PANEL: GEOMETRIA

COORDINADOR: RAFAEL PEREZ GOMEZ.
PANELISTAS: EMILIO LLUIS.
FRANCISCO HERNAN.
JOSEP MARIA FORTUNY.
COLABORACION DE: CEFERINO RUIZ GARRIDO.

MOSAICOS DEDUCTIVOS

Emilio Lluis
Universidad de México. México.

¿Por qué la enseñanza de la geometría es tema obligado en prácticamente toda reunión sobre enseñanza de las matemáticas? Probablemente sea porque, en el fondo, todos reconocemos que la geometría es una de las más grandes creaciones de la humanidad y que como tal, nadie la puede ignorar. Alberto Barajas afirma que, más aún, todo ser humano tiene el *derecho* de penetrar y adentrarse suficientemente en el mundo matemático hasta sentir que existe algo de lo que se puede estar seguro, algo fuera de toda duda. La matemática es la única cosa en que todos los hombres están de acuerdo. De ahí su gran valor.

Pero no sólo esto. En lo personal me gusta más hablar de "la geometría en la enseñanza" que de la enseñanza de la geometría para con ello recalcar su excepcional *valor formativo*. Conviene recordar las palabras de Polya en el discurso inaugural del ICME Berkeley 80: "I repeat with conviction that *mathematics promotes the mind*". Y agrega que esto no es incondicionalmente correcto. Hay una condición: "Mathematics promotes the mind provided that it is taught and learned appropiately". E insiste en que su enseñanza debe ser formativa. Es lo importante.

En particular, la geometría siempre se consideró como una de las ramas más formativas de las matemáticas. Sin embargo, pese a ello, en muchos de nuestros países su enseñanza se ha deteriorado notablemente en las últimas décadas. Hay lugares en los que prácticamente ha desaparecido y lo que es peor, a veces lo que se trata de enseñar es más perjudicial que beneficioso.

Aunque bien conocidas, pienso que conviene recordar algunas de las causas que han conducido a la situación actual.

Entre las causas extramatemáticas que afectan de hecho a toda la enseñanza destacan la masificación y el gran cúmulo de conocimientos que constantemente se están agregando a los planes de estudio, sin olvidar, desde luego, las demasiado frecuentes reformas.

De las causas, ya de tipo intrínseco, posiblemente la que más ha afectado es el uso del tradicional método Euclides-Hilbert. Puntos, rectas y planos son elementos de una estructura matemática nada elemental. Aun cuando no se mencionen los conceptos básicos, una presentación de temas de geometría elaborada sobre éstos presenta bastantes problemas. La axiomática de Birkhoff, en este sentido, allanó enormemente el camino. El método basado en una axiomática de transformaciones, muy de moda durante cierto tiempo, comparte las mismas dificultades del de Euclides-Hilbert. El método cartesiano, por sus requerimientos algebráicos, está vedado en niveles elemental y medio básico.

Otra de las causas que han conducido a la situación actual de la enseñanza de la geometría (a su vez consecuencia de lo antes comentado) es que en casi ningún país de los aquí representados se cuenta con "cursos completos" de geometría. Antes los hubo en todos. Ahora la geometría está fraccionada y distribuida de extraña manera en diversos cursos de matemáticas generales. Lo malo es que cuando se hizo el cambio, en muchas partes no se alteró ni la presentación ni el contenido. De hecho el contenido sólo se alteró estudiando "hasta donde se alcance". Así el contenido tradicional quedó reducido a unos cuantos temas del principio. Poco más de "por dos puntos pasa una recta" y "dos triángulos son congruentes...".

Ahora bien, así las cosas llegó el golpe mortal con la "new math" o "mathématique moderne" (según de donde viniera la moda) y el desaforado grito de "Abajo Euclides" (todo esto salpicado de "conjuntivitis", del deseo de hablar de matemáticas "desde su principio", etc, etc).

Desde luego hay muchos más factores que influyeron pero ahora prefiero continuar con comentarios acerca de alguno de los caminos que se siguen para tratar de revivir el valor de la geometría en la enseñanza.

Con lo que se ha logrado obtener mejores resultados, según mi punto de vista, ha sido con una adecuada selección de temas de geometría y presentados como lo que Choquet llamaba *islotes deductivos* y que nosotros preferimos llamar, desde hace ya más de veinte años, *mosaícos deductivos*. (Más adelante comentaré el cambio de nombre). Trataré de describir el método.

Un mosaico deductivo no es otra cosa que una "teoría matemática" en miniatura; axioma-teorema-demostración. Con más detalle:

Un mosaico deductivo (usamos la palabra mosaico como una sola pieza, no como conjunto de piezas que también recibe el mismo nombre de mosaico) consta, en primer lugar, de una *proposición* (teorema, propiedad, afirmación, resultado o cualquier otro sinónimo). En segundo lugar, se deben tener los *axiomas locales* y finalmente (y esta es la parte medular) las *demostraciones* que conduzcan de los axiomas al resultado.

Claro está que podemos elaborar mosaicos tan aburridos y tan inútiles como queramos. O tan completos como queramos (por ejemplo "toda" la geometría de Euclides con los axiomas de Hilbert). Pero no se trata de esto. El éxito de esta forma de enseñar geometría consiste en la elección adecuada de cada mosaico y, posteriormente en un ensamblaje de distintos mosaicos de tal forma que con ello se cubra un tema importante.

En la elaboración de cada mosaico se debe tener especial cuidado en que la proposición que se va a demostrar sea atractiva para el alumno. Debe ser clara, bella, sorpresiva, sencilla, no trivial. Si es posible que la pueda "descubrir" (convenientemente guiado). Después, los axiomas locales, es decir, lo que supondremos cierto en el mosaico, deben ser fácilmente aceptables, intuitivos, tan familiares como sea posible. Pocos. Es esencial que el alumno esté consciente que es algo que estamos suponiendo cierto. Finalmente lo medular: la demostración. Esta debe estar de acuerdo con la edad y formación del estudiante. Conviene buscar demostraciones que, con una guía adecuada, el alumno "descubra". Si se pueden elaborar varias demostraciones, mejor.

Un comentario acerca del cambio de "islotes deductivos" por "mosaicos". Islote da la sensación de algo aislado, solitario. En cambio con cierto número de mosaicos (piezas) se puede ensamblar un verdadero mosaico, conjunto de resultados, que, bien seleccionados, pueden ya cubrir algún capítulo interesante de geometría. Por ejemplo, en torno a la razón áurea se pueden elaborar mosaicos como "la razón áurea y el pentágono", "el icosaedro y la razón áurea", "razón áurea-Pitágoras-ecuación de segundo grado", "pentágono regular hecho con un nudo" y tantos otros. Con ellos se puede ensamblar un bonito capítulo de semejanza.

Conviene señalar uno de los peligros que se corren al tratar la geometría con el método mosaico y más aún con lo que ahora es lo usual, con simples "lecciones de geometría" esparcidas en cursos generales de matemáticas. He observado que en muchos programas y textos no se adopta una misma fundamentación (subyacente) a lo largo de un ciclo educativo con lo que se pierde coherencia. Para lograr una buena *formación* geométrica considero importante que todos los temas se basen en un mismo principio. En lo personal el punto de vista de Birkhoff me parece el más adecuado en la enseñanza elemental y media.

