

# Revista Electrónica AMIUTEM

Volumen I, Número 1. Fecha: Junio de 2013

---

## UN ACERCAMIENTO INFORMAL A LA INFERENCIA ESTADÍSTICA MEDIANTE UN AMBIENTE COMPUTACIONAL CON ESTUDIANTES DE BACHILLERATO

Santiago Inzunza Cázares  
*santiago.inzunza@info.uas.edu.mx*  
Universidad Autónoma de Sinaloa, México

### *Resumen*

En el trabajo se presentan resultados de una investigación sobre un acercamiento informal al estudio de la inferencia estadística a través de un ambiente computacional en contexto de datos reales. Como consecuencia de las características dinámicas y multirepresentacionales del software utilizado y la propuesta didáctica diseñada, los estudiantes desarrollaron ideas intuitivas y un razonamiento informal adecuado sobre conceptos que son cruciales en el estudio de la inferencia estadística, tales como variabilidad muestral, efecto del tamaño de muestra en la estimación de un parámetro poblacional y estimaciones informales de intervalos de confianza. En general, los resultados señalan que este enfoque informal puede ayudar a los estudiantes de bachillerato a mejorar el razonamiento inferencial previo al estudio de los métodos formales de inferencia.

**Palabras claves:** Inferencia Estadística, Inferencia Informal, Ambiente Computacional.

### *Introducción*

Hacer inferencias e interpretar resultados de estudios estadísticos basados en muestras se ha vuelto parte de la vida profesional y cotidiana de las personas en los años recientes. Sin embargo, diversos estudios de investigación (Vallecillos y Batanero, 1997; Lipson, 2000; Liu, 2005; Castro Sotos et al., 2007; Canal y Behar, 2010; Inzunza, S., 2010) han mostrado que los conceptos y el razonamiento que involucra la inferencia estadística son difíciles para la mayoría de los estudiantes, incluso para profesores e investigadores que la aplican en su vida profesional. El razonamiento inferencial es inductivo y consiste en ir más allá de los datos de una muestra para extraer conclusiones sobre un universo que no ha sido explorado en su totalidad, lo cual conduce a que las conclusiones que se obtienen, presenten márgenes de incertidumbre. En este proceso, y de acuerdo con el enfoque formal de la inferencia estadística, la teoría de la probabilidad juega un papel fundamental para evaluar la confiabilidad y significatividad de las inferencias mediante la caracterización de la distribución de muestreo. De acuerdo con Pfannkuch (2005), esta integración de la estadística con la probabilidad presentó enormes dificultades conceptuales en sus orígenes, lo que explica en parte las dificultades que entrañan la enseñanza y aprendizaje de la inferencia estadística.

Al respecto del papel que juegan la estadística y la probabilidad en la inferencia estadística, Cobb y Moore (1997) señalan: “desde el punto de vista de la lógica deductiva que ha influido mucho en la enseñanza de la estadística en el pasado, la probabilidad es más básica que la estadística, ya que la probabilidad proporciona modelos de azar que describen la variabilidad de los datos observados; sin embargo, desde el punto de vista del desarrollo de la comprensión, la estadística es más básica que la

probabilidad, ya que la variabilidad en los datos puede ser percibida directamente, los modelos de azar pueden ser percibidos únicamente después que los hemos construido en nuestras mentes” (p. 820).

Los dos métodos de inferencia estadística más ampliamente utilizados son la estimación de parámetros y el contraste o prueba de hipótesis. En términos generales, la estimación de parámetros busca la generalización de los resultados de una muestra a una población, mientras que el contraste de hipótesis permite determinar si un patrón en los datos puede ser atribuido a un efecto real en alguna variable o es producido por el azar (Garfield y Ben-Zvi, 2008). El estudio de estos métodos es tradicionalmente introducido como un tópico formal en el currículo de muchos países a partir del bachillerato (Pratt et al., 2008; Pfannkuch, 2006); en el caso de México, son pocos los sistemas de bachillerato que los contemplan en sus planes de estudio.

Los desarrollos que tradicionalmente se utilizan para la formulación y aplicación de los métodos de inferencia estadística en los cursos y en la mayoría de los libros de estadística, son consistentes con el primer enfoque expresado por Coob y Moore (1997). Los métodos se presentan como un conjunto de procedimientos y utilizando un lenguaje matemático y de probabilidad que con frecuencia está fuera del alcance de muchos estudiantes, y particularmente de los estudiantes de bachillerato. Desde esta perspectiva, si bien muchos estudiantes aprenden a realizar los cálculos necesarios para resolver un problema de inferencia (estimación puntual, estimación por intervalo de confianza o prueba de hipótesis), no siempre logran comprender el proceso subyacente ni los conceptos involucrados.

Dadas las dificultades conceptuales que se involucran en la comprensión de los métodos de inferencia estadística desde esta perspectiva, su estudio ha sido relegado principalmente a las carreras universitarias. Sin embargo, en los años recientes diversos autores y organizaciones (por ejemplo, NCTM, 2000; Pfannkuch, 2005, 2006; Garfield y Ben-Zvi, 2008; Pratt et al, 2008) han propuesto investigar sobre las potencialidades del segundo enfoque definido por Coob y Moore (1997) para la comprensión de los métodos de inferencia, y sugieren que su estudio puede iniciar desde el nivel elemental mediante un enfoque informal que no requiere complicados antecedentes matemáticos. De esta manera, partiendo de un conjunto de datos de una muestra los estudiantes intentan inferir informalmente sobre algún patrón en los datos sin referencia explícita a la probabilidad, haciendo énfasis en la exploración y búsqueda de relaciones entre conceptos que subyacen a la inferencia.

