DIFICULTADES INHERENTES EN EL APRENDIZAJE DE LOS CONCEPTOS DE DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL DE VECTORES EN $\Re^2$ Y $\Re^3$ USANDO SOFTWARE DINÁMICO

[*]José Guzmán Hernández
jguzman@cinvestav.mx
[*,**]José Zambrano Ayala
jzambrano@cinvestav.mx
*CINVESTAV. IPN, México
**Instituto Tecnológico de Milpa Alta, México

Palabras clave: Geogebra, Vector, Dependencia e Independencia lineal de vectores en $\Re^2$ y $\Re^3$.

Resumen

En este artículo reportamos las dificultades inherentes de los estudiantes al abordar actividades relacionadas con los conceptos de dependencia e independencia lineal de vectores en $\Re^2$ y $\Re^3$ (LD y LI, respectivamente) en ambiente tecnológico. El propósito de la investigación es determinar la influencia de este ambiente en el aprendizaje de estos conceptos, en estudiantes de nivel superior. Los marcos conceptuales en los que se apoya la investigación son: *Cambio de atención* de Mason (2008) y *Teoría de representaciones* de Duval (2006)[1]. La metodología utilizada tomó en cuenta el diseño de Actividades[2] que los estudiantes llevaron a cabo en equipos, y mediante entrevista. Nuestros resultados indican que la tecnología favorece el aprendizaje de vectores LD y LI en $\Re^2$, pero persisten dificultades de visualización cuando los vectores están en $\Re^n$, $n \geq 3$.

Introducción

En Guzmán y Zambrano (2014) se hace un análisis de cómo influyen los ambientes de papel-y-lápiz y tecnológico (como uno solo) en el aprendizaje de conceptos de Álgebra lineal. Ahí dejamos evidencia de los alcances favorables que tuvieron los estudiantes en el aprendizaje de conceptos de Álgebra lineal, comparado con la forma tradicional como se les enseña (en ambiente de papel-y-lápiz) habitualmente.

En este artículo reportamos resultados relacionados con el aprendizaje de estudiantes de nivel superior, sobre los conceptos de dependencia e independencia lineal de vectores en $\Re^2$ y $\Re^3$, en ambiente tecnológico, cuando llevan a cabo actividades relacionadas con estos dos conceptos. Estudios anteriores (e.g., Dorier, Robert, Robinet & Rogalski, 2000; Gol & Sinclair, 2010; Sierpinska, 2000, entre otros) discuten las dificultades de aprendizaje de los estudiantes cuando se enfrentan a conceptos de Álgebra lineal, en ambientes de papel-y-lápiz. Esas dificultades están asociadas con el *obstáculo del formalismo* (Dorier, Robert, Robinet & Rogalski, 2000).

---

[1] Para una descripción breve de estas dos teorías y cómo las usamos en el análisis de los datos de esta investigación en proceso, véase Guzmán y Zambrano (2014).

[2] La Actividad o Actividades (con mayúscula) en este artículo se refiere a aquellas que llevará a cabo el estudiante para que lo conduzca al aprendizaje del concepto o conceptos abstractos de Álgebra lineal.

Dado que las dificultades de aprendizaje de los estudiantes de conceptos de Álgebra lineal han sido identificadas con la enseñanza de estos en ambiente de papel-y-lápiz, investigaciones recientes (e.g., Gol & Sinclair, 2010; Sierpinska, 2000; Soto & Romero, 2011, entre otras) han hecho uso de la tecnología con el propósito de sobrepasar el *obstáculo del formalismo*. A pesar de que los resultados de estos investigadores son alentadores, en cuanto al aprendizaje de conceptos de Álgebra lineal en ambientes tecnológicos, por parte de los estudiantes, quedan aún interrogantes asociadas con el uso de estos ambientes en el aprendizaje de conceptos como los de dependencia e independencia lineal de vectores. Una de las dificultades inherentes al usar tecnología en el aprendizaje de conceptos de Álgebra lineal es: ¿cómo extrapolar el significado de los conceptos de dependencia e independencia lineal de vectores en espacios euclidianos de dimensión mayor que 3? En este artículo discutimos las dificultades inherentes en el aprendizaje de los estudiantes sobre conceptos de dependencia e independencia lineal de vectores en $\Re^2$ y $\Re^3$ cuando usan software dinámico para llevar a cabo Actividades relacionadas con los conceptos antes mencionados, y cómo éstas [las dificultades] impiden extrapolar el significado de estos conceptos a espacios vectoriales de mayor dimensión.