Aquí cabe una observación en cuanto a la formación geométrica del maestro. Esta sí que no puede consistir de "temas selectos". Para poder elaborar temas selectos o mejor, mosaicos deductivos, para el alumno, el maestro debe conocer la geometría euclidiana "de principio a fin" tanto con la axiomática de Birkhoff (o análoga) como con la hilbertiana y, desde luego, con el método cartesiano. Debe además conocer algo de otras geometrías. Desgraciadamente en algunos de nuestros países, durante la época "Abajo Euclides" la geometría desapareció de los planes de estudio de los maestros. Sobre todo en las normales. Como consecuencia, al reponer la geometría en la enseñanza elemental y media su trabajo se dificulta. No en vano en más de un país los capítulos de geometría suelen ser los últimos de cada curso y como "no da tiempo" rara vez se cubren.

Como en otras muchas ocasiones me gusta terminar con una plegaria de Atiyah: "I only wish to make a plea for the widest possible use of geometrical thinking at all levels".

LOS NUMEROS DEL RECTANGULO

Francisco Hernán
Grupo Cero. España.

Con el nombre de <u>Principio de Papert</u> se conoce la hipótesis según la cual muchas etapas del desarrollo mental están basadas no tanto en la adquisición de habilidades nuevas como en la construcción de nuevos sistemas de administración y gestión de habilidades ya adquiridas.

De ahí que entre nuestros modos de pensar más eficaces estén los que permiten asociar cosas que hemos aprendido en contextos diversos. Y lo hacemos tendiendo puentes entre líneas o esferas mentales que, aun pudiendo ser inicialmente autónomas, salen ganando una vez establecidos esos puentes de comunicación.

Tal es, ni más ni menos, lo que consiguen hacer los buenos chistes, cuya fuerza está en ser descripciones que se adaptan contemporáneamente a dos líneas mentales diferentes; una de ellas transparente y neutra; la otra, enmascarada, se abre súbitamente a lo inesperado, a una posibilidad que altera la transparencia y la neutralidad de la primera.

La geometría, que ya es de por sí una esfera sensible a multitud de procedimientos y habilidades, como la percepción, la deducción, la analogía, la imaginación, la modelización, la maniobrabilidad, la intuición y la generalización, es también un polo ideal para entrar en comunicación con recorridos de otras esferas, como la algebraica y la numérica.

Poner de relieve esa polaridad es una bonita empresa didáctica. Mi ambición se limita, sin embargo, a exponer -y ni siquiera por completo- un solo ejemplo, el del rectángulo como nutriente y como testigo de algunas relaciones numéricas.

Puestos a empezar de alguna manera, el número 1 tiene seguramente derechos adquiridos. Hará de guía para llegar al rectángulo, y una vez allí éste tomará el relevo.

El 1 y sus representaciones

Mirar el 1 como un área hace visibles algunas de esas relaciones que aficionan a las matemáticas. Dos de las más bellas son la que hay entre la función seno, el número π y el número 1,

Ver fig. 1

y la que hay entre la función de proporcionalidad inversa, el número e y el número 1,

Ver fig. 2

Pero no son las únicas. Las funciones potenciales, en su conjunto, ofrecen una cadena de representaciones que siendo atractivas una por una aceptan además una sugestiva generalización que se deja observar fácilmente.

Ver figs. 3, 4 y 5

La generalización tiene su base en que

$$\int_0^a x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^a = 1 \Rightarrow a^{n+1} = n+1 \Rightarrow a = \sqrt[n+1]{n+1}$$

lo que significa que en la gráfica de $y = x^n$ el área 1 se alcanza en $x = \sqrt[n+1]{n+1}$. Con lo que cada uno de los números $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{4}$, $\sqrt[5]{5}$, $\sqrt[6]{6}$ ... toma cuerpo, toma forma, tiene sentido geométrico. Y su conjunto admite una caracterización en la que el 1 como área es su generador.

Los rectángulos "potenciales"

A su vez, los números $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{4}$, $\sqrt[5]{5}$, $\sqrt[6]{6}$ ... acabados de obtener generan, por mediación de rectángulos a los que cabe llamar "potenciales", el resto de los números naturales:

Ver figs. 6, 7, 8 y 9

Y el área de los rectángulos potenciales está en una relación muy simple y general con el área bajo la función potencial correspondiente:

Ver fig. 10

Como el área del rectángulo ABCD es x^{n+1}, y como el área de la figura BCD es $\frac{1}{n+1}x^{n+1}$, entonces el área (desde el origen) bajo $y = x^n$ es $\frac{1}{n+1}$ del área del rectángulo correspondiente.

En particular, el área desde el origen bajo <u>cualquier</u> trozo de la parábola $y = x^2$ es la tercera parte del área de "su" rectángulo; el área bajo $y = x^3$ es la cuarta parte del área de "su" rectángulo; etc.

La parábola confiere además a <u>todos</u> sus rectángulos un particular carácter plástico: una simetría de su gráfica permite partir sus rectángulos en tres partes de idéntica área,

Ver fig. 11

En este campo de propiedades generales, tener una propiedad particular interesante se convierte en un lujo. Curiosamente, de entre todos los rectángulos parabólicos <u>sólo hay uno</u> que sea un rectángulo áureo; no, claro, el de lados 1 y ϕ, sino el de lados ϕ

