CB-659

UNA EXPERIENCIA DE APLICACIÓN DE HEURÍSTICOS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Tomás Queralt Llopis
tomas.queralt@uv.es
Universitat de València (España)

Núcleo temático: La resolución de problemas en matemáticas
Modalidad: CB
Nivel Educativo: Educación Secundaria Obligatoria
Palabras claves: resolución de problemas, heurísticos, actividades ricas, juegos de estrategia

Resumen:
La resolución de problemas en la clase de matemáticas fomenta la mejora de la competencia matemática del alumnado, dado que pone en marcha procesos de pensamiento que implican la aplicación de los conceptos que se han aprendido, la conexión con nuevos contenidos, y el establecimiento de relaciones con aquellas estrategias que ayudan a resolver otros problemas. Sin embargo, resolver un problema implica partir de un punto en el que muchos estudiantes no tienen recursos inmediatos para enfrentarse a la situación planteada con la seguridad de llegar a la solución. Queremos explicar cómo se han trabajado algunos de los heurísticos en la clase de matemáticas con alumnos de 2º de ESO para mejorar su capacidad de resolución de problemas, cómo los han resuelto los alumnos y cuales han sido sus reacciones. Nos centraremos en el heurístico "empezar por el final" mediante la resolución de juegos de estrategia, sin perder de vista su aplicación a problemas aritméticos. Hemos usado algunas variantes del juego de estrategia NIM más sencillos, hasta llegar a resolver el juego original, y mostraremos cual es la estrategia ganadora.

1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo se pretende explicar la realización de una experiencia con alumnos de 2º curso de ESO. El contexto en el que se ha llevado a cabo es un instituto de secundaria, con estudiantes de ESO, bachillerato, y ciclos formativos de electromecánica de vehículos y de gestión administrativa. Dentro de la oferta a estudiantes de 2º de ESO se incluye la posibilidad de elegir la optativa que llamamos "matemáticas avanzadas", en la cual los contenidos giran alrededor de los procesos de resolución de problemas, en lugar de centrarse en los contenidos curriculares.

Por otra parte, el contenido forma parte del proyecto de investigación llamado "Modelos de enseñanza y procesos de aprendizaje de las matemáticas: análisis multidimensional" llevado a cabo en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valencia coordinado por los doctores Ángel Gutiérrez y Luis Puig.

2. HEURÍSTICOS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

ISBN 978-84-945722-3-4

El objetivo del curso consiste en dotar al alumnado de las herramientas precisas para resolver problemas, entendiendo por herramientas aquellas actitudes que favorecen la confianza en el enfrentamiento a lo desconocido, así como aquellos heurísticos que permiten identificar las claves que nos ayudarán a resolver el problema planteado. Estas herramientas mencionadas, actitudes de confianza y heurísticos, entendemos que son los procedimientos que más cuesta aprender en el proceso de maduración de los estudiantes en esta etapa educativa, puesto que partimos de vicios adquiridos e ideas preconcebidas que impiden a los estudiantes explorar los problemas y enfrentarse a su resolución. Las ideas preconcebidas tienen que ver con el pensamiento o imagen de que un problema de matemáticas se tiene que resolver de manera rápida, siguiendo unos pasos claramente establecidos y mediante un procedimiento que permite obtener un resultado exacto (Frank, 1988). Por esto, los procesos de exploración, de búsqueda de pautas y de regularidades, la organización de la información disponible para detectarlas, el dibujo de esquemas o grafos, etc. son cuestiones que no se tienen en cuenta si no hay un trabajo previo al cual el alumnado debe estar acostumbrado, acompañado del correspondiente razonamiento y argumentación.

Debemos partir de la base que identifica un problema de matemáticas como aquella propuesta en la que a priori, se desconoce cuál es el camino que nos va a llevar con éxito a su resolución (Polya, 1981). En el caso de tener dicho camino previamente, la actividad no se puede considerar un problema sino un ejercicio. Por otro lado, un problema no puede tener un carácter tan abierto que se pueda convertir en una investigación, donde no se dan criterios para enfrentarse a ella y al resolutor se le plantean cuestiones que responder a partir de la propuesta. Esta breve clasificación implica que el concepto de problema es relativo puesto que según Schoenfeld (1985), ser un problema no es una propiedad inherente a una tarea matemática, sino que lo que hace que una propuesta sea considerada un problema para esa persona es la relación entre el individuo y la tarea.

