CB-692

Deducción de la fórmula de Herón a partir de las tangentes de los ángulos medios.

Leonel L. Palomá P. - Fabián F. Serrano S.
llpalomap@gmail.com-ffserranos@unal.edu.co
Universidad de Caldas-Universidad Nacional de Colombia,
Manizales, Colombia

Núcleo temático. Resolución de problemas de Matemáticas.
Modalidad C.B
Nivel Educativo: Formación y actualización docente
Palabras claves: Herón, triangulo, área.

Resumen

En este trabajo presentamos una demostración de la fórmula de Herón, $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ *para calcular el área de un triángulo con ángulos internos* α, β *y* γ*; longitud de los lados* a, b *y* c*,* s *semiperimetro.*

El procedimiento está basado en los puntos determinados por la circunferencia inscrita, el cálculo de las tangentes de los ángulos medios del triángulo, el teorema de los cosenos y la identidad

$Tan\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{\sqrt{1-cos(A)}}{\sqrt{1+cos(A)}}$*; así deducimos una nueva fórmula para el área del triangulo*

$$A = s^2 Tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) Tan\left(\frac{\beta}{2}\right) Tan\left(\frac{\gamma}{2}\right).$$

Analizamos luego los casos particulares: $\alpha = \beta = \gamma$*, triángulos equiláteros*

$$A = \frac{9a^2}{4} Tan^3\left(\frac{\alpha}{2}\right);$$

Si $\alpha = \beta$*, para triángulos isósceles*

$$A = \left(\frac{2a+c}{2}\right)^2 \frac{Tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{Tan(\alpha)}$$

y $\alpha = \frac{\pi}{2}$*, triángulos rectángulos*

$$A = s^2 Tan\left(\frac{\beta}{2}\right) Tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right).$$

ISBN 978-84-945722-3-4

Adicionalmente ilustramos esta demostración con una construcción en Geogebra, usando la ventana gráfica (fórmulas algebraicas) y la ventana grafica 2 (representación geométrica), que permite asociar los aspectos algebraicos a los geométricos mediante el uso de las casillas de control.

Introduccion.

La deduccion de una nueva formula para el area de un triangulo en terminos de las tangentes de los angulos medio y del perimetro, y una alternativa de deducir la formula de Heron fueron motivadas por la importancia que tiene la geometria y la trigonometria en los diferentes campos de la ciencia y la tecnologia.

Por ejemplo en la astronomia se usa para medir radios de planetas y distancia entre ellos; en cartografia para la elaboracion de mapas a partir de angulos y distancias conocidas; en la ingenieria para construccion de edificios, calculo de de fuerzas interrrelacionadas, calculo de alturas de objetos inaccesibles y pendientes de carreteras. Otras aplicaciones se encuentran la navegacion, la geodesia.

Esperamos esta nueva formula tenga su aplicación.

Problema

Dado el triangulo, figura 1, cuadro 1. con angulos α, β, γ y lados de longitud a, b y c respectivamente, con la notacion tradicional, es decir el lado a es opuesto al angulo α , lado b opuesto al anfulo β y lado c opuesto al angulo γ, deducimo una formula para su area en terminos de las tangentes de los angulos medios y su perimetro. A partir de esta deducimos la formula de Heron.

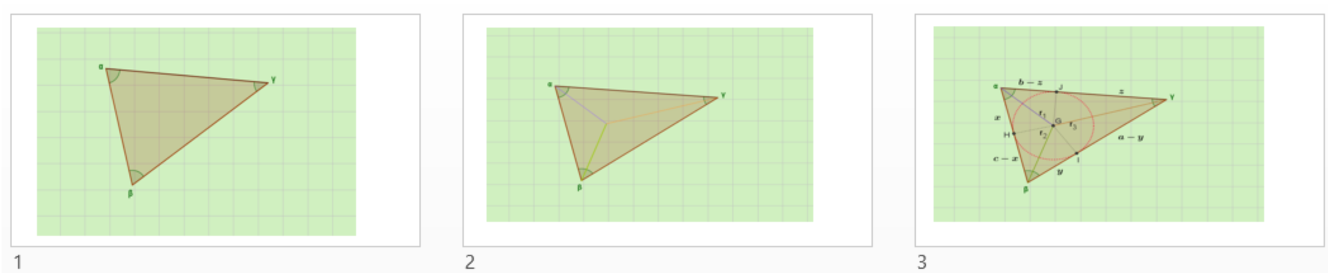

Figura 1.