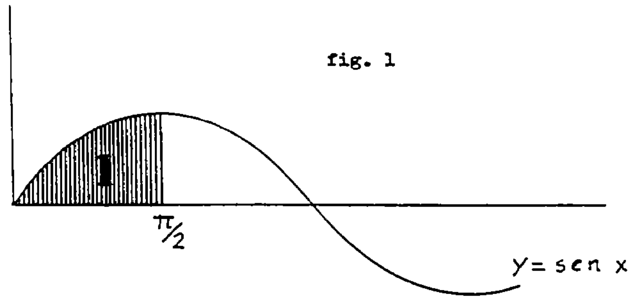


fig. 1

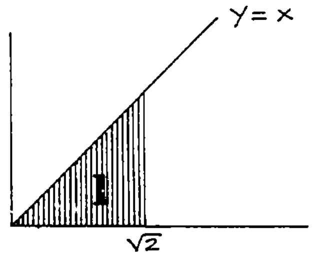


fig. 3

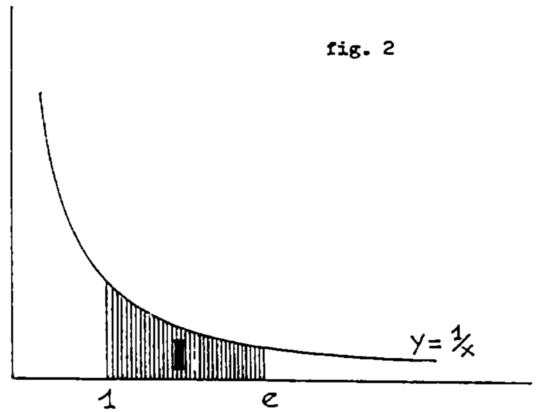


fig. 2

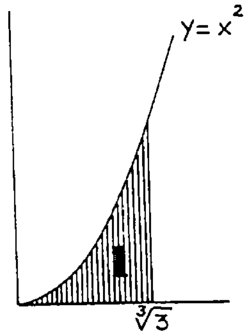


fig. 4

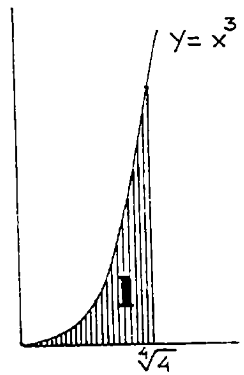


fig. 5

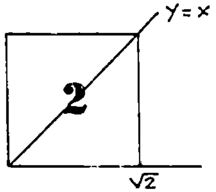


fig. 6

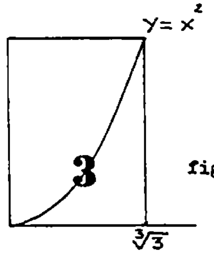


fig. 7

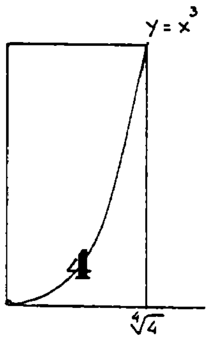


fig. 8

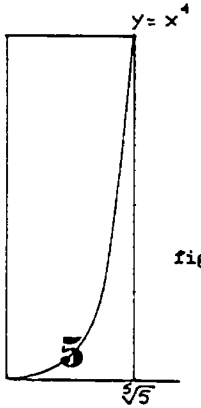


fig. 9

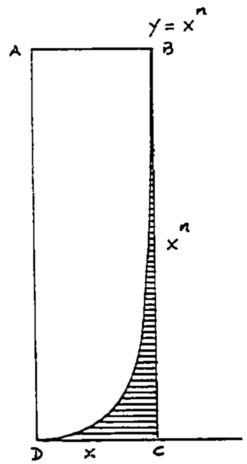


fig. 10

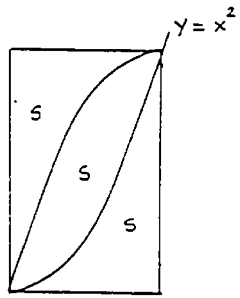


fig. 11

y ϕ^2,

Ver fig. 12

y este rectángulo tiene una llamativa organización interna,

Ver fig. 13

El hecho de que en ninguna otra función potencial $y = x^n$ pueda encontrarse rectángulo áureo alguno, hace que el número ϕ dé a la parábola un brillo especial entre todas las funciones potenciales.

La cosa, pues, marcha; los números se hacen notar y hasta hay algunos que aparecen por sorpresa; ahí está, por ejemplo, $\sqrt{3}$ como un agradecido inquilino en los rectángulos áureos.

Imágenes para generalizar

1. El rectángulo DIN.

Ciertos rectángulos pueden hacer pensar en otros. El folio DIN está construído de manera que al doblarlo por la mitad resulte otro de la misma forma. Ya se sabe que las dimensiones de este folio son muy "numéricas"

Ver fig. 14

$$\frac{h}{1} = \frac{1}{h/2} \qquad h^2 = 2 \qquad h = \sqrt{2}$$

¿Hay un folio que al doblarlo en tres partes iguales, cada una de ellas tenga la misma forma que el original?

Ver fig. 15

$$\frac{h}{1} = \frac{1}{h/3} \qquad h^2 = 3 \qquad h = \sqrt{3}$$

¿Hay un folio que al doblarlo en cuatro partes iguales, cada una de ellas tenga la misma forma que el original? Sí, y $h = \sqrt{4}$.

¿Y en n partes? Claro, y $h = \sqrt{n}$.

Las alturas de todos estos folios "superdín" son pasmosamente regulares: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6} \ldots \sqrt{n}$, y bien puede decirse que están todas agazapadas en el din original, puesto que se generan iterativamente a partir de él,

Ver fig. 16

2. La escalera.

Una escalera es medio rectángulo, así que de la yuxtaposición de escaleras saldrán rectángulos. Y como hay notables sucesiones de números que se transfieren bien a modelos en escalera, es natural servirse del rectángulo como metáfora.

El procedimiento algebraico habitual para sumar una sucesión aritmética, si se hace prematuramente deja de lado que lo que se hace es formar un rectángulo,

Ver fig 17

cuya área es el doble que la suma que se busca,

$$S = \frac{1}{2}(3 + 15) \times 4.$$

¿Qué virtudes tiene este tratamiento rectangular? Probablemente, varias. La que a mí más me gusta es esta que voy a comentar. Tanto el procedimiento algebraico como el de la escalera incluyen dos tipos de generalización, la inductiva (el paso de 1, 2, 3 ... a n) y la de procedimiento (que sirve tanto para sucesiones de diferencia 1 como para sucesiones de diferencia k). Sin embargo, tomar el rectángulo como guía ofrece la posibilidad de una especie de "supergeneralización" o estrategia de búsqueda, que consiste en organizar geométricamente los números para buscar sus relaciones aritméticas. Y esta estrategia funciona.

En efecto, la suma de dos números triangulares iguales es un

fig. 12

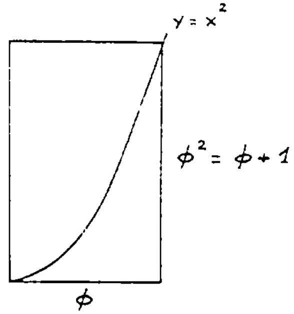
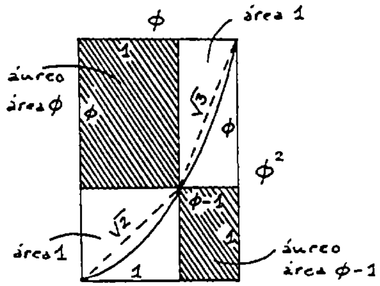


fig. 13



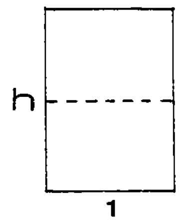


fig. 14

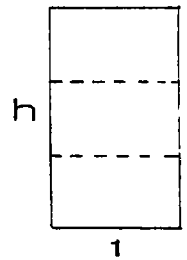


fig. 15

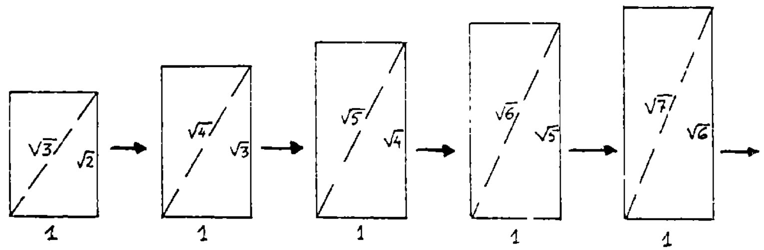
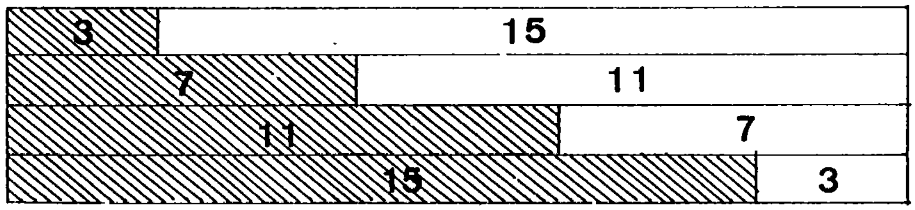


fig. 16

fig. 17



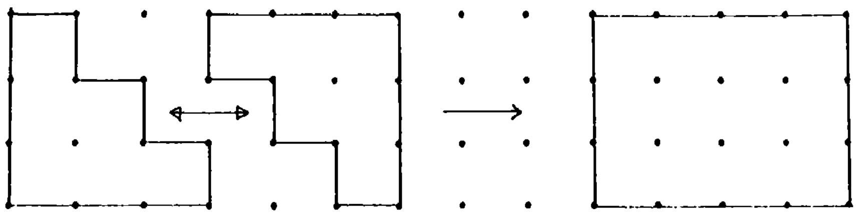


fig. 18

rectángulo

Ver fig. 18

y con este género de rectángulos se puede hallar mediante un procedimiento geométrico la suma de n números triangulares consecutivos:

Ver fig. 19

$$2\,(T_1+T_2+T_3+T_4+T_5) = 5\,(T_6-1) - (2+5+9+14)$$
$$= 5\,(T_6-1) - (3+6+10+15) + 4$$
$$= 5\,(T_6-1) - T_2 - T_3 - T_4 - T_5 + 4$$
$$= 5\,(T_6-1) - T_1 - T_2 - T_3 - T_4 - T_5 + 5$$
$$3\,(T_1+T_2+T_3+T_4+T_5) = 5\,T_6$$
$$T_1+T_2+T_3+T_4+T_5 = \frac{5}{3}T_6$$

$$T_1+T_2+T_3+T_4+\ldots+T_r = \frac{r}{3}T_{r+1}$$
$$T_1+T_2+T_3+T_4+\ldots+T_r = \frac{r}{3}\,\frac{(r+1)(r+2)}{2} = \frac{r(r+1)(r+2)}{6}$$

Por otra parte, la suma de dos números triangulares consecutivos es un cuadrado,

Ver fig. 20

lo cual lleva a preguntarse si existe alguna relación entre la suma de números triangulares y la suma de los números cuadrados.

La respuesta es afirmativa, como se verá en seguida:

a)
$$T_1+T_2 = 2^2$$
$$T_3+T_4 = 4^2$$
$$T_5+T_6 = 6^2$$
$$T_7+T_8 = 8^2$$
$$\ldots$$
$$T_1+T_2+T_3+T_4+T_5+T_6+T_7+T_8 = 2^2+4^2+6^2+8^2$$

b)
$$T_1 = 1^2$$
$$T_2+T_3 = 3^2$$
$$T_4+T_5 = 5^2$$
$$T_6+T_7 = 7^2$$
$$\ldots$$
$$T_1+T_2+T_3+T_4+T_5+T_6+T_7+T_8+T_9 = 1^2+3^2+5^2+7^2+9^2$$

$$\Sigma_{i=1..8}T_i + \Sigma_{i=1..9}T_i = 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2+9^2$$
$$\Sigma_{i=1..7}T_i + \Sigma_{i=1..8}T_i = 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2$$
$$\downarrow$$
$$\frac{7\times8\times9}{6} + \frac{8\times9\times10}{6} = 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2$$

En general,

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2 = \frac{(n-1)n(n+1) + n(n+1)(n+2)}{6}$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Como las cerezas

Dicen que los conceptos vienen como las cerezas, que si quieres coger uno, normalmente viene enredado con otros. Quien gusta de las cerezas no ve nada desagradable en ello; muy al contrario, si al tirar de una se encuentra con un puñado, mejor que mejor. Con la metáfora de la escalera ocurre algo parecido: es casi imposible que no arrastre consigo otras líneas de pensamiento. ¿Se me permite que para acabar empiece a recorrer una

fig. 19

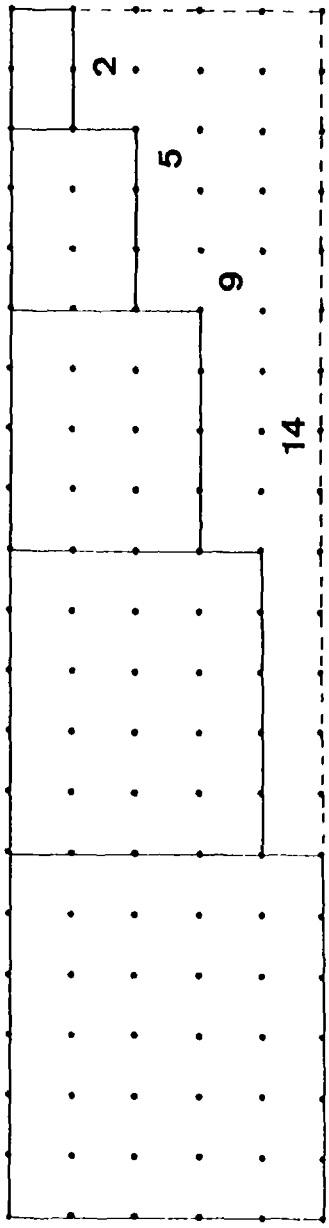
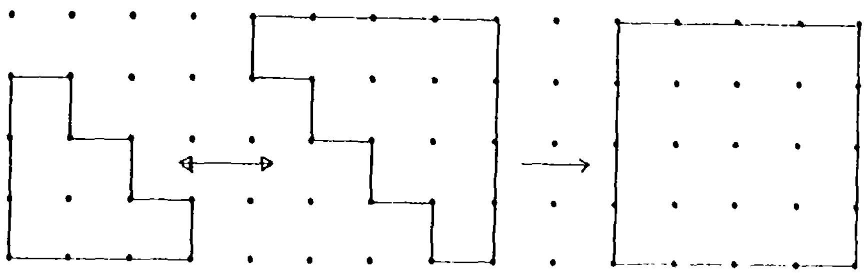