La tecnología computacional juega un importante papel para la implementación de este enfoque, ya que recientes avances en la ingeniería del software proporcionan nuevas herramientas (por ejemplo, Fathom y TinkerPlots) para el desarrollo de razonamiento estadístico a edades más tempranas, permitiendo a los estudiantes acceder a tópicos avanzados de estadística que de otra manera no sería posible (Ben-Zvi, 2006; Makar y Rubin, 2007). De esta manera, en la literatura de educación estadística (Meletiou-Mavrotheris, 2004, Rubin, Hammerman y Konold, 2006; Inzunza, S., 2006) con frecuencia se sugiere la utilización de simulación computacional como alternativa para abordar la problemática del aprendizaje de la inferencia estadística. Se señalan diversas ventajas de la simulación respecto del enfoque tradicional de enseñanza, como es el hecho de permitir un acercamiento empírico mediante la selección repetida de muestras de una misma población, calculando el estadístico en cada una de las muestras y acumulándolos para formar la distribución muestral, que es la base para los métodos de inferencia estadística. Este proceso está más relacionado conceptualmente con el proceso real de inferencia y requiere de pocos antecedentes matemáticos por parte de los estudiantes.

En particular, en los años recientes nos hemos interesado por una categoría de software que se define como software dinámico para el análisis de datos, como es el caso de Fathom (Finzer et al., 2002) y

TinkerPlots (Konold y Miller 2005), mismos que hemos utilizado en investigaciones sobre otros tópicos de estadística y probabilidad (por ejemplo, Inzunza, S., 2006; Inzunza, S., 2008; Inzunza, S., 2010; Inzunza, S., 2011). Estas herramientas de software han sido diseñadas con propósitos educativos para facilitar la visualización, experimentación y simulación de conceptos estadísticos y de probabilidad, conectando la experiencia física con conceptos y representaciones formales.

En este trabajo, en tanto constituye una investigación educativa que busca encontrar elementos que mejoren la comprensión de la inferencia estadística, adoptamos el segundo enfoque descrito por Cobb y Moore (1997) y consideramos a la estadística más básica que la probabilidad. Nos proponemos que los estudiantes identifiquen en los datos, propiedades y patrones como un primer momento en su ruta hacia el estudio de la inferencia formal. Más específicamente, nos interesa investigar si los estudiantes de bachillerato identifican relaciones correctas entre conceptos como el efecto del tamaño de muestra en la variabilidad de los datos y si pueden hacer estimaciones informales sobre intervalos de confianza, como un paso previo a la inferencia formal utilizando un ambiente dinámico en contexto de datos reales como el que proporciona el software Fathom.

### **Marco Teórico**

De acuerdo con principios del enfoque constructivista del aprendizaje, el razonamiento informal juega un rol importante en el estudio de un tema en particular, pues este es punto de partida para el desarrollo de la comprensión formal. En el caso de la inferencia estadística, recientemente ha surgido una línea de investigación conocida como Razonamiento Inferencial Informal (RII), en la cual se inscriben trabajos (por ejemplo, Pfannkuch (2005) que se caracterizan por plantear a los estudiantes situaciones que los obligan a razonar informalmente antes del estudio de los métodos formales. Existen diversas definiciones para el RII, pero coincidentes en su esencia. Para Rubin, Hammerman y Konold (2006) el RII es el razonamiento que involucra ideas y relaciones como centro, variabilidad, tamaño de muestra y control de sesgo. Pfannkuch (2006) define el RII como la habilidad para interconectar ideas de distribución, muestreo y centro, dentro de un ciclo de razonamiento empírico. Por su parte, Zieffler *et al.*, (2008) lo definen como la forma en la que los estudiantes usan su conocimiento estadístico informal para hacer argumentos para apoyar inferencias acerca de poblaciones basándose en muestras. Estos autores consideran el razonamiento inferencial informal como un proceso que incluye las siguientes categorías:

- Razonamiento acerca de posibles características de una población basados en una muestra de datos.
- Razonamiento acerca de posibles diferencias entre dos poblaciones basado en diferencias observadas entre dos muestras.
- Razonamiento sobre qué tan probable resulta una muestra particular de datos dada una expectativa en particular.

La otra componente del marco teórico está relacionada con la tecnología computacional, pues esta se constituye en un catalizador para la implementación del enfoque informal a la inferencia estadística. La literatura sobre ambientes virtuales de aprendizaje señala que las computadoras pueden apoyar la cognición en diferentes formas. Pea (1987, p. 91) señala que la tecnología computacional vista como herramienta cognitiva puede aportar más en la educación matemática que cuando es vista meramente como una herramienta amplificadora de la capacidades de cálculo de los usuarios. Cuando la tecnología es utilizada en forma apropiada, tiene el potencial para provocar cambios estructurales en el sistema cognitivo de los estudiantes a través de una reorganización y transformación de las actividades que

ellos realizan. Una característica común de las herramientas cognitivas es que vuelven externos los productos intermedios del pensamiento, los cuales pueden ser analizados y discutidos. Particularmente, en el caso de las computadoras, constituyen una extraordinaria y potente herramienta cognitiva para aprender a pensar matemáticamente; con ellas se pueden operar no solo números, sino también símbolos, y permiten almacenar y manipular símbolos dinámicamente y permiten interacciones con los usuarios en tiempo real.

Dörfler (1993) identifica diversas formas en las que la introducción de una herramienta computacional en la enseñanza puede provocar una reorganización en el sistema cognitivo de los estudiantes:

1. Cambio de las actividades a un nivel cognitivo más alto (meta-nivel).
2. Cambio de objetos con los que se realizan las actividades.
3. Enfoca las actividades en transformación y análisis de representaciones
4. Apoya la cognición situada y resolución de problemas

En este sentido, la tecnología computacional ha sido un elemento que ha motivado el cambio de enfoque de la enseñanza tradicional de la estadística a la enseñanza enfocada en el pensamiento y razonamiento estadístico, y debería ser una herramienta valiosa para todos los profesores. Los ambientes virtuales proporcionan herramientas interactivas y con representaciones dinámicas que permiten ir más allá de “amplificar” las capacidades de cálculo; cuando son utilizadas apropiadamente, las computadoras pueden generar “una reorganización cognitiva” en la mente de los usuarios.