Marco conceptual

Las teorías que sirven de apoyo a esta investigación son de origen cognitivo: a) Teoría de *Cambio de atención* de Mason (2008) y *Teoría de representaciones* de Duval (1999, 2003 y 2006). Los datos son analizados tomando en cuenta los puntos donde confluyen las dos teorías, estos son: 1) *Asociación de objetos*, 2) *Posición cognitiva* y 3) *El estudiante le da sentido a lo que quiere conocer*. El punto 1) contempla el hecho de que el aprendizaje de conceptos (en matemáticas) puede mostrarse a través de varias representaciones; en el punto 2), el cambio de conciencia *implícita* a *explícita*[3] ocurre cuando el estudiante puede “ver” y manejar conscientemente los objetos de estudio como un todo, y el punto 3) se presenta cuando un estudiante le da sentido a lo que quiere conocer. En resumen, un estudiante que muestra dominio de los conceptos: *Atención*, *Estar consciente de…* y *Actitud*, puede evidenciar –con relativa facilidad– el paso de un registro semiótico a otro (en el sentido de Duval, 2006), del objeto matemático en estudio.

Metodología

Participantes: esta investigación, en su fase piloto, se llevó a cabo en un instituto tecnológico con estudiantes de entre 20 y 28 años de edad, que en el momento de la toma de datos hacía seis meses habían cursado Álgebra lineal en ambiente de papel-y-lápiz. Ninguno de ellos tenía experiencia trabajando con Geogebra en Tareas[4] relacionadas con Álgebra lineal, por lo que fue necesario ofrecerles entrenamiento en el uso del software Geogebra, con la finalidad de que tuvieran conocimiento en el manejo básico de los comandos, y que después sería usado este conocimiento –derivados de la capacitación– en las Actividades propias de la investigación.

[3] Una *conciencia implícita* (*no articulable*) ocurre, por ejemplo, cuando un estudiante reduce una matriz (por el método de Gauss-Jordan), pero no es *consciente* de “ver” si los vectores columna que forman esta matriz son linealmente dependientes o linealmente independientes; por el contrario, una *conciencia explícita* (*articulable*) ocurre cuando el estudiante logra “ver” la propiedad de linealidad de los vectores en una matriz reducida; entonces este estudiante pasa de una *conciencia implícita* a una *conciencia explícita*.

[4] La Tarea o Tareas (con mayúsculas) en el presente artículo, se refiere al trabajo específico que llevaron a cabo los estudiantes en las Actividades.

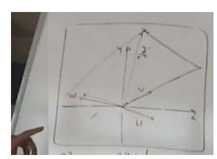
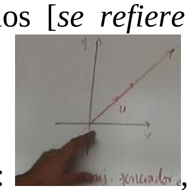
Contenido matemático de los instrumentos para el acopio de datos: la presente investigación se basa en la Actividad III: *Dependencia e Independencia lineal de vectores en* $\Re^2$ y $\Re^3$; previa a ésta se llevaron a cabo las Tareas en dos acciones, la Actividad I: *Conjunto generador de vectores en* $\Re^2$ y $\Re^3$, y Actividad II: *Combinación lineal de vectores en* $\Re^2$ y $\Re^3$. También, se les dio a los estudiantes archivos en Geogebra como parte complementaria de los instrumentos para efectuar algunas Tareas.

Implementación de las Actividades: éstas se llevaron a cabo en el salón de clases de los estudiantes y, ocasionalmente, en un área de oficina acondicionada para tal fin. Las sesiones de trabajo tuvieron una duración aproximada de entre tres y cuatro horas, las cuales fueron video-grabadas.

Diseño de las Actividades: éstas fueron diseñadas por los autores del presente artículo, con la intención de que al ser implementadas, el Investigador-Entrevistador (en adelante: I-E) llevara a cabo entrevistas que condujeran a los estudiantes al análisis y reflexión de sus afirmaciones; se propiciara discusión tendiente al aprendizaje de conceptos. Se permitió que los estudiantes expusieran sus dudas respecto a la comprensión de los ítems de la Tarea. Los estudiantes escribían las definiciones de los conceptos tal y como ellos las entendían, en los espacios que aparecen en las Actividades diseñados con esa finalidad. Al final de cada sesión de trabajo e inicio de la próxima, se hacía un análisis y discusión del trabajo previo.

Análisis de datos y discusión de resultados

Los datos que sirvieron de base para la escritura de este reporte de investigación se tomaron de las respuestas dadas por un equipo participante, de las preguntas contenidas en la Actividad III; estos fueron analizados tomando en cuenta el marco conceptual adoptado en esta investigación. Por dificultades de espacio, en este artículo discutimos sólo los datos del Equipo 3; formado por: E1, E2 y E3 (Estudiantes 1, 2 y 3, respectivamente), con la intención de que dieran interpretación a los conceptos de *Conjunto de vectores linealmente dependientes* y *Conjunto de vectores linealmente independiente en* $\Re^2$ y $\Re^3$. Los estudiantes que previamente habían llevado a cabo las Actividades I y II, contestaron la pregunta planteada por el I-E: ¿cuántas *combinaciones lineales* determinan dos vectores [no múltiplos] de $\Re^3$? El estudiante E1 contestó de la siguiente manera:

[1] E1: Es única porque los vectores decíamos que en este ejemplo:  [*señala con su mano izquierda el dibujo trazado en el pizarrón*], son dos vectores que no son múltiplos [*se refiere a los vectores* v *y* w], si fueran múltiplos sería en esta forma: , y generarían una recta; pero como no son múltiplos, se encuentra una constante multiplicada por v y una constante multiplicada por w, esas constantes son únicas que generarían otro vector [*de* $\Re^2$.]