fig. 2o



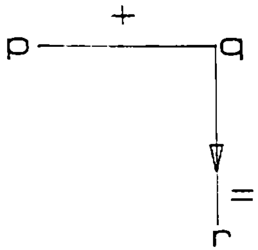

+
p
q
=
r

fig. 21

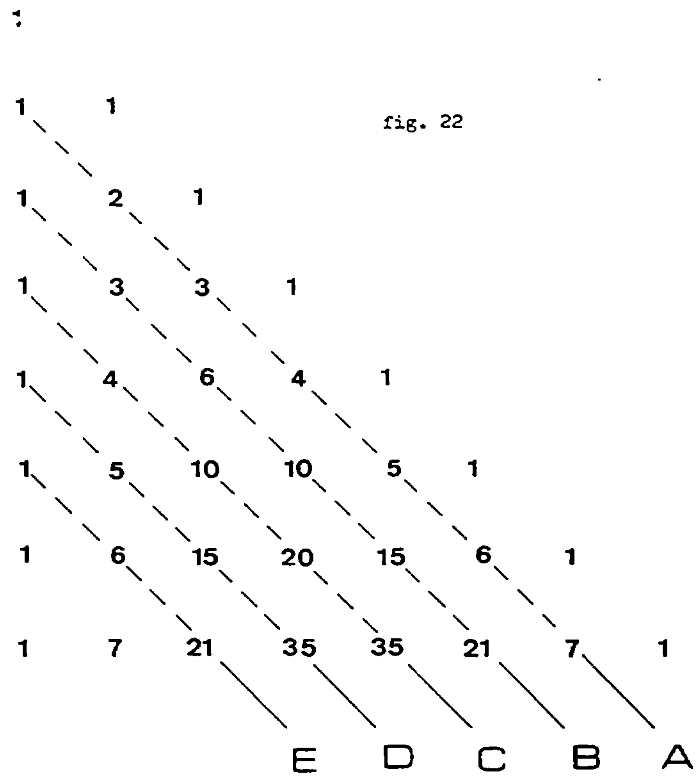

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
E D C B A

fig. 22

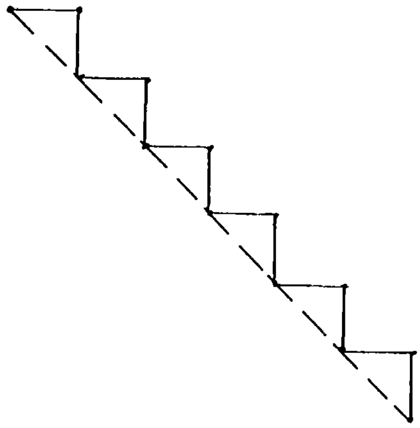


fig. 23

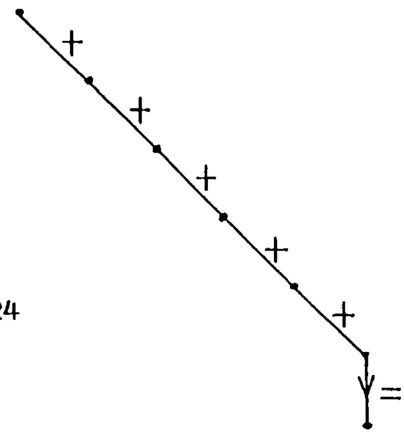


fig. 24

de ellas?

En el triángulo de Pascal todas las diagonales admiten una visión unificada, coordinada por una imagen

Ver fig. 21

que pone a todos los números del triángulo en conexión estrechamente ordenada:

Ver fig. 22

A) Números naturales

B) Números triangulares

C) T_1, $\Sigma_{1..2}T_1$, $\Sigma_{1..3}T_1$, $\Sigma_{1..4}T_1 \dots$

D) T_1, $T_1 + \Sigma_{1..2}T_1$, $T_1 + \Sigma_{1..2}T_1 + \Sigma_{1..3}T_1 \dots$

...

La diagonalización de una escalera,

Ver fig. 23

conduce todos los números de esa diagonal a un número de la diagonal inmediatamente inferior,

Ver fig. 24

Imagen esta que revela gratas regularidades de escritura:

$$\binom{7}{4} = \binom{6}{4} + \binom{5}{3} + \binom{4}{2} + \binom{3}{1} + \binom{2}{0}$$

que tienen un carácter general,

$$\binom{m}{p} = \binom{m-1}{p} + \binom{m-2}{p-1} + \binom{m-3}{p-2} + \dots + \binom{m-1-p}{0}$$

Si cambiamos la dirección de las diagonales vemos que la suma de los números de las diagonales perpendiculares a las consideradas hasta ahora, combinada con la propiedad característica de los números combinatorios,

Ver fig. 21

dan lugar a la sucesión de Fibonacci, 1, 1, 2, 3, 5, 8 ..., y facilitan la percepción de que cada número de esta sucesión es una suma de números combinatorios que siguen reglas regulares; así el 7° término, el 13, es

$$13 = \binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} \quad ;$$

el 8° término, el 21, es

$$21 = \binom{7}{0} + \binom{7}{1} + \binom{7}{2} + \binom{7}{3} \quad ;$$

y así sucesivamente. Pero la mejor manera de acabar el cuento de nunca acabar es callarse.

CINCO PUNTOS

Rafael Pérez Gómez
Universidad de Granada. España.

Si a un geómetra se le preguntase acerca de qué Geometría podría hacer con 5 puntos, no transcurriría mucho tiempo sin que nos preguntara: ¿Cómo son los puntos? El está ya pensando en puntos ordinarios o en singulares, en elípticos o parabólicos, de Brocard o de Euler, ...

Sin embargo, yo, como profesor de Geometría, escogería estos:

1.- Geometría y Educación.
2.- Alumnos y alumnas.
3.- Profesoras y profesores.

4.- La escuela y el instituto.

5.- La sociedad.

Analizando cada uno de los puntos anteriores podemos determinar qué Geometría debe hacerse en cada caso, en cada entorno cultural, en cada grupo social. El texto que sigue es una reflexión general sobre todos estos aspectos: ¿qué Geometría debemos explicar?, ¿cuáles son los intereses de los estudiantes?, ¿cuál es la relación entre el mundo educativo y la sociedad?, ¿hay algunas claves que ayuden al profesorado de matemáticas en su tarea educativa? Todas estas preguntas van obteniendo respuesta si nos hacemos esta otra:

¿Por qué Geometría en los *curricula* de la Educación Matemática?

Casi todos los que nos dedicamos a la educación matemática hemos defendido alguna vez que las matemáticas tienen especial interés en cualquier currículo escolar porque con su aprendizaje se educa el pensamiento de las personas. Para ser consecuentes con tal afirmación tendríamos que dedicar una atención mayor al estudio de los procesos de pensamiento a la hora de realizar los estudiantes las correspondientes actividades matemáticas. Sin embargo, el trabajo en las clases va dirigido a la consecución de una gran cantidad de conocimientos matemáticos. Esto es una contradicción.

Es evidente que las matemáticas no son el único protagonista en la formación del pensamiento de las personas en edad escolar. Pero sí es cierto que la clase de matemáticas reune bastantes condiciones para llevar a cabo tal labor. Cada una de las partes de las matemáticas necesita poner en práctica una determinada forma de pensar para poder trabajar en ella. La Geometría no es una excepción. Es más, la propia Geometría es el producto de una determinada forma de pensar. ¿Interesa que los estudiantes se entrenen en ella?, ¿cuál es su valor formativo?

Veamos a continuación diferentes tipos de pensamiento que, sin ser exclusivos de ninguna disciplina, pueden educarse haciendo Geometría.

El pensamiento algorítmico

Instrucciones para subir una escalera

> "*Nadie habrá dejado de observar que con frecuencia el suelo se pliega de manera tal que una parte sube en ángulo recto con el plano del suelo, y luego la parte siguiente se coloca paralela a este plano, para dar paso a una nueva perpendicular, conducta que se repite en espiral o en línea quebrada hasta alturas sumamente variables. Agachándose y poniendo la mano izquierda en una de las partes verticales, y la derecha en la horizontal correspondiente, se está en posesión momentánea de un peldaño o escalón. Cada uno de estos peldaños, formados, como se ve, por dos elementos, se sitúa un tanto más arriba y más adelante que el anterior, principio que da sentido a la escalera, ya que cualquier otra combinación produciría formas quizás más bellas o pintorescas, pero incapaces de trasladar de una planta baja a un primer piso.*
>
> *Las escaleras se suben de frente, pues hacia atrás o de costado resultan particularmente incómodas. La actitud natural consiste en mantenerse en pie, los brazos colgando sin esfuerzo, la cabeza erguida aunque no tanto que los ojos dejen de ver los peldaños inmediatamente superiores al que pisa, y respirando lenta y regularmente. Para subir una escalera se comienza por levantar esa parte del cuerpo situada a la derecha abajo, envuelta casi siempre en cuero o*

gamuza, y que salvo excepciones cabe exactamente en un escalón. Puesta en el primer peldaño dicha parte, que para abreviar llamaremos pie, se recoge la parte equivalente de la izquierda (también llamada pie, pero que no ha de confundirse con el pie antes citado), y llevándola a la altura del pie, se la hace seguir hasta colocarla en el segundo peldaño, con lo cual en éste descansará el pie. (Los primeros peldaños son siempre los más difíciles, hasta adquirir la coordinación necesaria. La coincidencia de nombre entre el pie y el pie hace difícil la explicación. Cuídese especialmente de no levantar al mismo tiempo el pie y el pie) Llegado en esta forma al segundo peldaño, basta repetir alternadamente los movimientos hasta encontrarse con el final de la escalera. Se sale de ella fácilmente, con un ligero golpe de talón que la fija en su sitio, del que no se moverá hasta el momento del descenso."