### **Metodología**

El estudio se llevó a cabo con 15 estudiantes de segundo grado de bachillerato del sistema Conalep mientras tomaban el curso de Probabilidad y Estadística a finales del ciclo escolar 2010-2011. Se diseñaron tres actividades en contexto de datos reales con las siguientes características: A partir de una población cuyos datos se proporcionaban, los estudiantes debían calcular sus parámetros y posteriormente seleccionar muestras para comparar las medias muestrales con la media poblacional y su variabilidad, finalmente se requería explorar el efecto del tamaño de muestra en la variabilidad y la capacidad de los estudiantes para hacer estimaciones informales mediante intervalos de confianza.

Como instrumentos de recolección de datos se utilizaron hojas de trabajo para cada actividad, archivos de datos con el trabajo realizado en cada actividad y entrevistas semiestructuradas con dos estudiantes participantes. La actividad 1 contenía datos de las 500 empresas más importantes instaladas en México, la actividad 2 contenía datos de contaminación en los 365 días del año 2010 en la ciudad de México y la actividad 3 contenía datos de la prueba enlace de 740 estudiantes de tercer grado de secundaria aplicada en 2010. Como ejemplo mostramos la hoja de trabajo de la actividad 2 con los propósitos y las preguntas guía.

*El archivo IMECA contiene información de promedio de ozono del centro de la ciudad de México el año 2010, la cual fue recopilada por la Secretaría del Medio Ambiente del Gobierno del Distrito Federal su sitio es Sistema de Monitoreo Atmosférico(SIMAT).*

Imeca



	Imeca
1	65
2	53
3	33
4	44
5	51
6	68
7	54
8	15
9	7
10	56

El contenido de esta actividad contiene un contexto de datos reales y su propósito es que los alumnos exploren los conceptos de muestreo aleatorio, variabilidad muestral, muestras representativas y cuál será el efecto del tamaño de la muestra. En particular se busca que comprendan que:

- Las poblaciones están constituidas por un conjunto o universo de elementos que tienen características comunes y pueden ser descritas por medidas como centro y variabilidad.
- De las poblaciones se extraen muestras aleatorias que permiten estimar características de la población con márgenes de error que pueden ser controlados.
- Los resultados varían de una muestra a otra, pero la variabilidad se reduce conforme se incrementa el tamaño de la muestra.
- La media de la muestra se acerca más a la media de la población conforme se incrementa el tamaño de la muestra

### Instrucciones

- Calcula la media aritmética y desviación estándar de la variable OZONO de la población de las IMECAS del año 2010. Construye una gráfica de puntos o un histograma.
- Selecciona una muestra de 20 datos y calcula la media aritmética y desviación estándar de la variable OZONO. Construye una gráfica de puntos y marca sobre ella la media de la población y la media de la muestra para compararlas. Repite el proceso de muestreo varias veces y compara los resultados de la muestra con los de la población. Anota tus observaciones.
- Selecciona una muestra de 50 datos y calcula la media aritmética y desviación estándar de la variable OZONO. Construye una gráfica de puntos y marca sobre ella la media de la población y la media de la muestra para compararlas. Repite el proceso de muestreo varias veces y compara los resultados de la muestra con los de la población. Anota tus observaciones.
- Selecciona una muestra de 100 datos y calcula la media aritmética y desviación estándar de la variable OZONO. Construye una gráfica de puntos y marca sobre ella la media de la población y la media de la muestra para compararlas. Repite el proceso de muestreo varias veces y compara los resultados de la muestra con los de la población. Anota tus observaciones.
- Selecciona una muestra de 200 datos y calcula la media aritmética y desviación estándar de la variable OZONO. Construye una gráfica de puntos y marca sobre ella la media de la población y la

media de la muestra para compararlas. Repite el proceso de muestreo varias veces y compara los resultados de la muestra con los de la población. Anota tus observaciones.

6. Compara los resultados que obtuviste para el OZONO en cada tamaño de muestra (20, 50, 100 y 200 datos) con los resultados de la población. Anota tus conclusiones.

**Resultados y Discusión**

Con base en el análisis de las hojas de trabajo de cada estudiante y los archivos de computadora generados en cada actividad se construyó una tabla con las frecuencias de estudiantes que mostraban comprensión de los conceptos involucrados. Adicionalmente se muestra evidencia escrita de algunos estudiantes sobre ciertos conceptos que consideramos importante resaltar. Finalmente se muestran algunos fragmentos de una entrevista con uno de los estudiantes que participaron en el estudio.

*Las poblaciones están constituidas por un conjunto de elementos con características comunes y pueden ser descritas por medidas de centro y variabilidad.*

En las tres actividades, los estudiantes describieron en forma correcta, las poblaciones calculando el valor de una medida de tendencia central (media aritmética) y de variabilidad (desviación estándar) y construyendo una gráfica. A continuación se muestra el trabajo realizado por Héctor, -uno de los estudiantes que participaron en el estudio- en el contexto de la actividad 1 cuya población está constituida por las ventas de las 500 empresas más importantes en México.