[2] I-E: En $c\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ la *Combinación lineal* es única; es decir $c=0$ y $d=0$; pero en $c\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}-2\\-3\\3\end{pmatrix}+e\begin{pmatrix}-4\\-10\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, donde $u=\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}$, $v=\begin{pmatrix}-2\\-3\\3\end{pmatrix}$ y $w=\begin{pmatrix}-4\\-10\\1\end{pmatrix}$, ¿la terna $c=0$, $d=0$ y $e=0$ es única, o habrá otras ternas que resuelvan [*sean solución de*] esta ecuación vectorial?

[3] E1: ¡Si hay otras ternas! [*No convencido.*]

[4] I-E: Pero, ¿cómo puede asegurar lo que dice? ¿Cómo podrían descartar que no exista [*existe*] otra alternativa, además de la terna $c=0$, $d=0$ y $e=0$?

[5] E1: ¡Sí, posiblemente! [*Aún sin estar convencido*.]

[6] I-E: ¿Cómo podrían descartar [*argumentar*] que no exista [*existe*] otra alternativa, además de la terna $c=0$, $d=0$ y $e=0$?

Para contestar esta pregunta, se pidió a los estudiantes que trazaran, usando Geogebra, los vectores u, v y w; el espacio generado por cada vector (es decir, las rectas que los contiene), y el plano que contiene a los vectores u y v. El trabajo que hicieron quedó como se muestra en la Figura 1, donde plano$_u$v representa el generado por los vectores u y v.

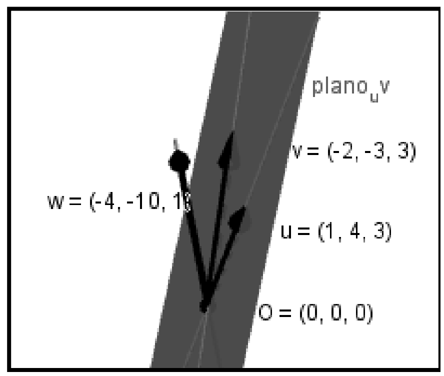


Figura 1. Vectores u, v y w de $\Re^3$ no múltiplos entre ellos.

Una vez que el Equipo 3 construyó los vectores, usando Geogebra (véase Figura 1), el investigador les preguntó si los vectores u, v y w son múltiplos entre ellos. He aquí sus respuestas:

[7] E2: ¡No! Ningún vector se encuentra en el espacio generado de [*por*] los otros dos. Los vectores no son múltiplos.

[8] I-E: Entonces, ¿cuál es su respuesta? [*Se refiere a la pregunta hecha en la línea [4]*.]

El I-E se dio cuenta de que a los estudiantes se les dificultaba contestar la pregunta de la línea [4] (con tres vectores no múltiplos de vectores de $\Re^3$), dado que ellos no lograban *estar conscientes de* que la *Combinación lineal* de esos vectores que da el *vector cero* de $\Re^3$ (Mason, 2008), es única; así, se decidió trabajar con ellos, usando vectores de $\Re^2$.

[9] I-E: Abran el archivo [*de Geogebra*] en dos dimensiones donde aparecen los vectores u, v y w y sus múltiplos cu, dv y ew [*respectivamente*]. Manipulen los vectores múltiplos, de tal manera que la *Combinación lineal* $cu+dv+ew$ sea el *vector cero* de $\Re^2$, ¿cómo identificas geométricamente que dicha *Combinación lineal* es el *vector cero*?

[10] E3: Manipulando a los puntos [*se refiere a los puntos* B, D *y* F *de la Figura 2*] para que el resultado te dé el *vector cero*.

[11] I-E: ¿Qué sucede con el vector resultante [*se refiere al vector* $cu_m dvmew$[5] *de la Figura 2*] de los vectores múltiplos?

[12] E2: ¡Se hace más pequeño!

[13] I-E: Pero, ¿qué pasa con la norma del vector resultante? [*Interrumpe E1*.]

[14] E1: La “norma” ¿es el “tamaño” del vector?

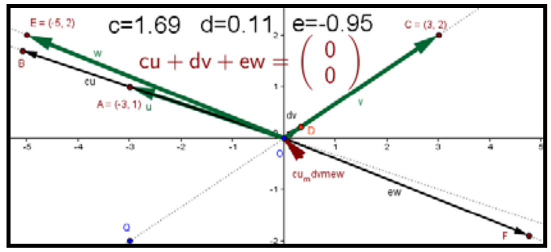
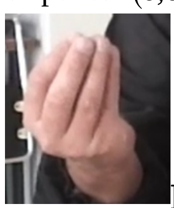


Figura 2. Manipulación de los múltiplos de los vectores u, v y w.

[15] I-E: ¡Si!