Cuando hablamos de heurística nos referimos a los modos de comportamiento en la resolución de problemas, y los medios que se utilizan en el proceso de resolverlos, que son independientes del contenido y que no suponen una garantía de obtención de la solución (Puig, 1996). La importancia de estos modos y estos procesos son muchas veces ignorados por la práctica cotidiana del profesorado, y pensamos que merecen una atención primordial, en tanto en cuanto preparan a la mente para mejorar en los procesos de aprendizaje de cualquier contenido en cualquier etapa educativa, siendo esta una razón que permite considerar las matemáticas como contenido instrumental.

Dentro del abanico de heurísticos que se han trabajado en las clases de resolución de problemas, sin distinguir entre *herramientas heurísticas*, *sugerencias heurísticas* o *destrezas heurísticas* según la clasificación de Puig (1996), podemos citar las siguientes: haz un dibujo;

ISBN 978-84-945722-3-4

sistematizar el trabajo: organiza los datos haciendo una tabla o una lista; considera un caso, particulariza; generaliza; resolver un problema equivalente más simple; empieza por el final.

Todos estos heurísticos se proponen en un contexto determinado o simplemente mediante una propuesta aislada pero bastante simple en su enunciado. Veamos algunos ejemplos.

PROPUESTA 1: ¿Cuál es la última cifra de 7^{2017}?
PROPUESTA 2: ¿Sabrías decir si el resultado de la siguiente suma es múltiplo de 5?
$3^{444} + 4^{333}$

Por supuesto, es inútil el uso de la calculadora puesto que el valor de la potencia sobrepasa la capacidad de la pantalla, por lo que nos vemos forzados a buscar el camino que resuelva la situación. Algunos tienen la intuición de calcular las primeras potencias de 7 (hacen el problema más simple) y los menos organizan los resultados (organizan los datos haciendo una tabla) lo cual facilita encontrar pautas y regularidades. Una vez detectada la pauta, se puede determinar cuál es dicha última cifra. La potencia de estos dos heurísticos es enorme pues facilita llegar a una respuesta razonada. Pero nuestro interés está centrado en trabajar el heurístico que consiste en "empezar por el final". Un problema aritmético que se resuelve utilizando este heurístico ponemos a continuación.

3. EL JUEGO DEL NIM Y ALGUNAS VARIANTES

En nuestro trabajo nos hemos centrado en la aplicación de los heurísticos de resolución de problemas en juegos de estrategia, y concretamente en el NIM. El NIM es un juego de origen oriental que consiste en distribuir palillos en cuatro filas de 1, 3, 5 y 7 palillos respectivamente. Participan dos jugadores que van retirando del tablero alternativamente cuantos palillos quieran pero solamente de una de las filas. Sus características hacen que el juego sea muy especial:

1) Es un juego secuencial; 2) Es un juego combinatorio; 3) Es un juego finito; 4) Es de información perfecta; 5) Es de habilidad; 6) Es de estrategia; 7) Es cerrado.

Por todo ello resulta fascinante enfrentarse a un contrincante para jugar puesto que aunque inicialmente se intuya que puede ganar cualquiera de los dos contrincantes, estudiar cual es la estrategia ganadora permitirá poner en marcha mecanismos de razonamiento que son transferibles a otras situaciones similares. Sin embargo, la dificultad que entraña su análisis sin un entrenamiento inicial, nos llevó a pensar la posibilidad de trabajar previamente con otros juegos cuya estructura sea semejante y más sencillos de resolver, y donde el heurístico de resolución también sea el de "empezar por el final". Vamos a mostrar tres de dichos juegos, aunque se trabajaron muchos más, algunos con tableros muy atractivos como los propuestos en los talleres de las XVI JAEM de Gijón de 2011.

3.1 QUINCE PALILLOS

ISBN 978-84-945722-3-4

Este juego consiste en disponer de 15 palillos sobre el tablero, juegan dos personas y alternativamente quitan 1, 2 o 3 palillos. Pierde aquel jugador que quita el último palillo. Empiezan a jugar y al poco se dan cuenta de que cuando quedan 5 palillos en la mesa, a quien le toca jugar va a perder seguro. La pregunta que corresponde hacer es: ¿por qué sabemos seguro que quien juegue ahora perderá? Esta pregunta debe ir encaminada a que el jugador *analice* las distintas posibilidades que da el tablero en estos momentos, y que lo registre en su libreta.