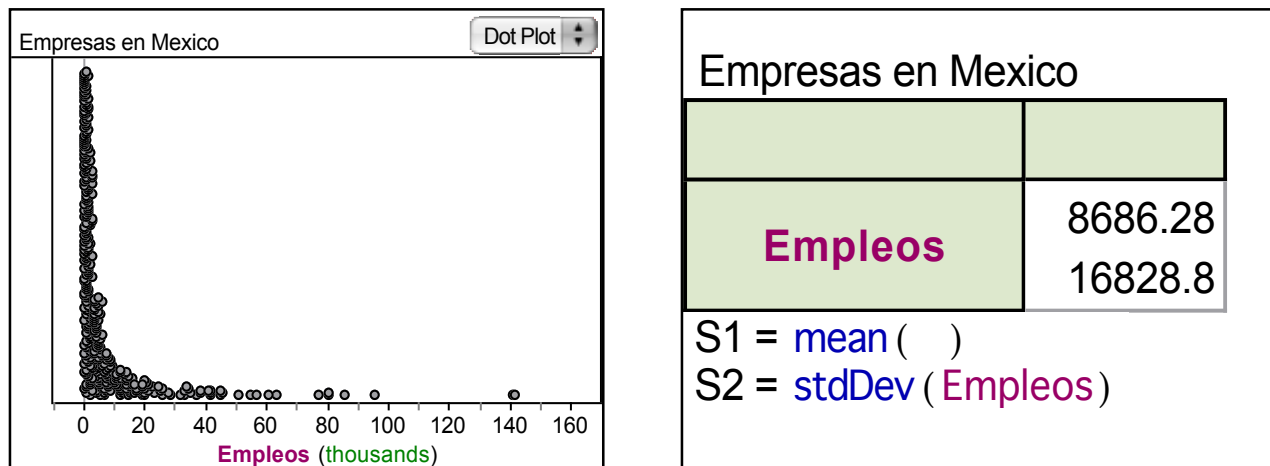


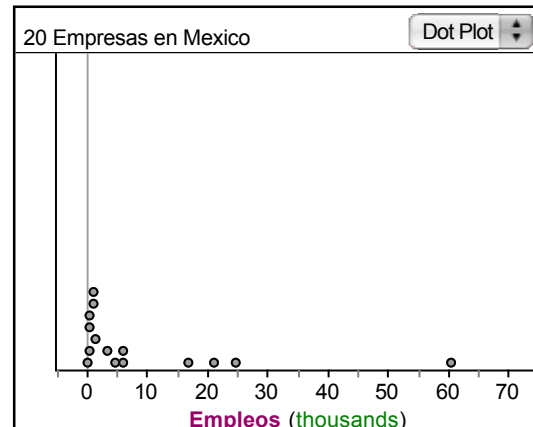
Figura 1. Población de las 500 empresas más importantes de México.

*De las poblaciones se extraen muestras aleatorias cuyos resultados varían de una muestra a otra.*

Con el propósito de que los estudiantes identificaran que las muestras que se seleccionan de una población varían de una a otra, concepto conocido como variabilidad muestral, en cada actividad se solicitó que realizaran un muestreo repetido y que observaran la gráfica que resultaba, así como la media y la desviación estándar calculada en una tabla resumen. La siguiente tabla y gráfica representan una muestra de una de las repeticiones.



20 Empresas en Mexico				
	Empresa	Pais	Ventas	Empleos
1	JP Morga...	EJ	2449.8	190
2	Promociò...	MX	641.6	369
3	Cid Mega...	MX	802.1	1333
4	Calaejac...	MX	670	323
5	Continen...	ALE	10776.5	5998
6	Pronostic...	MX	6150.5	378
7	Industria...	MX	14974.6	21032
8	GMAC M...	EJ	3787.9	
9	Softek	MX	1831.3	4578
10	ABA Seg...	EJ	3756.6	1206
11	Tiendas ...	MX	9020	24600
12	Grupo M...	MX	30643.8	16855
13	Organiza...	MX	58360.1	60322
14	ING Hipot...	HOL	838.8	
15	Transpor...	MX	509.8	1034
16	Multisiste...	MX	793.9	5821
17	ING Hipot...	HOL	838.8	
18	Luismin	CAN	1740.8	
19	Grupo M...	MX	807.9	
20	Restaura...	MX	729.3	3215



Measures from 20 Empresas ...	
<b>MEDIA_empleos</b>	8860.27
S1 = mean( )	

Figura 2. Muestra de empresas seleccionada por Milton en una de las repeticiones de la Actividad 1.

Algunas respuestas dadas por los estudiantes como explicación se muestran a continuación:

Ernesto observa una gran variabilidad en la media aritmética cuando selecciona muestras de tamaño 20 de la población.

② Observamos que cambia bastante el promedio cada vez que agarramos muestra de 20 diferentes.

José Alfredo identifica la variabilidad pero tiene una confusión con el tamaño de la población y el tamaño de la muestra.

② Podemos observar que Varía mucho el promedio conforme se toman más muestras. Los resultados obtenidos fue la media aritmética o promedio de una Población de 20 datos.

Gerardo en el contexto de la actividad 3, justifica que la variabilidad se debe a que sólo toma 20 datos de una población de 756 datos.

2- en la muestra de 20 podemos observar que cada vez que presionamos control + Y los datos y media tienden a variar mucho puesto que se van escogiendo solo 20 datos de los 756 que existen

*La media de la muestra se acerca más a la media de la población conforme se incrementa el tamaño de la muestra.*

A partir de la actividad 2 y con el propósito de que los estudiantes comprendieran que la media de una muestra (estadístico) se aproxima cada vez más a la media de la población (parámetro) conforme se incrementa el tamaño de la muestra, se solicitó a los estudiantes que sobre la gráfica de los datos muestrales, calcularan mediante una línea el valor de la media poblacional de forma adicional a la tabla resumen como se muestran en la Figura 3. De esta manera era posible comparar las medias que resultaban en cada muestra con la media poblacional y relacionar a su vez el efecto que tiene el tamaño de la muestra en la aproximación.