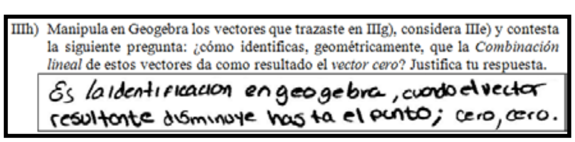
[16] E1: [*Contesta la pregunta de la línea* [13] disminuye hasta que se hace el punto $(0,0)$ [*y después de reflexionar, agrega:*], el vector resultante se hace el *vector cero*.

[17] I-E: ¿Cómo identificas [*en la pantalla de la computadora*] que el resultado de la *Combinación lineal* [*de los vectores* u, v *y* w] es el *vector cero*?

[18] E1: Su resultante [*se refiere al vector* $cu_m dvmew$ *de la Figura 2*] disminuye hasta el punto $(0,0)$ [el *estudiante hace un gesto, uniendo los dedos de su mano*: ]

A partir de las respuestas de los estudiantes en las líneas [10], [12], [16] y [18], contestan la Tarea IIIh) (véase Figura 3).

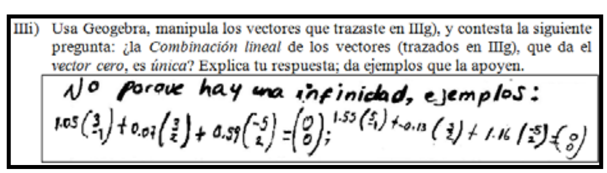
En seguida, se les pidió a los estudiantes que resolvieran la Tarea IIIi), manipulando los múltiplos de vectores (véase Figura 2). En la Figura 4 determinaron otros escalares c, d y e para los cuales la *Combinación lineal* da el *vector cero*; por lo que fueron contundentes en la respuesta de la Tarea IIIi).



IIIh) Manipula en Geogebra los vectores que trazaste en IIIg), considera IIIe) y contesta la siguiente pregunta: ¿cómo identificas, geométricamente, que la *Combinación lineal* de estos vectores da como resultado el *vector cero*? Justifica tu respuesta.

Es la identificacion en geogebra, cuando el vector resultante disminuye hasta el punto; cero, cero.

Figura 3. Combinación lineal de tres vectores, cuya resultante es el *vector cero*.



IIIi) Usa Geogebra, manipula los vectores que trazaste en IIIg), y contesta la siguiente pregunta: ¿la *Combinación lineal* de los vectores (trazados en IIIg), que da el *vector cero*, es *única*? Explica tu respuesta; da ejemplos que la apoyen.

No porque hay una infinidad, ejemplos:

$1.05\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}+0.07\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}+0.59\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$; $1.55\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}+-0.13\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}+1.16\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

Figura 4. Otras alternativas de la *Combinación lineal* de tres vectores, cuya resultante es el *vector cero*, usando Geogebra.

[5] En el panel de Vista Gráfica de Geogebra, $cu_m dvmew$ es una forma de escribir el vector $cu + dv + ew$.

Posteriormente, se pidió a los estudiantes que repitieran la Tarea; en esta ocasión, tomando en cuenta únicamente los vectores $v=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ y $w=\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$, que al manipularlos, junto con sus múltiplos, usando el software (véase Figura 5), resolvieron la Tarea IIIj) (véase Figura 6). Los estudiantes determinaron que los vectores v y w (antes mencionados), sólo cuentan con una *Combinación lineal* que da el *vector cero*, a saber: $0\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ (en la Figura 5, $dv+ew=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$).

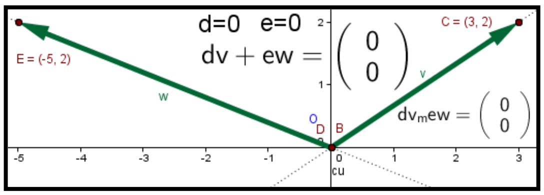
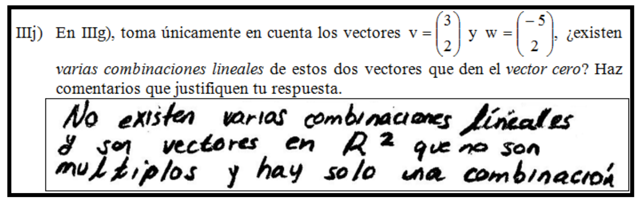


Figura 5. Combinación lineal única.

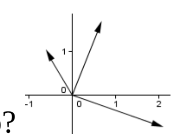


IIIj) En IIIg), toma únicamente en cuenta los vectores $v=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ y $w=\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$, ¿existen *varias combinaciones lineales* de estos dos vectores que den el *vector cero*? Haz comentarios que justifiquen tu respuesta.

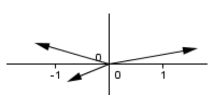
No existen varias combinaciones líneales y son vectores en R^2 que no son múltiplos y hay solo una combinación

Figura 6. Confirmación: *Combinación lineal* única.