PALILLOS	QUITA EL JUGADOR A	QUEDAN	QUITA EL JUGADOR B	QUEDAN
5	1	4	3	1
5	2	3	2	1
5	3	2	1	1

Con lo cual, haga lo que haga el jugador A, el jugador B siempre ganará. Aquí es el momento de introducir un nuevo concepto, que es el de "número perdedor", que corresponde al número de palillos que hay en la mesa de manera que a quien en ese momento le toque jugar, ese jugador perderá la partida. Se trata de un concepto relativo, ya que no se atribuye a un jugador en concreto sino a quien en ese momento vaya a jugar, lo cual a algunos alumnos les cuesta de entender. Ante la pregunta de si hay alguna estrategia ganadora, algunas opiniones van en la línea de jugar de manera que dejemos 5 palillos al contrincante, lo cual hará que éste pierda la partida.

- ¿Qué pasa si dejo 5 palillos?
- Que el otro perderá la partida
- Entonces, ¿cómo debo jugar para ganar?
- Vas quitando palillos hasta que dejas cinco en la mesa.
- ¿Y lo que hacemos al principio influye en algo?
- No, solamente vas con cuidado para cuando a ti te toca, dejar 5 palillos.

Esta conversación suele ser la más habitual, por no tener esa perspectiva de que lo que se hace en cualquier momento de la partida, determina lo que va a pasar posteriormente. Ahí la intervención del profesor puede ayudar a identificar los números que son perdedores: si averiguamos qué números son los perdedores, nos podremos asegurar cuantos palillos nos interesa dejar en el tablero cuando nos toque jugar a nosotros. Por ejemplo, 1 es perdedor, igual que 5. Sin embargo, 2, 3 y 4 son números ganadores, porque a quien le toque jugar en ese momento basta con quitar 1, 2 o 3 palillos para dejar al contrincante el último y abocarlo a perder la partida. A partir de aquí, organizamos los valores en ganadores y perdedores, y empezando por el final, ven que los números perdedores son 1, 5, 9 y 13. El resto de números son ganadores. Por tanto, puesto que 15 es ganador, el que empieza a jugar gana la partida,

ISBN 978-84-945722-3-4

si sabe cuál es la estrategia ganadora, que consiste en quitar 2 palillos y dejar al contrincante con 13 que es un numero perdedor, y seguir la secuencia sucesivamente.

Una vez que el juego ha sido resuelto, debemos ir más allá. Es decir, debemos aprovechar la situación para cambiar alguna de las reglas del juego que hacen que la resolución nos proporcione un resultado distinto. Aunque puede haber muchas más, un par de propuestas podrían ser:

- Supongamos que en lugar de quitar 1, 2 o 3 palillos podemos quitar hasta 4. ¿Cuál es ahora la estrategia ganadora?

- Supongamos que en lugar de perder el que se lleva el último palillo, resulta que en ese caso sería el ganador. ¿Cuál es ahora la estrategia ganadora?

3.2 LLEGAR A CIEN

Es un juego para dos participantes, que consiste en que uno de ellos dice inicialmente un número entre 1 y 10. A continuación, el segundo jugador dice otro número entre 1 y 10 y se lo suma al que ha dicho el primer jugador. De nuevo el primer jugador dice un valor entre 1 y 10 y lo suma al resultado de la suma del segundo. Y así sucesivamente. Gana el primer jugador que llega a 100.

Tras un par de partidas por parejas, y tras pedir públicamente que si alguien detecta alguna cosa que ayude a ganar la diga, los alumnos proponen alguna estrategia que piensan les va a ayudar a ganar. "Yo siempre digo un número que al sumarlo con lo que dice mi contrincante me dé 10", por ejemplo. Pero alguien se da cuenta de que si decimos 89, entonces diga lo que diga el contrincante nosotros vamos a ganar. Por tanto, podemos identificar este valor como número ganador. Debemos pedir que analicen la jugada empezando por 89.