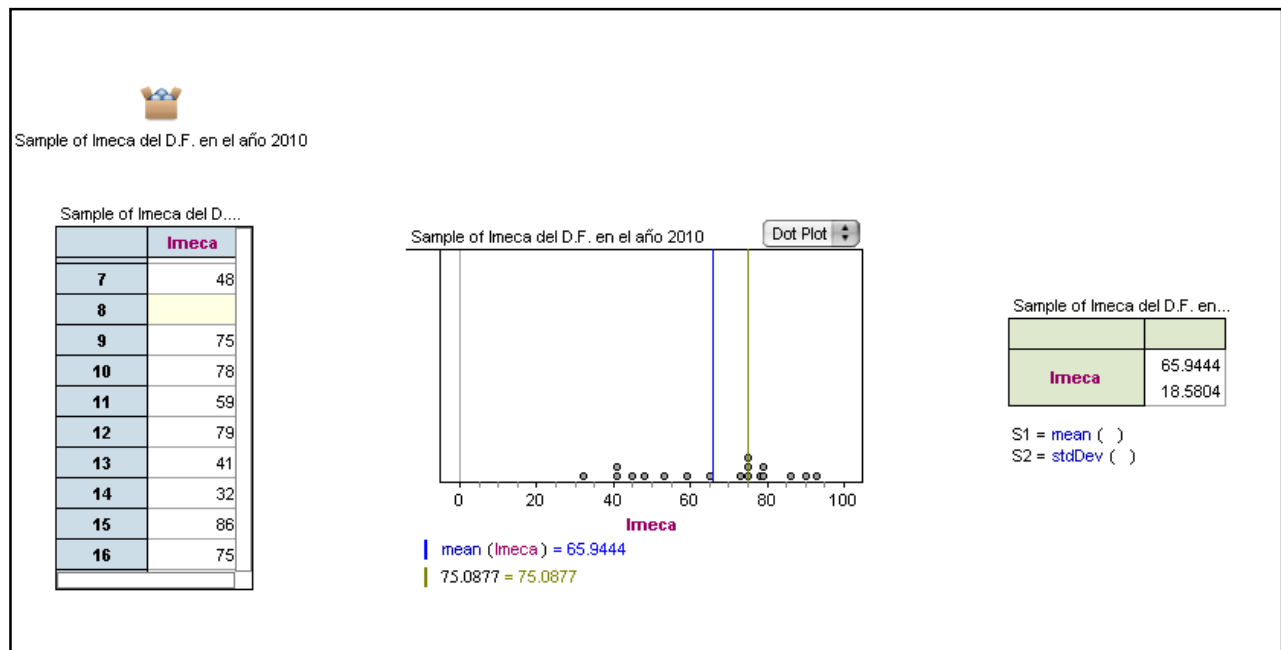


Figura 3. Trabajo realizado por Christopher en la segunda actividad.

Las respuestas de algunos estudiantes en el contexto de la tercera actividad se muestran a continuación:

3.- La media aritmetica es muy cercana a la media de la población

Alberto



3) media: 56.7821  
 Desviación: 21.7441  
 El valor de la media se pasa muy poro del valor de la Población.  
 4) media: ...

Omar

*Identificar propiedades relevantes de una distribución muestral y el efecto del tamaño de la muestra.*

En esta parte de las actividades se solicitó a los estudiantes seleccionaran al menos 500 muestras de la población, calcularan su media y desviación estándar y graficaran la distribución muestral en forma empírica para diferentes tamaño de muestra, con el fin de abordar la estimación informal de intervalos de confianza y que relacionaran en forma correcta el efecto del tamaño de muestra. Esta parte resultó de mayor complicación para los estudiantes, tanto en la etapa de construcción de la distribución muestral en el software como en la comprensión de los resultados.

A continuación se muestra la distribución muestral construida por Alfredo en la primera actividad:

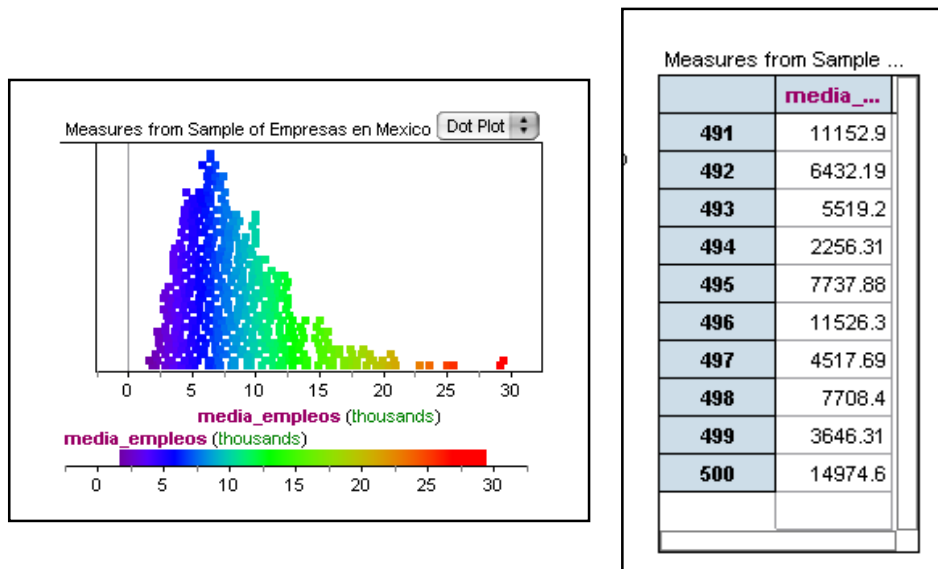


Figura 4. Distribución contruida por Alfredo en la actividad 1

Al cuestionarles sobre el significado de la distribución muestral se obtuvieron algunas respuestas como las que se muestran a continuación:

R5: Representa las medias de una Poblacion de 20 y que al sacarle media a las media) se aproxima mucho a la de toda la Poblacion

José Ángel

Presenta N°5... Representa las medidas de 20 y al sacarle medias a las medias se aproxima mucho a la población.

Milton

7. Incrementa la muestra a 50 empresas (pero sin eliminar los cálculos de las muestras de tamaño 20) y repite los pasos 3 y 4. Compara tu nuevo promedio de la distribución anterior (muestras de tamaño 20) y con el promedio de la población.

Anota tus conclusiones

El promedio es muy similar  
 Población General = 8686.28  
 muestra de 20 = 8502.69  
 || 50 = 8601.80

Edilberto

⑦ La muestra de 50 es más cercana que la de 20 a la general de la población

Conclusión

Entre más grande sea la muestra más se acercará al valor original

Ernesto

⑤ Podemos darnos cuenta que esta muestra de 200 es más similar a los datos totales. Este nos da unos datos en sumas más cercanos a la media total que la muestra de 20 y 50.

Alfredo

En general en esta parte los estudiantes notaron que al incrementar el tamaño de la muestra se aproxima cada vez más la media de las muestras a la media poblacional, una importante propiedad de las distribuciones muestrales que es importante comprender en inferencia estadística.

La Tabla 1 muestra la frecuencia de estudiantes que identificaron los conceptos correctos y razonaron en forma adecuada sobre ellos.