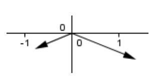
El investigador continuó con la entrevista; cuya intención fue que los estudiantes profundizaran la idea en torno a que tres vectores no múltiplos de vectores de $\Re^2$ tienen una infinidad de *combinaciones lineales*, que dan como resultado el *vector cero*; además, que dos vectores no múltiplos de vectores de $\Re^2$, tienen sólo una *Combinación lineal* que da como resultado el *vector cero*. En seguida, se muestra un extracto de la entrevista sobre lo antes comentado.

[19] I-E: ¿Cuántas *combinaciones lineales* existen en un caso como? 

[20] E1: ¡Una infinidad!

[21] I-E: Y, ¿en este caso? 

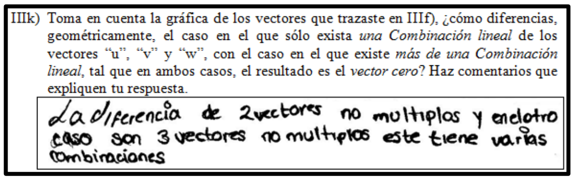
[22] E1, E2, E3: ¡Una infinidad!

[23] I-E: Y, ¿en este caso? 

[24] E1, E2: ¡Una combinación!

El Equipo 3 hizo un comparativo (desde el punto de vista geométrico), de cómo es el número de *combinaciones lineales*, de tres vectores no múltiplos de $\Re^2$, respecto de dos vectores no múltiplos de $\Re^2$; dejando ver en el primer caso que existe una infinidad de *combinaciones lineales* iguales al *vector cero*, y en el segundo caso que, sólo hay una *Combinación lineal*, cuyo resultado es el *vector cero* (véase Figura 5), cuando las constantes d y e son cero. Las figuras 7 y 8 muestran cómo los estudiantes lograron el aprendizaje pretendido.

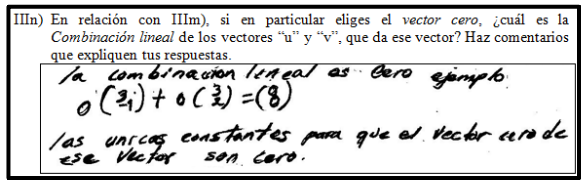
El Equipo 3 hizo un comparativo (desde el punto de vista geométrico), de cómo es el número de *combinaciones lineales*, de tres vectores no múltiplos de $\Re^2$, respecto de dos vectores no múltiplos de $\Re^2$; dejando ver en el primer caso que existen una infinidad de *combinaciones lineales* iguales al *vector cero*, y en el segundo caso que únicamente hay una *Combinación lineal*, cuyo resultado es el *vector cero* (véase Figura 5), cuando las constantes d y e son cero. Las figuras 7, 8, 9 y 10 muestran que los estudiantes lograron el aprendizaje pretendido.



IIIk) Toma en cuenta la gráfica de los vectores que trazaste en IIIf), ¿cómo diferencias, geométricamente, el caso en el que sólo exista *una Combinación lineal* de los vectores "u", "v" y "w", con el caso en el que existe *más de una Combinación lineal*, tal que en ambos casos, el resultado es el *vector cero*? Haz comentarios que expliquen tu respuesta.

La diferencia de 2vectores no multiplos y enelotro caso son 3 vectores no multiplos este tiene varias combinaciones

Figura 7. Número de *combinaciones lineales*, cuando se tienen tres vectores no múltiplos de $\Re^2$, y cuando son dos vectores múltiplos entre ellos, en $\Re^2$.

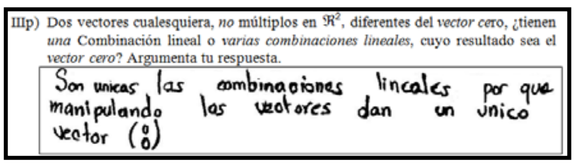


IIIn) En relación con IIIm), si en particular eliges el *vector cero*, ¿cuál es la *Combinación lineal* de los vectores "u" y "v", que da ese vector? Haz comentarios que expliquen tus respuestas.

la combinacion lineal es cero ejemplo $0\binom{3}{1} + 0\binom{3}{2} = \binom{0}{0}$

las unicas constantes para que el vector cero de ese vector son cero.

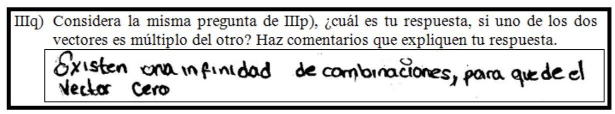
Figura 8. Combinación lineal $dv + ew = o$, de dos vectores no múltiplos de $\Re^2$, donde $d = 0$ y $e = 0$.



IIIp) Dos vectores cualesquiera, *no* múltiplos en $\Re^2$, diferentes del *vector cero*, ¿tienen *una* Combinación lineal o *varias combinaciones lineales*, cuyo resultado sea el *vector cero*? Argumenta tu respuesta.

Son unicas las combinaciones lineales por que manipulando los vectores dan un unico vector $\binom{0}{0}$

Figura 9. Combinación lineal de vectores no múltiplos entre ellos.