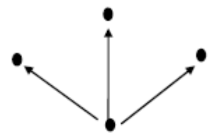
Por lo tanto, el jugador que consigue llegar a 89 va a ganar seguro, diga lo que diga el contrincante. En este punto volvemos a preguntar qué pasa al principio de la partida, si debemos decir algún número en concreto o dará lo mismo. Y pese a tener la experiencia del juego anterior con palillos, muchos alumnos aún no tienen asimilada la dependencia del resultado en función de los valores que se usan al inicio del juego. Y tampoco han hecho un análisis de cuáles son los valores que van a permitir ganar. Solamente algún estudiante aislado encuentra la secuencia de números ganadores, empezando por el trivial: 100, 89, 78, 67, 56, 45, 34, 23, 12, 1. Por tanto, si 1 es un número ganador, quien empieza gana, si sabe cuál es la secuencia de números ganadores.

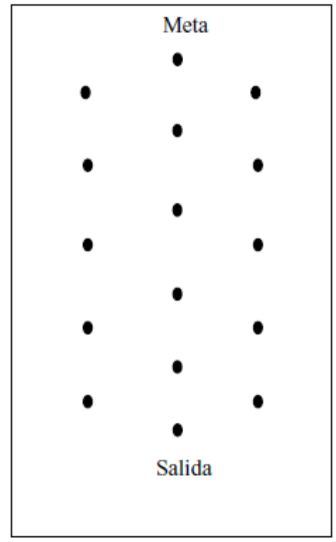
ISBN 978-84-945722-3-4

Por supuesto debemos introducir aquellas modificaciones en las reglas del juego que hacen cambiar la búsqueda de la estrategia ganadora y por tanto, resolver el juego de usando el heurístico de "empezar por el final": "Pierde el primer jugador en llegar a 100", o bien "Se puede decir un número entre 5 y 10".

3.3 LA ESCALADA

Este es un juego para dos personas, de manera que una de ellas coloca su ficha en el punto de salida y avanza una posición siempre hacia arriba en vertical o diagonal. Gana el primero que llega al punto señalado como meta.





La resolución del juego pasa por identificar cuáles son los puntos que podemos identificar como ganadores y cuáles como perdedores. Un punto es perdedor si moviendo la ficha a cualquier otra posición el jugador a quien le toca intervenir pierde con toda seguridad, mientras que un punto es ganador si el jugador correspondiente mueve su ficha al punto adecuado que hará que su contrincante pierda, y por tanto, él gane la partida. La resolución del juego pasa por identificar los puntos ganadores y perdedores empezando por el final. Identificando cada punto vemos que el punto de salida es ganador, por lo que podemos deducir que el que empieza el juego ganará si sabe usar la estrategia ganadora.

La dificultad de nuevo radica en identificar que cada punto es ganador o perdedor, y que para analizar el carácter de cada punto debemos usar el heurístico de "empezar por el final". En la mayoría de los casos hemos visto que debemos insistir en que los alumnos realicen este proceso, ya que no resulta espontáneo fijar la atención en el estudio del carácter de cada punto empezando por los últimos. El profesor debe volver a recordar y orientar el trabajo en este sentido, lo cual nos indica que este procedimiento no resulta sencillo para los estudiantes, y nuevamente debemos conducir el proceso.

4. RESOLUCIÓN DEL NIM

Una vez realizado el trabajo previo con actividades sencillas en las que el principal heurístico que nos permite la resolución del juego es el de "empezar por el final", iniciamos el estudio del juego del NIM original. Como siempre, pedimos a los alumnos que jueguen y que nada más detecten alguna situación que ellos identifiquen como "curiosa" o que facilite ganar, la ponemos en la pizarra para compartirla con toda la clase y la analizamos. Sobre todo nos interesan aquellas situaciones en las que ellos vean claramente que cuando uno de los

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

contrincantes se enfrenta a ella, haga lo que haga va a perder. Este tipo de situaciones las estamos llamando "situaciones perdedoras" o también la podemos llamar "situación fatal".

Una de las primeras situaciones fatales identificadas es la que tiene dos palillos en dos filas distintas. Vamos a codificar esta situación como (2,2) para identificarla claramente y tener todos la misma notación. ¿Por qué sabemos que esta situación es fatal? Pedimos a los alumnos que hagan el análisis correspondiente, que se puede representar de la siguiente forma:

SITUACIÓN INICIAL	JUGADOR A	JUGADOR B
(2,2)	(1,2) quita un palillo	(1,0) quita dos palillos de la otra fila y gana
(2,2)	(0,2) quita dos palillos	(0,1) quita un palillo de la otra fila y gana

Puesto que da igual de qué fila el jugador A retira los palillos, aquí acabaría el análisis de la situación (2,2), con lo cual se demuestra que esta situación es fatal. Otras situaciones fatales que surgen y que pedimos su análisis como la (3,3):