Tabla 1: Resultados de los estudiantes sobre los diferentes conceptos en las tres actividades.

Concepto	Frecuencia de correctas		
	Actividad 1	Actividad 2	Actividad 3
Descripción de una población mediante centro y variabilidad	15	15	15
Extraer muestras de la población e identificar la variabilidad.	10	15	15
La media de la muestra se acerca más a la media de la población conforme se incrementa el tamaño de la muestra.	11	15	14
Comprensión de las propiedades de una distribución muestral:			
a) La media de la distribución muestral se acerca más a la media de la población conforme se incrementa el tamaño de la muestra.	9	14	13
b) La variabilidad de la distribución muestral se reduce conforme se incrementa el tamaño de la muestra.	7	10	14

De la tabla se observa que a medida que se fueron desarrollando las actividades el razonamiento acerca de los conceptos involucrados fue mejorando.

El análisis de los resultados los complementamos con el análisis de entrevistas realizadas a uno de los estudiantes participantes en el estudio.

**Entrevista con Omar David**

**Investigador:**

En el problema de las 500 empresas más importantes que están instaladas en México. La media poblacional de empleos es de 8686.28 empleos, ¿cómo explicas la diferencia con la media de la muestra tomada que es de 4143?

Empresas en Mexico

	Empresa	Pais	Ventas	Empleos
496	Carvid	MX	530.9	1500
497	Total México	FRA	511.2	151
498	Ixe Casa de Bolsa	MX	511.1	273
499	Grupo ISS México	DIN	510.3	11839
500	Transportes Pitic	MX	509.8	1034

Empresas en Mexico

<b>Empleos</b>	8686.28
	16828.8

S1 = mean ( )

S2 = stdDev (Empleos)

Figura 5: Población de las 500 empresas más importantes en México, su media y desviación estándar

**Omar:** Es una muestra, sólo un parte de la población, no toda. Es muy chica la muestra, se debe tomar una muestra más grande para acercarse al valor de la media poblacional.

**Investigador:** ¿En qué te basas para establecer tal conclusión?

**Omar:** Cuando seleccioné de manera repetida varias muestras en las actividades observé que a mayor tamaño de la muestra, la media se acerca más a la media poblacional. Por ejemplo en este caso seleccioné una muestra de 20, hice la gráfica y calculé la media obteniendo un valor de 4143.

**Investigador:** Selecciona varias muestras y observa los resultados.

**Omar:** Algunos valores se acercan más a la media poblacional, otros menos.

**Investigador:** ¿Cómo explicas la variación en los resultados de las medias?

**Omar:** Algunas empresas tienen muchos empleados y sobrepasan la media y es lo que distorsiona, algunas veces se pasa y otras veces no llegan a la media poblacional. Varían pero se acerca más o menos a la media poblacional.

**Investigador:** Ahora hacemos lo mismo con una muestra más grande de tamaño 50, ¿esperarías que los resultados sean más cercanos a la media?

**Omar:** Aunque sigue habiendo variación como cuando la muestra era de 20, pero cada vez es menos.

**Investigador:** Ahora toma una muestra de 200 empresas

**Omar:** Da una media de 8877 empleos, mucho más cerca de la media poblacional [...] Incluso la forma de la muestra se parece a la población.

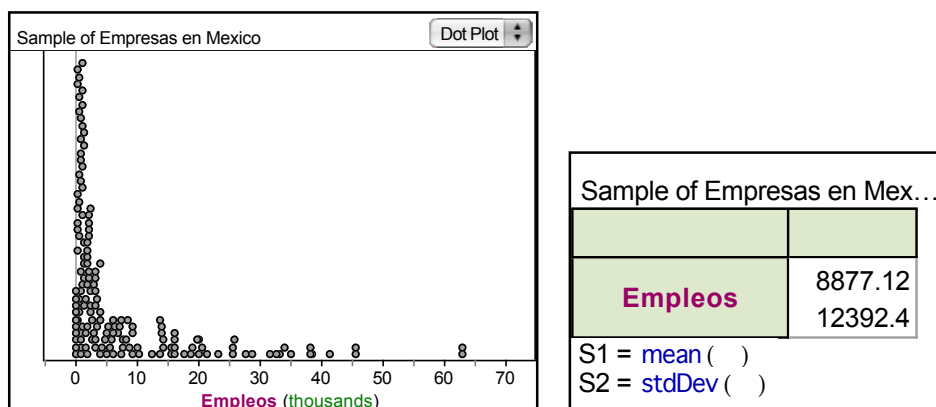


Figura 6: Muestra de 200 empresas con su media y desviación estándar

Del diálogo anterior podemos observar que Omar David ha comprendido a lo largo de las tres actividades que desarrolló en clase, que el tamaño de la muestra tiene un efecto en la variabilidad de la media muestral y que a medida que aumenta el tamaño de la muestra variabilidad se reduce y la media muestral se aproxima más a la media poblacional.

Esto ha sido posible observarlo como consecuencia de las características cognitivas del software que permite repetir la simulación de manera instantánea una gran número de veces y el estudiante puede observar ya sea a nivel gráfico como a nivel de cálculo que la media muestral varía alrededor de la media poblacional cada vez menos a medida que aumenta el tamaño de la muestra seleccionada. Incluso en la última parte Omar David ha logrado reconocer que la forma de la muestra se asemeja cada vez más a la forma de la población cuando el tamaño de la muestra es de 500, lo que implica que muestras más grandes tienden a parecerse a la población de la que provienen.

Esta apreciación es un indicador de un razonamiento informal adecuado que posteriormente se puede constatar de manera formal con expresiones matemáticas.

**Investigador:** Ahora vamos a seleccionar automáticamente 500 muestras en vez de hacerlo de una por una y vamos acumular todos los valores de las medias que resulten.