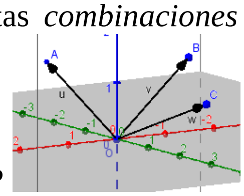
IIIq) Considera la misma pregunta de IIIp), ¿cuál es tu respuesta, si uno de los dos vectores es múltiplo del otro? Haz comentarios que expliquen tu respuesta.

Existen una infinidad de combinaciones, para que de el Vector Cero

Figura 10. Infinidad de *Combinaciones lineales* de dos vectores múltiplos entre ellos.

En seguida, el investigador exploró, junto con los estudiantes, la problemática referente al número de *combinaciones lineales* (igualadas al *vector cero*) de vectores de $\Re^3$; con la intención de que ellos lograran "descubrir" que *tres* es el número máximo de vectores no múltiplos de vectores de $\Re^3$, tales que estos vectores cuentan con sólo una *Combinación lineal* igual al *vector cero*. Para lograr este propósito, el investigador les planteó las siguientes preguntas (véase Figura 12).

[25] I-E: Ahora, extrapolemos la idea [*de combinaciones lineales*] con vectores de $\Re^3$, ¿cuántas *combinaciones lineales* existen que den el vector cero, en el caso



como?

[26] E2: Son tres vectores no múltiplos en $\Re^3$, entonces hay una *Combinación lineal*.

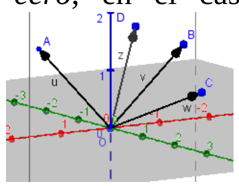
Aprovechando la respuesta precedente de E2, el investigador hizo, nuevamente, la pregunta (línea [4]).

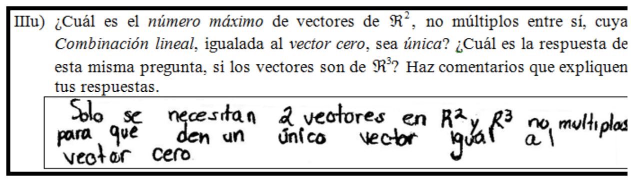
[27] I-E: ¿Cómo podrían descartar [*argumentar*] que en $c\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}-2\\-3\\3\end{pmatrix}+e\begin{pmatrix}-4\\-10\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, la terna $c=0$, $d=0$ y $e=0$ es única?

[28] E1: ¡No se descarta! Porque ahí se ve [*señala la pantalla de la computadora donde aparecen los vectores como en la Figura 1*] que los vectores no son múltiplos.

Sin embargo, cuando se hizo la pregunta (línea [25]) para cuatro vectores no múltiplos de $\Re^3$ ellos contestaron *medianamente* [*respuesta no completamente satisfactoria, véase Figura 11*].

[29] I-E: Ahora, extrapolemos la idea [*sobre combinaciones lineales*] con cuatro vectores no múltiplos de $\Re^3$, ¿cuántas *combinaciones lineales* existen para que den el *vector cero*, en el caso como?



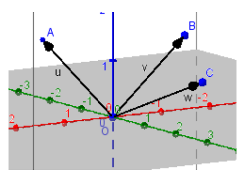

IIIu) ¿Cuál es el *número máximo* de vectores de $\Re^2$, no múltiplos entre sí, cuya *Combinación lineal*, igualada al *vector cero*, sea *única*? ¿Cuál es la respuesta de esta misma pregunta, si los vectores son de $\Re^3$? Haz comentarios que expliquen tus respuestas.

Solo se necesitan 2 vectores en R2 y R3 no multiplos para que den un único vector igual al vector cero

Figura 11. Número de vectores no múltiplos (entre ellos) que se requieren para que exista una sola *Combinación lineal* en $\Re^2$ y $\Re^3$.

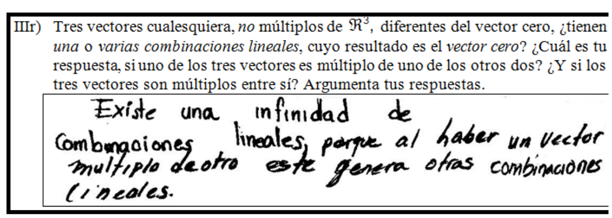
[30] E2: Son cuatro vectores no múltiplos y serán una infinidad de *combinaciones lineales*.

[31] I-E: Y, ¿si tenemos la siguiente situación?



[32] E1: Aquí son tres vectores en $\Re^3$, no múltiplos, y hay sólo una *Combinación lineal*.

La Figura 12 evidencia que si los estudiantes "ven" multiplicidad entre vectores de $\Re^3$, entonces logran determinar que existe una infinidad de *combinaciones lineales*, que dan el *vector cero*; aunque, no logran dar una respuesta satisfactoria cuando los vectores no sean múltiplos entre ellos.


IIIr) Tres vectores cualesquiera, *no* múltiplos de $\Re^3$, diferentes del vector cero, ¿tienen *una* o *varias combinaciones lineales*, cuyo resultado es el *vector cero*? ¿Cuál es tu respuesta, si uno de los tres vectores es múltiplo de uno de los otros dos? ¿Y si los tres vectores son múltiplos entre sí? Argumenta tus respuestas.