SITUACIÓN INICIAL	JUGADOR A	JUGADOR B
(3,3)	(2,3) quita un palillo	(2,2) quita un palillo de la otra fila, dejando al contrincante la situación fatal ya analizada.
(3,3)	(1,3) quita dos palillos	(1,0) quita tres palillos de la otra fila y gana
(3,3)	(0,3) quita tres palillos	(0,1) quita dos palillos de la otra fila y gana

Siguiendo este proceso, vamos identificando todas aquellas situaciones fatales que nos van surgiendo, y por intuición los alumnos identifican las otras situaciones fatales que tienen palillos en dos filas: (4,4) y (5,5). Otras situaciones fatales con palillos en tres filas que los alumnos detectan fácilmente son la (1,1,1), o bien la (1,2,3). El análisis de la segunda sería un poco más largo puesto que se debe estudiar todas las posibilidades.

Este proceso lo que viene a indicarnos es que, en primer lugar, dada una situación de palillos en el tablero, esta situación es fatal, con lo cual aboca a perder al participante que en ese momento le toca jugar, o bien la situación es ganadora, puesto que si se conoce la estrategia ganadora, el participante puede dejarle al contrincante una situación fatal retirando los palillos adecuados. Es decir, estamos en una situación binaria, en la que cada situación es fatal o es ganadora. En segundo lugar, ante una situación que no sea fatal, el participante debe jugar intentando dejar en el tablero una situación fatal para el contrincante, o bien un solo palillo que le lleva a ganar directamente.

ISBN 978-84-945722-3-4

La búsqueda de las situaciones fatales puede ser un poco larga, por lo que las vamos a poner a continuación para que queden claramente identificadas:

(2,2)	(3,3)	(4,4)	(5,5)				
(1,1,1)	(1,2,3)	(1,4,5)	(2,4,6)	(2,5,7)	(3,4,7)	(3,5,6)	
(1,1,2,2)	(1,1,3,3)	(1,1,4,4)	(1,1,5,5)	(1,2,4,7)	(1,2,5,6)	(1,3,4,6)	(1,3,5,7)

Por lo tanto, vemos que la posición inicial es una situación fatal, por lo cual, en el caso de conocer la estrategia ganadora, el que empieza la partida se ve abocado a perder. Incluimos en un anexo la demostración de la condición necesaria y suficiente para que una situación sea fatal.

5. CONCLUSIONES

El resultado de la experiencia ha sido satisfactorio por diferentes motivos: con el juego hemos disfrutado; con el juego hemos aprendido muchas cosas, además de matemáticas; con el juego hemos estimulado el aprendizaje; con el juego hemos estructurado el pensamiento; con el juego hemos aprendido un heurístico de los más importantes en el aprendizaje de las matemáticas.

Debemos resaltar que el interés de la propuesta está centrado en los procesos de razonamiento, en lugar de centrarse en los algoritmos. Son los procesos que tienen que ver con la deducción, la búsqueda de alternativas, la eliminación de los casos desfavorables, la búsqueda de los casos favorables, el análisis de las diferentes posibilidades ante una determinada jugada o intervención. Son procesos mentales necesarios para incorporar a la práctica cotidiana de cualquier persona, que ayuda a tomar decisiones fundadas y a mejorar el razonamiento.

La experiencia nos ha enseñado que estos procesos no son sencillos ni intuitivos para los estudiantes, sino que deben ser trabajados de forma reiterada para que se incorporen como una herramienta más al bagaje mental de cada individuo, puesto que no se trata de un aprendizaje fácil. Usar una herramienta heurística requiere su dominio y su control para apreciar en qué momento debe ser usada y utilizada de forma adecuada, y hemos comprobado cómo “empezar por el final” no siempre se utiliza cuando se necesita para resolver el problema, ya que el cambio de contexto dificulta la detección de la necesidad de su uso. Por ello, apuntamos a continuación una cita que nos resulta muy reveladora en el sentido de lo que hemos estado tratando:

Las investigaciones indican que, muchas veces, los errores de los estudiantes en la resolución de problemas no se deben a la falta de conocimientos matemáticos, sino a un uso ineficaz de lo que saben.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

(Garofalo i Lester, 1985)

REFERENCIAS:

FRANK, M. (1988): La resolución de problemas y las creencias matemáticas. *Arithmetic Teacher* Vol. 35, nº 5. 32-34

GAROFALO, J., LESTER, F. (1985): Metacognición, monitor cognitivo y rendimiento matemático. *Journal for Research in Mathematical Education*. Vol 16, nº 3. 163-176.