Sirva este texto de Julio Cortázar sacado de "Historias de Cronopios y Famas", como bella descripción de un algoritmo en un Congreso Iberoamericano.

Desde tiempos remotos se han utilizado algoritmos a partir de situaciones geométricas. Baste recordar la primera aproximación escrita del número *pi* que figura en la Biblia (1 Re; VII, 23-39): El mar de bronce. *Hizo también de fundición, una gran pila, toda redonda, de diez codos de profundidad, y un cordón de treinta codos ceñía toda su circunferencia.*

Hoy día podemos disponer de unos medios que permiten entender y mejorar el algoritmo. Podemos preguntar en clase, mostrando una lata de 3 bolas de tenis, cuál longitud es mayor: la altura de la lata o la de la circunferencia de su boca. El interés de la mayoría de los estudiantes está asegurado y podemos hablar de aproximaciones al número *pi*. La *Geometría de la tortuga* es una buena herramienta para establecer algoritmos que permitan la obtención de valores decimales aproximados que tengan significado para todos.

Imágenes: lata de tenis de 3 bolas y programa LOGO

Desde los algoritmos de cálculo hasta los utilizados en la moderna *Geometría fractal* se dispone de un amplio campo para la formación del primer tipo de pensamiento: el pensamiento algorítmico.

Imágenes: curva de Mandelbrot

El pensamiento divergente

Intimamente unido a la Geometría está el pensamiento divergente. Cualquier artista utiliza unos cánones geométricos que subyacen a su producción creativa. Este tipo de pensamiento se fomenta poco en la clase de matemáticas y, sin embargo, se puede contar con una fuente inagotable de situaciones.

Normalmente, la Naturaleza es un gran libro del que sacamos sabias lecciones. Observándola, podemos obtener modelos que pueden adaptarse a nuevas situaciones tras el correspondiente proceso de abstracción geométrica. ¡Contribuyamos desde la Educación Matemática a su conservación!

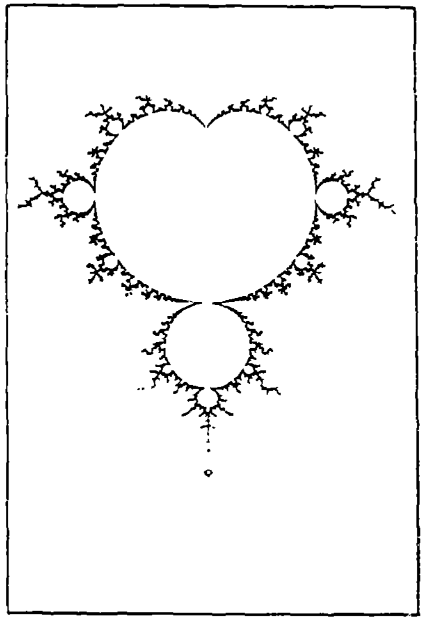
Imágenes: panal de miel a "lagartija" Escher

El panal de abejas nos muestra cómo pueden unirse diferentes hexágonos regulares para formar una superficie plana sin que en ella existan huecos. Además, se forma una estructura tridimensional con un módulo compuesto por medio rombidodecaedro adosado a un prisma recto de base hexagonal, la llamada "celdilla de abeja", que es el lugar destinado a depósito de miel. ¿Qué

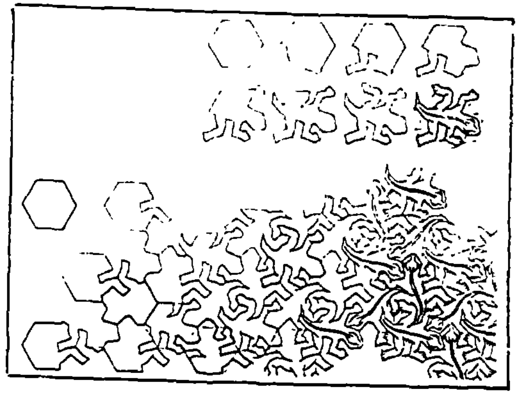
lata de tenis con 3 bolas

ORDENES A LA TORTUGA	LONGITUD CIRCUNFERENCIA -C-	DIAMETRO -D-	C/D
SL CENTRO BL			
REPITE 360 [AV 1 GD 1]	360		
REPITE 180 [AV 1 GD 1]			
ESCRIBE COORX		114.588	
ESCRIBE 360/COORX			3.14169
SL CENTRO BL			
REPITE 360[AV .5 GD 1]	180		
REPITE 180[AV .5 GD 1]			
ESCRIBE COORX		57.293	
ESCRIBE 180/COORX			3.14174

procedimientos LOGO



curva de MANDELBROT



del panal de miel a la lagartija ESCHER

otras figuras geométricas permiten la creación de módulos con propiedades análogas? Veamos dos situaciones. La primera no es más que un alarde de creatividad en tanto en cuanto supone el cambio de forma, pero no de superficie, de un hexágono con fines meramente estéticos. Se trata de poner de manifiesto la estructura subyacente en parte de un cuadro de Moris Cornelius Escher, titulado *Reptiles*.

Sin embargo, esta segunda supone la solución creativa de un problema: ¿cómo construir el techo de un pabellón? Combinando medios octaedros con tetraedros de igual lado se obtiene una estructura rígida en la cual no existe energía acumulada en sus vértices, de lo cual se deduce que las columnas centrales no son necesarias.

Imágenes: techo de un pabellón

El pensamiento convergente

Los dos tipos de pensamiento hasta aquí nombrados se completan con el que suele ser característico de la Geometría: el pensamiento convergente o deductivo. Claro está, existen dos formas de educar a nuestros escolares en él.

Primera, desde la adquisición de contenidos matemáticos que -como solemos decir los docentes- serán de utilidad alguna vez. De ahí se deriva un programa: primero se explica el plano, luego el espacio; dentro del plano hay que comenzar por las rectas, semirrectas y segmentos; etc, etc, etc. En una palabra, ¡lo normal!

Segunda, desde la resolución de problemas. Un ejemplo puede evitar malentendidos. Cuando, desde la óptica anterior, se explica en clase una figura tan querida como lo es la circunferencia, el proceso de pensamiento va desde la definición hasta la formulación de propiedades de la misma. La demostración de algunas de ellas puede ser el final. Permítanme una pregunta: ¿se trata normalmente en clase de matemáticas la propiedad de la circunferencia de tener anchura constante?

No resulta demasiado difícil dar respuesta a la pregunta siguiente:
"¿Por qué son redondas las ruedas?"
Pero si preguntamos: "¿por qué son redondas las tapaderas?" la respuesta no es ya tan fácil. Pero si insistimos en preguntar si: ¿Podrían tener otra forma?"