Existe una infinidad de Combinaciones lineales, porque al haber un vector multiplo de otro este genera otras combinaciones lineales.

Figura 12. La *Combinación lineal* de tres vectores no múltiplos entre ellos de $\Re^3$ es única.

Finalmente, los estudiantes, definen los conceptos: *Conjunto de vectores linealmente dependientes*, así como el concepto de *Conjunto de vectores linealmente independientes*, en términos del número de *combinaciones lineales* de los vectores que dé el *vector cero* en *Espacios vectoriales euclidianos de cualquier dimensión*. Al respecto, los estudiantes escribieron en la Tarea IIIx) (véase Figura 13) y en IIIy (véase Figura 14), la forma como aprendieron estos conceptos.

IIIx) A un conjunto de vectores de $\Re^2$ o de $\Re^3$ o de otro *espacio de vectores*, cuya *Combinación lineal* igualada al *vector cero*, *no es única*, se dice que estos vectores forman un *Conjunto de vectores linealmente dependientes*, da una definición de este concepto.

Se dice que son dependientes ya que hay diperentes combinaciones lineales que dan el vector cero

Figura 13. Definición de *Conjunto de vectores linealmente dependiantes.*

IIIy) A un conjunto de vectores de $\Re^2$ o de $\Re^3$ o de otro espacio de vectores, cuya *Combinación lineal* igualada al *vector cero*, *es única*, se dice que estos vectores forman un *Conjunto de vectores linealmente independientes*, da una definición de este concepto.

Se dice que los vectores en R^2 dan el vector cero; porque los vectores no son móltiplos y en R^3 se necesitan 3 vectores no múltiplos para generar una única combinación lineal igualada al vector cero; por eso son independientes

Figura 14. Definición de *Conjunto de vectores linealmente independientes.*

En los comentarios de los estudiantes correspondientes a las figuras 13 y 14, podemos observar que no son precisos al definir *Conjunto de vectores linealmente dependientes* y *Conjunto de vectores linealmente independientes*; sin embargo, en estas declaraciones los estudiantes dejan ver un acercamiento a la definición de los conceptos antes citados.

Después de que los estudiantes manipularon múltiplos de vectores de $\Re^2$, en la ventana gráfica de Geogebra, se les pidió que definieran, desde este punto de vista, los conceptos de *Conjunto de vectores linealmente dependientes* y *Conjunto de vectores linealmente independientes*. El Equipo 3 resolvió las Tareas IIIz) y IIIaa) (véase figuras 15 y 16). En ellas se observan las definiciones de los estudiantes en términos del número de *combinaciones lineales* iguales al *vector cero* de $\Re^2$; de conjuntos de vectores de este *Espacio vectorial.*

IIIz) La forma como manipulaste en Geogebra, los vectores: $u=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$, $v=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ y $w=\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$ en $\Re^2$: fila 7, tabla IIIa), en IIIl), cuyas *combinaciones lineales* de estos vectores, igualadas al *vector cero* no es *única*, muestra que estos vectores son *Linealmente dependientes*. Desde el punto de vista de Geogebra, da una definición de este concepto.

No es unica; porque moviendo los vectores da la combinación cero.

Figura 15. Definición de los estudiantes del concepto de *Conjunto de vectores linenealmente independientes* en $\Re^2$.

IIIaa) La forma como manipulaste en Geogebra, los vectores: $u=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ y $v=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ de $\Re^2$: fila 7, tabla IIIa), en IIIo), para que la *Combinación lineal* de estos vectores igualada al *vector cero* es *única*, muestra que estos vectores son *Linealmente independientes*. Desde el punto de vista de Geogebra, da una definición de este concepto.

Son linealmente independientes ya que existe una unica combinación lineal

Figura 16. Definición de los estudiantes del concepto: *Conjunto de vectores linealmente independiente* de $\Re^2$.

La Actividad III finaliza solicitando a los estudiantes que completen la tabla de la Tarea IIIbb), en la que se les solicita que escriban vectores de $\Re^2$ y de $\Re^3$ *Linealmente dependientes* o *Linealmente independientes*. En la Figura 17 se muestran las respuestas de los estudiantes; en la cual se observa una relación aceptable entre las columnas D y F, sin embargo, equivocan las respuestas de la fila 4 y la fila 7, ya que no son *conscientes de* que los vectores $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$ son múltiplos y por consiguiente son *Linealmente dependientes*, mientras que en el otro ítem (fila7), los estudiantes no *percibieron* que los vectores en

$\Re^3: \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-4\\0\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ se encuentran en el *plano xy*, o que los dos primeros son múltiplos y que por tanto estos vectores son *Linealmente dependientes*; en ambos ítems, los estudiantes reportan que los vectores son *Linealmente independientes* (Mason, 2008).