En primer lugar trazamos las bisectrices, segmentos de recta p, q y r y el punto **G** incentro del triángulo en mención, figura 1, cuadro 2. Luego construimos la circunferencia inscrita

ISBN 978-84-945722-3-4

en el triángulo, figura 1, cuadro 3, la cual nos muestra que los segmentos de recta p', q', r' son perpendiculares a los lados a, b, c, respectivamente e iguales al radio de dicha conferencia.

Por otro lado la circunferencia p_1 con centro en el punto **A** y radio x, figura 2, cuadro 1, la circunferencia p_2 con centro en el punto **B** y radio y, figura 2, cuadro 2 y la circunferencia p_3 con centro en el punto **C** y radio z, figura 2, cuadro 3, indican que

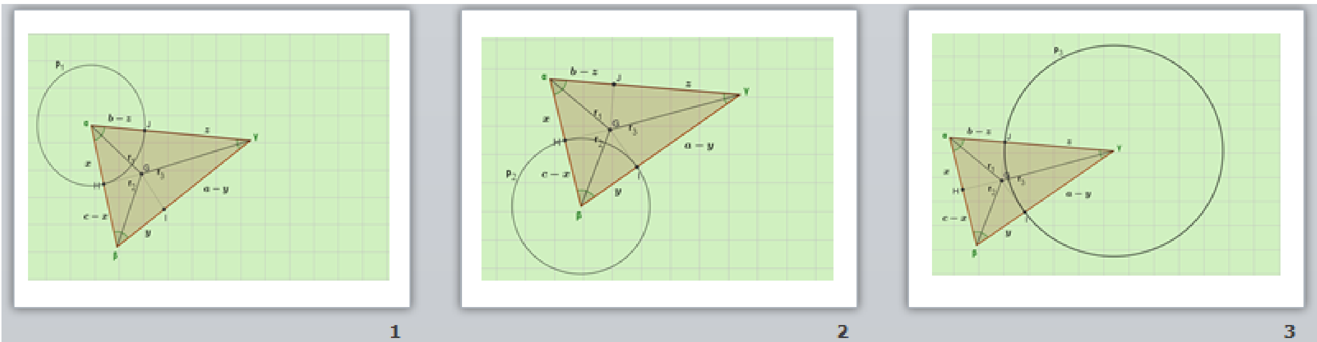

Figura 2.

i. $$b - z = x, \quad a - y = z, \quad c - x = y$$

Sumando las anteriores tres igualdades se obtiene

ii. $$x + y + z = \frac{a+b+c}{2} = s$$

Donde s es el semi perímetro del triángulo. Además se cumple que

iii. $$x + y = s - z, \quad x + z = s - y, \quad y + z = s - x$$

Una forma equivalente para las identidades definidas en (*i*), es:

iv. $$a = y + z = s - x, \quad b = x + z = s - y, \quad c = x + y = s - z$$

$$x = s - a, \quad y = s - b, \quad z = s - c$$

Así se deduce que:

v. $$x = s - a, \quad y = s - b, \quad z = s - c$$

Por otro lado el triángulo ABC se puede descomponer en tres triángulos, figura 3, cuyas alturas es el radio de la circunferencia inscrita, y las bases las longitudes de los lados del triángulo.

ISBN 978-84-945722-3-4

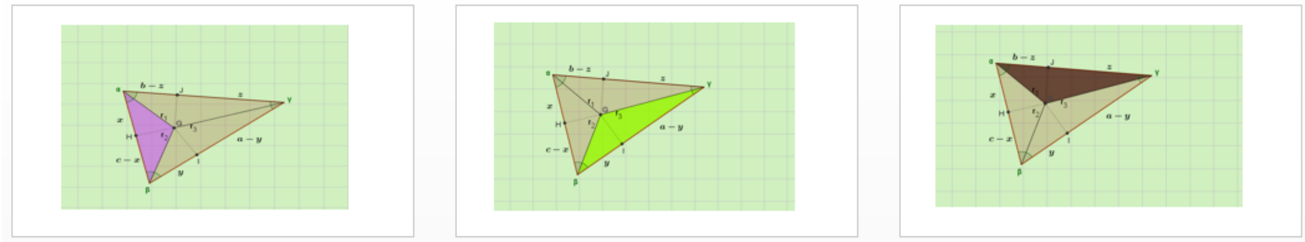

Figura 3.