De poco sirve la afirmación de que ¡alguna vez estos conocimientos te serán útiles! ¿Por qué no resolvemos en lugar de plantear algunos que hacen que el entorno escolar no tenga nada que ver con la sociedad en el que está inmerso? Además, ¿no es así como se han hecho las matemáticas?

Sirvan estas reflexiones como apoyo decidido a una educación basada en la resolución de problemas como metodología adecuada a la observación de procesos de pensamiento algorítmicos, divergentes y convergentes y conexión real de las aulas con el mundo que las rodea.

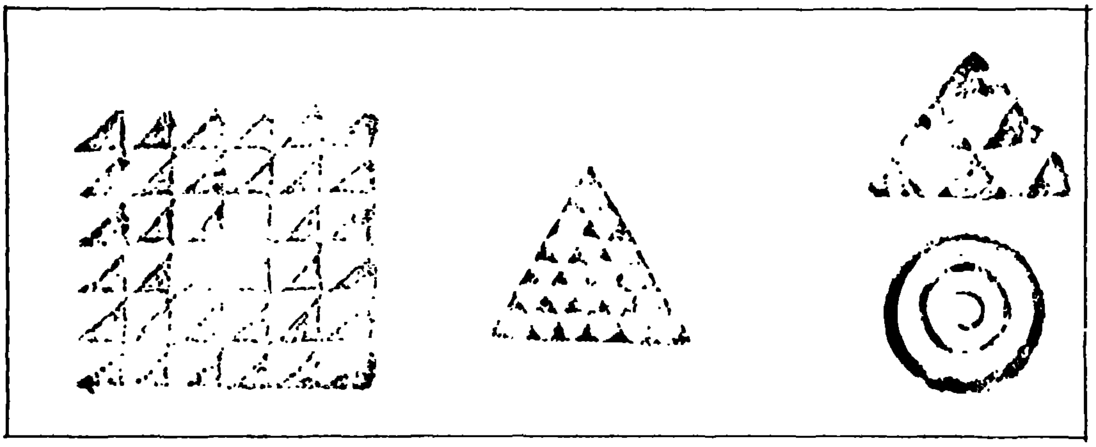
El pensamiento social

El último tipo de pensamiento del que deseo tratar lo llamo pensamiento social.

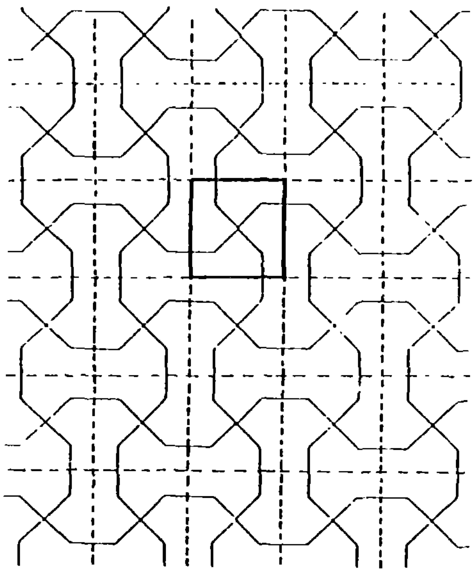
La Geometría suministra diferentes lenguajes a la sociedad y cualquiera de sus ciudadanos debe manejarlos con eficacia.

Expresiones como "en línea recta", "vidas paralelas", "es como la cuadratura del círculo", ... son de patrimonio público y

estructuras de pabellones



pintaderas canarias



mosaico del LA ALHAMBRA

tienen un sentido figurado desde el concepto geométrico que explican una situación.

Infinidad de códigos se apoyan en el uso de objetos propios de la Geometría. Un triángulo será señal de peligro, una línea continua marcará una frontera que no debe sobrepasarse, una flecha va unida a un sentido de marcha, cinco líneas paralelas igualmente separadas es el soporte de la música sobre el papel, varias lineas paralelas de diferentes grosores son la imágenes de los lectores ópticos. Y así podríamos continuar durante bastante tiempo.

Incluso determinadas sociedades han usado, o usan aún, la Geometría para materializar creencias religiosas. Mostremos dos ejemplos bien diferenciados.

El primero está sacado de *La Cueva de los Candiles* en las Islas Canarias (España, -3000). La decoración de sus paredes está realizada a base de triángulos. Los mismos triángulos que servían para que los hombres se pintaran el cuerpo con las llamadas "pintaderas". Se trata de un monumento a la fertilidad femenina ya que cada triángulo representa una vulva. El lenguaje utilizado para expresar un pensamiento es el geométrico.

Imágenes: "pintaderas" y alicatados de La Alhambra

El segundo corresponde a La Alhambra de Granada. Un aspecto que suele llamar mucho la atención es la decoración de sus paredes, sus mosaicos. Analizándolos geométricamente, se deduce que cualquiera de ellos está formado a partir de un pequeño trozo que se extiende mediante isometrías. El pensamiento islámico que se materializa en esta decoración es que Alá es uno y está en todas partes. Pero al prohibir su religión hacer representaciones humanas de Dios, el lenguaje utilizado para expresar sus creencias es la Geometría.

Pero la educación de los miembros de una sociedad debe contemplar las necesidades de ésta.

Por una parte están los intereses de los estudiantes que buscan en la escuela o en el instituto una formación que les permita incorporarse al mundo del trabajo. Por fijar un ejemplo lejano a nuestra cultura, la Astronomía es una parte obligada para los habitantes de Polinesia. Me estoy refiriendo a la llamada *Etnomatemática* como integrante esencial de la educación de los miembros de una sociedad.

Pero si los intereses de los estudiantes son un factor a tener en cuenta, sus "valores" o preferencias están marcados por el tipo de sociedad en el que se desarrollan. La tecnología debe estar integrada en su vida escolar, por lo que las escuelas e institutos habrán de proveerse de los materiales necesarios para construir la Geometría.

Aunque no todo dependerá de las necesidades laborales ni de los gustos de los estudiantes. El modelo de sociedad debe ser inculcado en el pensamiento social del que venimos hablando. Una sociedad libre, democrática, debe suministrar desde las instituciones escolares una característica esencial del pensamiento que nos ocupa: la flexibilidad.

De nuevo hay que decir que las matemáticas no son neutras. Todo depende de cómo trabajemos en clase. Así, por ejemplo, si para resolver el problemas planteado anteriormente sobre la anchura constante de la circunferencia, hemos de trabajar con rectas tangentes en un punto, no desaprovechemos la oportunidad y presentemos una situación altamente flexible: una tangente en infinitos puntos, infinitas tangentes en un solo punto, una sola tangente en un punto, ...

Imágenes: Hacia la cuarta dimensión. Dalí

Vamos a finalizar observando este cuadro que forma parte de

hacia la cuarta dimensión. DALI

la obra de un genial pintor catalán, Salvador Dalí. Su pensamiento le llevó a utilizar la "Geometría del siglo XXI", la Topología, la geometría de la flexibilidad por excelencia: una nueva forma de pensar para los futuros ciudadanos del mundo.