IIIbb)En la siguiente tabla, traza en Geogebra los vectores indicados y contesta lo solicitado en las columnas D y E; observa que estos vectores son los mismos que en IIIa). En las posiciones 4A, 4B y 4C, coloca vectores de $\Re^2$ de tu elección; en las posiciones 7A, 7B y 7C, escribe vectores de $\Re^3$, de tu preferencia, y termina por completar la tabla.

	A	B	C	D	E
	Vectores			Indica si los vectores son *Linealmente dependientes* o *Linealmente independientes*	Explica por qué los vectores son *Linealmente dependientes* o *Linealmente independientes*
	"u"	"v"	"w"		
1	$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$		Linealmente independientes	Solo existe una unica combinación lineal
2	$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$		Linealmente dependientes	Hay una infinidad de combinaciones lineales
3	$\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$	Linealmente dependientes	Existen una infinidad de la combinación lineal
4	$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$	Linealmente independientes	Solo hay una sola unica terna combinación
5	$\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\-2\\-3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-4\\4\\-3\end{pmatrix}$	Linealmente dependientes	Existen una infinidad de combinaciones
6	$\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-2\\-3\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-4\\-10\\1\end{pmatrix}$	Linealmente independientes	Solo existe una unica combinación lineal
7	$\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-2\\-4\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$	Linealmente independientes	existe solo una unica combinación lineal.

Figura 17. Vectores de $\Re^2$ y de $\Re^3$ *linealmente dependientes* y *linealmente independientes*.

Conclusiones

El análisis de los datos obtenidos del Equipo 3, en la presente investigación, nos da información acerca de las dificultades inherentes al usar tecnología en el aprendizaje de los conceptos de dependencia e independencia lineal de vectores; los números muestran que cuando el estudiante usa tecnología en la exploración de conceptos, logra un buen aprendizaje del objeto matemático en estudio, pero le resulta complicado determinar el significado de conceptos cuando la herramienta deja de proporcionales ayuda, en términos de la visualización en la pantalla de la computadora, al usar tecnología.

De la misma manera, los resultados evidencian dificultades de comprensión por parte de los estudiantes entre los significados de objetos geométricos y su relación de esos mismos registros. Cuando los estudiantes trataron de comprender algebraicamente los conceptos de dependencia e independencia lineal de vectores de $\Re^2$ y $\Re^3$ no lograron *conectar* (véase [4]) el registro algebraico con el geométrico. También, es evidente que la percepción de los estudiantes acerca de estos conceptos es aceptable para vectores de $\Re^2$, pero no para vectores de $\Re^3$. En este espacio, los estudiantes mostraron deficiencias al querer escribir de forma correcta la definición de dependencia e independencia lineal de vectores.

Los resultados hasta ahora obtenidos nos permiten conjeturar que no es fácil lograr extrapolaciones de conceptos como los de dependencia e independencia lineal de vectores a espacios vectoriales diferentes de $\Re^2$ y $\Re^3$ Sin embargo, confiamos en que con el apoyo del trabajo en ambiente de papel-y-lápiz será posible obtener buenos resultados que acerquen a los estudiantes a la extrapolación del significado de conceptos como los de dependencia e independencia lineal de vectores en espacios vectoriales de dimensión mayor que 3.

Referencias bibliográficas

Dorier, J-L., Robert, A., Robinet, J. & Rogalski, M. (2000). The obstacle of formalism in linear algebra. En J-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 85-124). Holanda: Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales* [*Sémiosis et Pensée Humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*, Peter Lang S. A. Editions scientifiques européennes, 1995]. Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Duval, R. (2003). «Voir» en mathématiques. En E. Filloy (Coord.), *Matemática educativa: aspectos de la investigación actual* (pp. 41-76). México: Fondo de Cultura Económica.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*, 103-131.

Gol, T. S. & Sinclair, N. (2010). Shifts of attention in DGE to learn eigen theory. En M. F. Pinto & T. F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 33-40). Belo Horizonte, Brazil: PME.

Guzmán, J. & Zambrano, J. (2014). Influencia de dos ambientes: el tecnológico y el de papel-y-lápiz en el aprendizaje de conceptos de álgebra lineal. En *Tecnología computacional en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática* (Cap. 22). Monterrey, Nuevo León: Publicaciones UANL. ISNB: 978-607-27-0301-8

Mason, J. (2008). Being mathematical with and in front of learners: attention, awareness and attitude as sources of differences between teacher educators, teachers and learners En T. Wood & B. Jaworski (Eds.), *The international handbook of mathematics teachers education* (Vol. 4, pp. 31-56). Rotterdam, Holanda: Sense Publisher.

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra. En J-L. Dorier (Ed.), *The teaching of linear algebra in question* (pp. 209-246). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Soto, J. L. & Romero, F. C. (2011). El concepto de transformación lineal: una aproximación basada en la conversión gráfico-algebraica, con apoyo de GeoGebra. En F. Hitt & C. Cortés (Eds.), *Formation à la recherche en didactique des mathématiques* (pp. 38-49). Canadá: Loze-Dion éditeur inc.