POLYA, G. (1981): *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

PUIG, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada: Mathema.

SCHOENFELD, A. (1985): *Mathematical problem solving*. Florida: Academic Press.

BIBLIOGRAFIA:

PUIG, L, CERDÁN, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares.* Madrid: Síntesis. Colección: Matemáticas, cultura y aprendizaje.

POSAMENTIER, A., KRULIK, S. (2009). *Problem Solving in Mathematics*. USA: Corwin.

GUZMÁN, M. DE: (1991) *Para pensar mejor*, Barcelona: Labor.

UNA EXPERIENCIA DE APLICACIÓN DE HEURÍSTICOS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Tomás Queralt Llopis
Universitat de València
tomas.queralt@uv.es

ANEXO 1. ESTRUCTURA MATEMÁTICA DE LA RESOLUCIÓN DEL NIM

A la vista de la estructura del juego, según el cual ante una determinada disposición de los palillos, podemos identificar esta situación como "fatal" o perdedora, o como una situación que nos permite ganar el juego, nos lleva a pensar en una situación binaria. Por ello recurrimos a la base 2 para identificar si una situación es fatal o no lo es. Fijémonos en que la primera situación fatal, salvo la impropia cuando nos queda 1 palillo, es la (2,2) como hemos analizado. Esta disposición de los palillos en binario sería:

$$\begin{array}{cccc} 2 & \rightarrow & 1 & 0 \\ 2 & \rightarrow & 1 & 0 \end{array}$$

Cualquier palillo que elimine el contrario deja la situación favorable a ganar, y vemos que aquí hay la segunda columna un número par de elementos. Por tanto, podemos pensar que cuando hay un número par de elementos en cada columna la situación es fatal.

ISBN 978-84-945722-3-4

¿Cómo podemos identificar si una situación concreta es fatal o no? Por ejemplo, dada la situación (2,5,6), ¿se trata de una situación fatal? Si pasamos cada valor numérico a binario, nos quedaría una situación por filas

2	→		1	0
5	→	1	0	1
6	→	1	1	0
		2	2	1

Si contamos cuantos elementos hay por columnas en cada posición, vemos que hay un número par de elementos en la segunda y en la tercera columna, mientras que en la primera hay un número impar. Esto nos indica que esta situación **no es fatal**.

A la vista de estos indicios, nos planteamos la siguiente hipótesis que vamos a demostrar:

La condición necesaria y suficiente para que una situación sea fatal es que al pasar a binario el número de palillos de cada fila, en cada valor posicional debemos tener una cantidad par, a excepción de las situaciones (1), (1,1), (1,1,1) y (1,1,1,1).

Las situaciones (1) y (1,1,1) son situaciones fatales que no cumplen la condición, mientras que las situaciones (1,1) y (1,1,1,1) cumplen la condición pero no son fatales, por lo que resultan excepciones a regla.

- **Condición necesaria**.

Si pasamos cualquiera de las situaciones identificadas como fatales a binario, podemos comprobar que se cumple la condición. Pongamos por caso la situación inicial (1,3,5,7)

1	→			1
3	→		1	1
5	→	1	0	1
7	→	1	1	1
		2	2	4

Vemos que en las tres columnas hay un número par de elementos. Lo mismo ocurre con todas las situaciones identificadas como fatales.

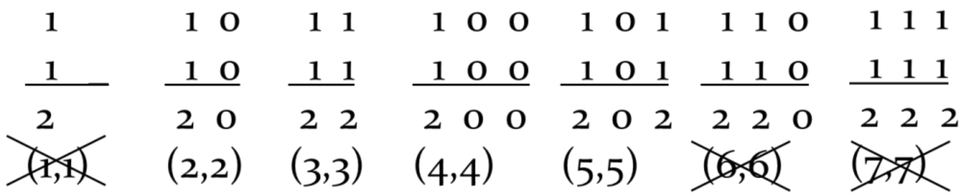
- **Condición suficiente**.

