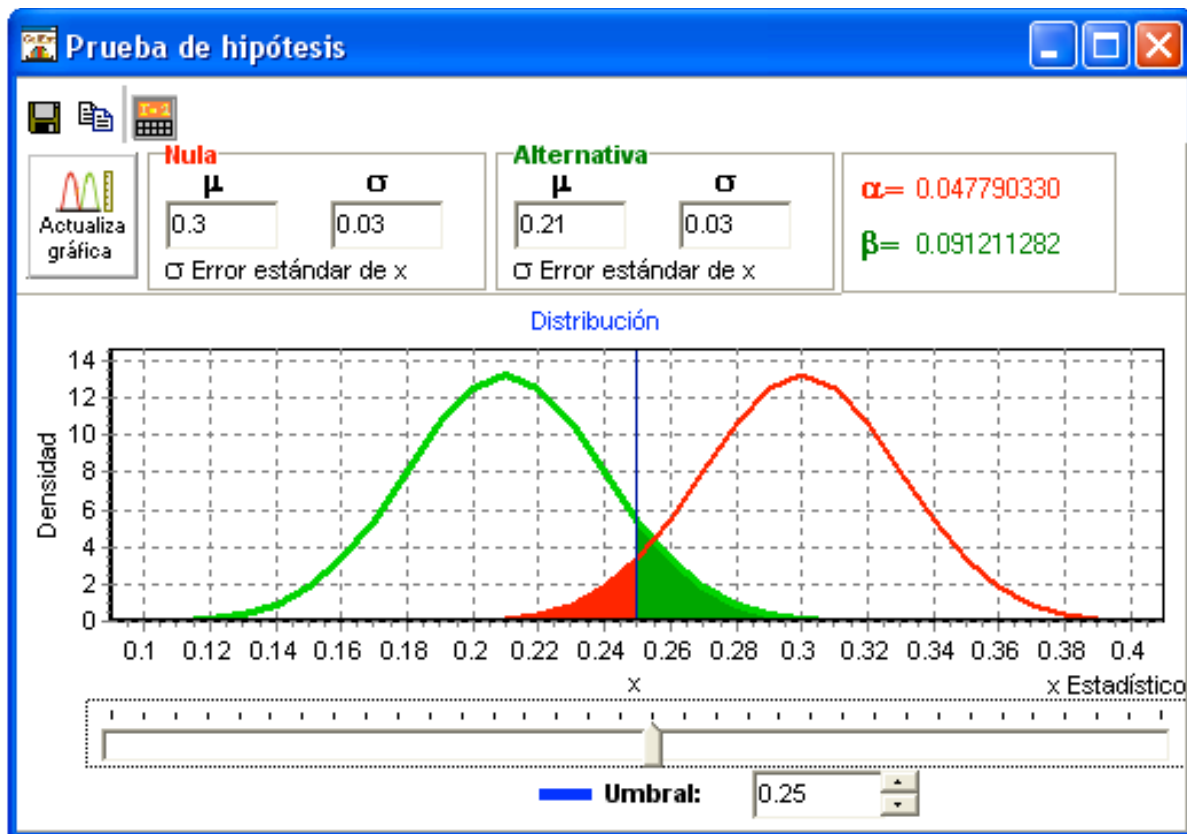


Figura 6. Aplicación del cálculo de probabilidades en la prueba de hipótesis.

La figura 6 constituye una aportación importante del material, ya que permite al estudiante ir construyendo paulatinamente el concepto de prueba de hipótesis, a la vez le permite crear varios escenarios moviendo el umbral, o planteando diferentes valores para la hipótesis alternativa. Por otro lado, al visualizar estas situaciones se adquiere la habilidad para describir lo que observa. Puede reproducir las presentaciones que vienen en los libros, de tal manera que el usuario puede generar sus propias explicaciones y comentarios.

Se puede observar que el material, es dinámico, flexible y el potencial que tiene para que de simples estimaciones de los datos, se aplique el cálculo de probabilidades para dar solución a una diversidad de problemas.

Conclusiones

Esta situación se ilustra de manera visual con la finalidad de que un usuario comprenda y tenga una mayor claridad en la estructura que se emplea para realizar las pruebas de hipótesis sobre una o dos poblaciones. De esta manera el desarrollo animado servirá como un recurso didáctico en el proceso de enseñanza aprendizaje del contraste de hipótesis.

Se extiende la aplicación de las distribuciones de probabilidad en algunos ejemplos de ingeniería para ilustrar la utilidad del efecto visual en la interpretación y solución de los caso de estudio. La creatividad de este material tiene el apoyo de recursos de programación tales como Press et al., (2002) y Wall (2000).

Hemos notado de estas experiencias que muchos profesores prefieren continuar como estrategia de enseñanza la exposición. De entrevistas con estudiantes de diferentes niveles educativos y distintas instituciones educativas del país, nos indican que sus instructores utilizan como recuso didáctico los apuntes elaborados por los docentes. Poco recurren a los libros y menos alternativas de material didáctico. Por lo general se recurre con desmesura al uso del software estadístico comercial, pero éstos sólo atienden a la parte operativa. Generan falsas expectativas, porque hacen creer a los alumnos que aprenden estadística y probabilidad y éstos no aprueban una simple evaluación que contiene conceptos de estadística y probabilidad.

Una oposición es elaborar una serie de prácticas para abordar diferentes temas y alcanzar una mayor utilidad. Esto en la dirección de que el estudiante aprenda de forma autónoma cuando revise sus procesos de construcción del conocimiento matemático o los relacione con la vida cotidiana. De esa manera trabaje en forma colaborativa al aportar puntos de vista distintos, así como de análisis empleando los principios y métodos de la estadística y probabilidad.

Esperamos que estas ideas contribuyan a generar una discusión importante en la conceptualización de la enseñanza y aprendizaje de la estadística y probabilidad, de tal manera, de contar con elementos didácticos y constituyan un reto para cambiar la enseñanza tradicional.

Referencias

- Billstein, R. Libeskind, S., Lott, J. (2009). *A problema Solvning Approach to Mathematics*, 10a. Edition. Addison Wesley, Boston.
- Cubrero, J. (2001). *Dados y datos. Comic hacia la estadística con probabilidad 0.95 de serlo*. Imprenta Latina, España.
- Domínguez, D. J. y Domínguez, L. J. A. (2006). *Estadística y Probabilidad: El mundo de los datos y el azar*. Oxford, México.
- Domínguez, D. J. y Domínguez, L. J.A. (2010). *CalEst Un enfoque visual en la enseñanza y aprendizaje de la Estadística*. Conteck, México.
- Domínguez, D.J. y Domínguez, L. J.A. (2011). Auténtico o Impostor. *Memorias del Tercer Congreso Internacional sobre la Enseñanza de las Matemáticas*, UNAM. Número de referencia: 285.
- Kilpatrick (2010). El método de proyectos como técnica didáctica. *Revista Latinoamericana de pedagogía* (3), (1), pp. 3-4.
- Marquès, Pere. (2001). *Didáctica. Los procesos de enseñanza y aprendizaje. La motivación*. (Última revisión 2011). <http://www.peremarques.net>
- Press, W., Teukolsky, S., Vetterling, W., Flannery B. (2002). *Numerical Recipes in C++* 2nd Ed. Cambridge University Press. New York.
- Triola, M. (2008). *Essentials of Statistics*, 3rd Ed. Pearson Education, Inc. Boston, MA.
- Wall, K. (2000). *Programación en Linux con ejemplos*. Pearson Education, Inc. Buenos Aires, Arg.