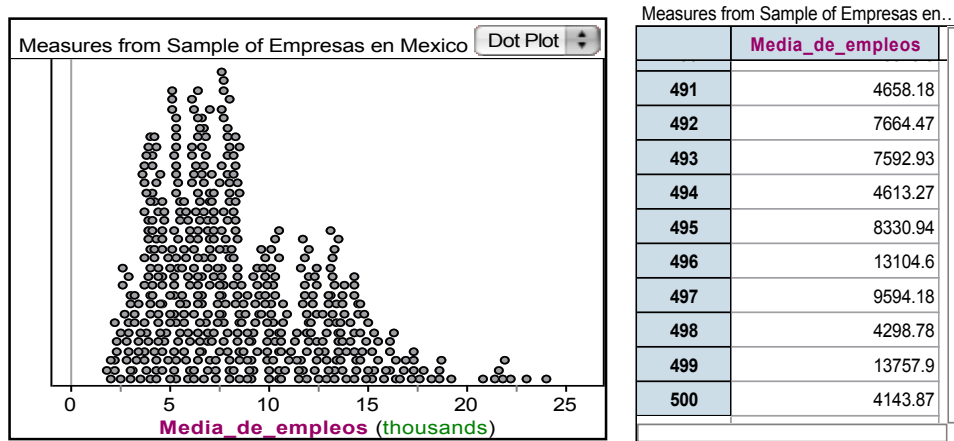


Figura 7: Distribución muestral de la población de empresa para tamaño igual a 20.

**Investigador:** Me interesa esta muestra (se señala la media más grande), observa su media. Una de las 500 muestras está ahí, ¿no te parece muy alejada?

**Omar:** Son valores que sobrepasan la media poblacional.

**Investigador:** ¿Te parece normal que resulte una media muestral tan lejos de la media poblacional?

**Omar:** Pero acá hay muchas medias cercanas a la media poblacional, sin embargo, acá hay unas que están lejos en ambos lados. Los resultados serían descontrolados. Pero otros valores no se pasan tanto, son más los valores que están cercanos a la media poblacional que los lejanos.

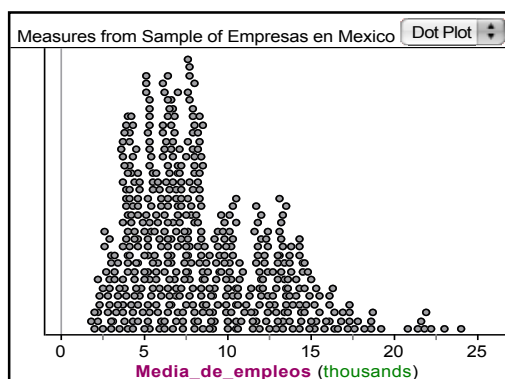
**Investigador:** De acuerdo. Si te pidiera que establecieras dos límites entre los cuales esperarías que cayera el 90% de las medias, ¿cuáles serían?

**Omar:** Del 3 al 15 (miles de empleos).

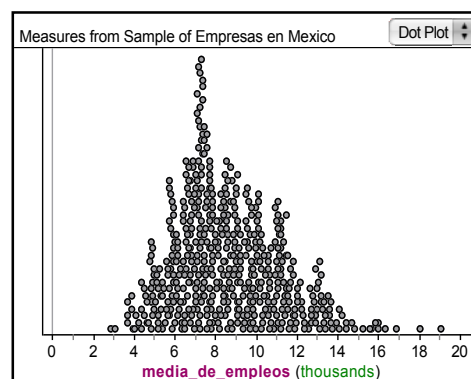
**Investigador:** Ahora yo quiero que me proporciones un intervalo con 95% de probabilidad.

**Omar:** Del 2 al 17 (miles de empleos) aproximadamente.

**Investigador:** Ahora para terminar, quiero que compares la distribución muestral que obtuviste para muestras de tamaño 20 y la que obtuviste para muestras de tamaño 50. ¿Qué diferencias observas en las gráficas.



Distribución muestral para n=20



Distribución muestral para n=50

**Omar:** En una la media es de 8524 y en la otra la media es de 8675. La de tamaño 50 está más pegada (tiene menos dispersión) a la media. Corre de 3 a 19 y en la otra de 2 a 24 aproximadamente.

**Investigador:** Ahora proporciona un intervalo del 90% en cada una de las distribuciones muestrales.

**Omar:** Del 3 al 16 en la de tamaño 20 y del 5 al 15 en la de tamaño 50 y aproximadamente.

**Investigador:** ¿Dónde es más ancho el intervalo?

**Omar:** En la de tamaño 20.

**Investigador:** ¿Por qué?

**Omar:** Porque la muestra es más pequeña, hay más dispersión.

De la entrevista anterior se puede observar que Omar David responde correctamente a la pregunta de que si le parece normal que una muestra se aleje de la media en la distribución muestral, cuando responde que si bien hay algunas muestras lejanas, la mayor parte está cerca de la media. Al solicitarle que construya un intervalos de confianza en forma intuitiva genera un intervalo adecuado con base en visualizar la distribución muestral y su dispersión, lo cual es importante pues genera una percepción correcta del significado de intervalo de confianza como aquel que contempla al parámetro, pero que cabe la posibilidad de que alguna muestra quede fuera del intervalo. Finalmente cuando se le pide que genere intervalos en distribuciones muestrales de tamaños muestrales distintos y que relacione la amplitud con el tamaño de muestra lo hace correctamente, dado que dispone de dos distribuciones en una misma columna se facilita la comparación. Sin duda estas representaciones que genera el software tiene un impacto cognitivo en la estructura mental de los estudiantes al señalar que en muestras más pequeñas hay más dispersión y por ello el intervalo es más ancho.

### **Conclusiones**

El presente trabajo se realizó como una investigación exploratoria relacionada con plantear una propuesta didáctica que considere diversas actividades en las cuales se exploren la extracción de muestras de poblaciones, el cálculo de estadísticos y la comparación con el parámetro, la variabilidad muestral y el efecto del tamaño de muestra, para finalmente lograr a realizar estimaciones informales de intervalos de confianza. Esto como un acercamiento informal al estudio de la inferencia estadística en el nivel medio superior.