Debemos comprobar que todas las situaciones posibles en las que hay un número par de elementos en cada valor posicional, entonces se trata de una situación fatal. Para ello, vamos

ISBN 978-84-945722-3-4

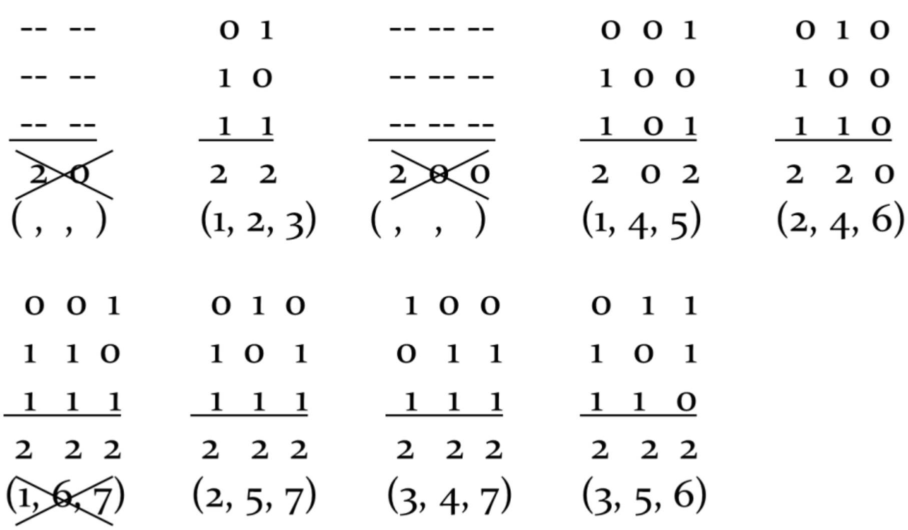
a revisar todos los casos posibles de forma organizada teniendo en cuenta las distintas situaciones según el número de filas con palillos.

1. Con dos filas de palillos. El número de elementos en cada valor posicional, para que sea par, serán 0 ó 2, por supuesto nunca más de 2. Los posibles resultados pueden ser 2, 20, 22, 200, 202, 220, 222. Y esto puede ocurrir en los siguientes casos:



Hemos tachado aquellas situaciones cuya disposición en palillos no se puede dar o bien se corresponde con una excepción.

2. Con tres filas de palillos. El número de elementos en cada valor posicional puede sumar 0 ó 2 para que sea par, ya que nunca pueden ser más de 3. Los posibles resultados pueden ser 20, 22, 200, 202, 220, 222.



3. Con cuatro filas de palillos. El número de elementos en cada valor posicional puede sumar 0, 2 ó 4. Los posibles resultados pueden ser: 4, 20, 22, 24, 40, 42, 44, 200, 202, 204, 220, 222, 224, de los cuales podemos excluir las situaciones 20, 40, 42, 44, 200, 220 que no pueden darse por tener cuatro filas y por la cantidad inicial de palillos en cada fila.

ISBN 978-84-945722-3-4

$$
\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \hline 4 \\ \cancel{(1,1,1,1)} \end{array}
\quad
\begin{array}{c} 01 \\ 01 \\ 10 \\ 10 \\ \hline 22 \\ (1,1,2,2) \end{array}
\quad
\begin{array}{c} 01 \\ 01 \\ 11 \\ 11 \\ \hline 24 \\ (1,1,3,3) \end{array}
\quad
\begin{array}{c} 001 \\ 001 \\ 100 \\ 100 \\ \hline 202 \\ (1,1,4,4) \end{array}
\quad
\begin{array}{c} 001 \\ 001 \\ 101 \\ 101 \\ \hline 204 \\ (1,1,5,5) \end{array}
\quad
\begin{array}{c} 001 \\ 011 \\ 100 \\ 110 \\ \hline 222 \\ (1,3,4,6) \end{array}
\quad
\begin{array}{c} 001 \\ 010 \\ 101 \\ 110 \\ \hline 222 \\ (1,2,5,6) \end{array}
$$

$$
\begin{array}{c} 001 \\ 010 \\ 100 \\ 111 \\ \hline 222 \\ (1,3,4,7) \end{array}
\quad
\begin{array}{c} 001 \\ 001 \\ 110 \\ 110 \\ \hline 222 \\ \cancel{(1,1,6,6)} \end{array}
\quad
\begin{array}{c} 001 \\ 011 \\ 101 \\ 111 \\ \hline 224 \\ (1,3,5,7) \end{array}
$$

Con este análisis queda demostrada la hipótesis de la que partimos.

ISBN 978-84-945722-3-4