El triángulo $\varDelta ABD$ tiene área $A_1 = \frac{r*c}{2}$, $\varDelta BCD$ tiene área $A_1 = \frac{r*a}{2}$ y $\varDelta CAD$ tiene área $A_1 = \frac{r*b}{2}$, lo que significa que área del triangulo $\varDelta ABC$ es

vi. $$A = A_1 + A_2 + A_3 = r\left(\frac{a+b+c}{2}\right) = r * s$$

A partir de la identidad $Tan\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{\sqrt{1-cos(A)}}{\sqrt{1+cos(A)}}$ y el teorema de los cosenos, deducimos las siguientes igualdades:

vii. $$Tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} \qquad Tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}} \qquad Tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$$

viii. $$Tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) Tan\left(\frac{\beta}{2}\right)\ Tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s^3}}$$

Y de los triángulos rectángulos determinados por los radios de la circunferencia inscrita y los ángulos medios, figura 4, encontramos:

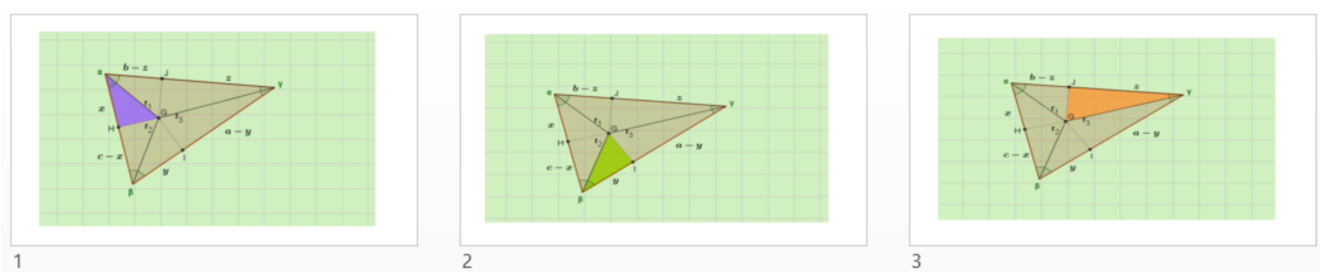

Figura 4.

ix. $$r = x\ * Tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \qquad r = (s-a) * Tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \qquad A = s(s-a)Tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

$x.\qquad r = y * Tan\left(\frac{\beta}{2}\right) \qquad r = (s-b) * Tan\left(\frac{\beta}{2}\right) \qquad A = s(s-b)Tan\left(\frac{\beta}{2}\right)$

$xi.\qquad r = z * Tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) \qquad r = (s-c) * Tan(\gamma/2) \qquad A = s(s-c)Tan(\gamma/2)$

Por tanto

$xii.\qquad A^3 = s^3(s-a)(s-b)(s-c)Tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)Tan\left(\frac{\beta}{2}\right)Tan(\frac{\gamma}{2})$

Sustituyendo (*vii*) en (*xi*)

$xiii.\qquad A^3 = [s(s-a)(s-b)(s-c)]^{\frac{3}{2}}$

$$A = [s(s-a)(s-b)(s-c)]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$xiv.\qquad A^3 = A^2s^2Tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)Tan\left(\frac{\beta}{2}\right)Tan\left(\frac{\gamma}{2}\right)$

$xv.\qquad A = s^2Tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)Tan\left(\frac{\beta}{2}\right)Tan(\frac{\gamma}{2})$

Casos particulares.

Si tomamos $\alpha = \beta = \gamma$, obtenemos un triángulo equilátero, sustituimos en (*xv*)

$xvi.\qquad A = \frac{9a^2}{4}Tan^3(\frac{\alpha}{2})$

$Si\ \alpha = \beta$, se obtiene un triángulo isósceles isósceles

$xvii.\qquad A = \left(\frac{2a+c}{2}\right)^2\frac{Tan^2(\frac{\alpha}{2})}{Tan(\alpha)}.$

Si $y\ \alpha = \frac{\pi}{2}$, obtenemos un triángulos rectángulo, en tal caso

$xviii.\qquad A = s^2Tan\left(\frac{\beta}{2}\right)Tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) \qquad con\ \ \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}.$

Bibliografía.

James Stewart, Lothar Redlin, Saleem Watson (2017) Pre calculo, Matemáticas para el cálculo Capitulo 4, 5, 6. pp 369-489.(Eds).Cengage Learning S.A. México D.F.

Fórmulas de Herón. http://mimosa.pntic.mec.es/jgomez53/matema/proteo/formulaheron.htm.

ISBN 978-84-945722-3-4

Demostración de la fórmula de Herón. Consultado 2/01/2017.
http://lizpensamientosunilaterales.blogspot.com.co/2011/01/demostracion-de-la-formula-de-heron.html. 13/01/2017.

https://www.geogebra.org.

Documento de ayuda de Geogebra. https://app.geogebra.org/help/docues.pdf 2/05/2015.

ISBN 978-84-945722-3-4