No obstante las limitaciones del estudio, dado que fue realizado en un período corto y con pocos estudiantes, los resultados señalan que este enfoque informal puede ayudar a los estudiantes de bachillerato a mejorar el razonamiento inferencial informal previo al estudio de los métodos formales de inferencia; para ello es importante el diseño de actividades en el que se muestre la relación explícita entre los diversos conceptos que intervienen para realizar una inferencia mediante estimación de parámetros.

Adicionalmente, es de suma importancia el uso de una herramienta tecnológica que promueva la reorganización cognitiva mediante la interactividad, dinamismo y multiplicidad de representaciones como fue el caso de Fathom.

De esa manera, los alumnos observaron que las medias varían de una muestra a otra y que en la mayoría de los casos las medias son cercanas a la media poblacional. Adicionalmente, fueron conscientes que dicha variabilidad disminuye conforme aumenta el tamaño de la muestra, para lo cual se basaron en la desviación estándar y el rango del diagrama de puntos con las medias muestrales. La



mayor dificultad se presentó en la interpretación de las distribuciones muestrales, que es un concepto completo reportado en la literatura.

Consideramos que hace falta mucha investigación en torno al tema, sobre todo en los tipos de conexiones que los estudiantes pueden hacer con los conceptos de inferencia formal, cuando han tenido una experiencia previa como la que tuvieron nuestros sujetos de estudio.

### **Referencias bibliográficas**

- Ben-Zvi, D. (2006). Scaffolding students' informal inference and argumentation. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*, Salvador Bahía, Brazil. [CD-ROM]. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.
- Canal, G. y Behar, R. (2010). The confidence intervals: a difficult matter, even for experts. En C. Reading (Ed.), *Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society, Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics*. Ljubljana, Slovenia. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.
- Castro Sotos, A. L., Vanhoof, S., Van den Noortgate, W. y Onghena, P. (2007). Students' misconceptions of statistical inference: A review of the empirical evidence from research on statistics education. *Educational Research Review* 2, 98-113.
- Coob, G. W. y Moore, D. S. (1997). Mathematics, Statistics and Teaching. *The American Mathematical Monthly*, 104(9), 801-823.
- Dörfler, W. (1993). Computer use and views of the mind. En Ch. Keitel y K. Ruthven (Eds.). *Learning from Computers: Mathematics Education and Technology*. Nueva York: Springer Verlag.
- Finzer, W.; Erickson, T. y Binker, J. (2002). *Fathom Dynamic Statistics Software*. Emeryville, CA: Key Curriculum Press Technologies.
- Garfield, J., Joan, B. y Ben-Zvi, D. (2008). *Developing Students' Statistical Reasoning. Connecting Research and Teaching Practice*. The Netherlands: Springer.
- Inzunza, S. (2006). Meanings' Construction about sampling Distributions in a Dynamic Statistics Environment. *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*, Salvador Bahía, Brazil. [CD-ROM]. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.
- Inzunza, S. (2008). Probability Calculus and Connections between Empirical and Theoretical Distributions through Computer Simulation. *Proceedings of the 11th International Congress on Mathematical Education*. Monterrey México.
- Inzunza, S. (2010). Entornos virtuales de aprendizaje: Un enfoque alternativo para la enseñanza y aprendizaje de la inferencia estadística. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 15(45), 423-452.
- Inzunza, S. (2010). High School Teachers' Reasoning about Data Analysis in a Dynamics Statistical Environment. *Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics*. Ljubljana, Slovenia. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.
- Inzunza, S. (2011). Desarrollo del Razonamiento Estadístico con TinkerPlots. *Memorias de la XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática*. Recife Brazil.

- Konold, C. y Miller, C. (2005). *TinkerPlots Dynamic Data Exploration Software*. Emeryville, CA: Key Curriculum Press Technologies.
- Lipson, K. (2000). *The Role of the Sampling Distribution in Developing Understanding of Statistical Inference*. (Tesis Doctoral no publicada). Swinburne University of Technology.
- Liu, Y. y Thompson, P. W. (2005). Teachers' understanding of hypothesis testing. En S. Wilson (Ed.), *Proceedings of the Twenty-seventh Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Roanoke, VA. Vicksburg, VA: Virginia Tech.
- Makar, K., y Rubin, A. (2007). Beyond the bar graph: Teaching informal statistical inference in primary school. *Proceedings of the Fifth International Research Forum on Statistical Reasoning, Thinking, and Literacy (SRTL-5)*, University of Warwick, UK.
- Meletioui-Mavrotheris, M. (2004). Technological tools in the introductory statistics classroom: effects on student understanding of inferential statistics. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 8(3), 265-297.
- NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Pea, R. (1987). Cognitive Technologies for Mathematics Education. En A. Schoenfeld (Ed.) *Cognitive Science and Mathematics Education*, (pp. 89-122). Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
- Pfannkuch M. (2005). Probability and statistical inference: how can teachers enable learners to make the connections?. En G. A. Jones (Ed.). *Exploring Probability in School. Challenges for Teaching and Learning* (pp. 267-294). Mathematics Education Library, Springer Science+Business Media Inc. New York N.Y.
- Pfannkuch, M. (2006). Informal inferential reasoning. En A. Rossman y B. Chance (Eds.). *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*, Salvador Bahía, Brazil. [CD-ROM]. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.
- Pratt, D., Johnston-Wilder, P., Ainley, J., y Mason, J. (2008). Local and global thinking in statistical inference. *Statistics Education Research Journal*, 7(2), 107-129.
- Rubin, A., Hammerman, J. y Konold, C. (2006). Exploring informal inference with interactive visualization software. En A. Rossman y B. Chance (Eds.). *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*, Salvador Bahía, Brazil. [CD-ROM]. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.
- Vallecillos, A., & Batanero, C. (1997). Conceptos activados en el contraste de hipótesis estadísticas y su comprensión por estudiantes universitarios. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 17, 29-48.
- Zieffler, A., Garfield, J., del Mas, R., y Reading, C. (2008). A framework to support research on informal inferential reasoning. *Statistics Education Research Journal*, 7(2), 40-58.