"Nada de ensoñamiento, sino de topología trascendental"

(palabras sacadas de una carta de S. Dalí a René Thorn)

En estas líneas he tratado sobre el para qué de la Geometría escolar. El qué, estimo que debe ser cada Profesor y Profesora de matemáticas quien lo fije a la vista de consideraciones parecidas a las que este marco general expone. El cómo parece poder deducirse de los trabajos realizados de la escuela Van Hiele cuya exposición está fuera del objetivo de este trabajo.

¿HAY GEOMETRIA EN LA UNIVERSIDAD?

Ceferino Ruiz Garrido
Universidad de Granada. España.

Me han invitado a este panel para que analice cual es la Geometría que se enseña actualmente en la Universidad. Principalmente me referiré a la Universidad española, aunque me parece que salvo las muy honrosas excepciones de algunos sistemas educativos que se encuentran en peligro de extinción, la situación en los demás países del ámbito iberoamericano ha de ser muy parecida. El análisis es bastante simple:

¡En la Universidad ya no se enseña Geometría!

Esto no nos extraña porque en los restantes niveles educativos tampoco se enseña.

Estoy seguro de que muchos de mis colegas de la Universidad no están de acuerdo con esta conclusión, su desacuerdo se debe a que llaman Geometría a otra cosa distinta de lo que en este Congreso estamos denominando Geometría, y es claro que si llamamos por el mismo nombre a cosas distintas es muy difícil que nos pongamos de acuerdo.

Aceptemos por un momento que Geometría es lo que en cada nivel o tipo de estudios se entiende por tal. Aún así, dentro del nivel universitario, podría haber comenzado analizando lo que en cada clase de estudios se entiende por Geometría y en qué medida se puede mejorar el bagaje geométrico de ellos; para sistematizar este análisis podría considerar tres apartados: los estudios de la Licenciatura en Matemáticas, los de la Diplomatura de los Profesores de Educación General Básica (Magisterio) y meter, por último, en un gran saco los restantes estudios que tienen contenidos Matemáticos entre sus asignaturas instrumentales (estudios científicos y tecnológicos principalmente). Pero la conclusión en todos los casos es que lo que se enseña, aunque sea bajo el epígrafe de Geometría, no permite desarrollar en los estudiantes sus facultades de visualización espacial, ni siquiera plana, ni las relaciones físicas entre distintas magnitudes, ni las nociones naturales de movimiento rígido o de figuras simétricas. Por tanto, lo que se enseña como geometría en los niveles universitarios dista mucho de coincidir con cualquier concepto intuitivo de esta materia.

Pero tampoco es que coincida con el concepto que Felix Klein estableció en su conocido programa de Erlangen [K], pues este texto que ya hizo historia en el pasado siglo, supuso y supone un punto final a los aspectos puramente *algebráicos* de la Geometría proyectiva y de las diferentes Geometrías que le están *subordinadas*, como las geometrías euclídeas o no-euclídeas. En este programa queda patente que todas las relaciones de naturaleza algebráica, entre los elementos fundamentales de estas geometrías, como pueden ser los puntos, rectas, planos, hiperplanos en general, haces, etc..., se expresan por medio de relaciones entre los invariantes algebraicos de esos objetos, que permanecen por la acción del grupo de la geometría considerada. Con las ideas de Klein deberían haber quedado desterrados muchos métodos algebráicos, que ofrecen una perspectiva *estática* de la geometría y tienen su origen en la gran aportación de René Descartes al introducir la Geometría analítica en el siglo XVII, para dar paso a la noción integral de Geometría como simbiosis entre un Grupo de transformaciones y un Espacio; es la noción *dinámica* de la Geometría.

Bajo esta óptica, la Geometría a que solemos referirnos aquí, la geometría de Euclides en el plano o en el espacio, puede verse como la geometría del Grupo de los movimientos rígidos, que, al descomponerse en producto de un determinado número de reflexiones (simetrías) respecto a rectas, planos o hiperplanos, según sea el caso, están generados por simetrías en un sentido amplio. Estamos pues hablando de SIMETRIA DINAMICA [APR].

Los conceptos geométricos a que me refería antes, cuando son adquiridos por los alumnos es porque en las asignaturas de Dibujo, de Diseño o de Geometría Descriptiva se los han mostrado, no porque los hayan adquirido en las asignaturas de carácter matemático. Es más, quienes los tienen no los relacionan, generalmente, con los homónimos que se empeñan en enseñarles los profesores de matemáticas, y consideran que lo que éstos les enseñan es más confuso aún de lo que parece, por utilizar términos del lenguaje coloquial para llamar a los *entes* matemáticos. Esta falta de relación es en muchos casos la causa fundamental del tedio y aburrimiento con que ciertos estudiantes se enfrentan a las clases de Matemáticas durante sus estudios, tanto en el nivel universitario como en los niveles precedentes; muchos de ellos han de esperar a desarrollar su actividad profesional para establecer esa relación, encontrando entonces la satisfacción que no disfrutaron en su momento.

La conclusión a la que podemos llegar es que en la Universidad lo que se enseña, o se pretende enseñar, cuando nos movemos por la llamada Geometría Lineal, es esencialmente Geometría algebráica o bien Geometría algebrizada.

Si nos movemos del lado del Cálculo Diferencial o del Análisis Matemático, nos encontramos con la Geometría Diferencial que, en los niveles de secundaria es más utilizada por los físicos para expresar y ejemplificar sus conceptos, que por los propios matemáticos.

Por otra parte, nos encontramos con la *Geometría elástica*, es decir, con la Topología. Esta parte de las Matemáticas es quizás, una de las más recientes aportaciones de la ciencia a la libertad de pensamiento. Sus estructuras conceptuales están desprovistas de la rigidez y del encorsetamiento que sustentan la geometría euclídea. Su conocimiento aporta estructuras mentales que permiten considerar como *iguales* cosas que sólo *se parecen* físicamente o ni siquiera eso. Es lamentable que esta parte de las matemáticas no se enseñe de un modo pragmático en los niveles educativos no universitarios; ello es el fruto natural de que se la ignore en las Escuelas de Magisterio y se la pignore en las Facultades de Matemáticas. Sin embargo, muchos razonamientos, clasificaciones, decisiones y resoluciones que se toman o realizan en la actividad cotidiana tienen subyacente una estructura topológica, por lo que es de esperar que con el paso del tiempo esta disciplina pase a engrosar los diseños curriculares de Matemáticas.

Pero no he venido aquí para hablar de Topología, sino de como está el panorama de la Geometría euclídea en la Universidad. Antes he dicho que no había, y esa afirmación no es del todo cierta. Haberla la hay, pero arropada por un envoltorio algebraico que no permite vislumbrarla. Como ejemplo de cómo se trata un mismo problema geométrico en la Universidad (me refiero a la Universidad a nivel de enseñanza pues, curiosamente, en la investigación no se trataría de la misma manera) y cómo querríamos que se tratara en otros niveles educativos, podemos tomar el ejemplo de los Poliedros flexibles.

Las limitaciones de tiempo en el panel, y de espacio en este texto, sólo me permitirán tratar uno de los octaedros flexibles introducidos por R. Bricard [B] en 1897, pudiendo encontrar quienes estén interesados en los poliedros flexibles de R. Connelly [C] una exposición detallada y actual en el número 1 de la revista SUMA [R1].

La cuestión que se planteaba era la de discernir si existían poliedros flexibles, es decir, poliedros que, sin deformar sus caras, se moviesen en el espacio articulándolos por las aristas.

Cualquiera de nuestros alumnos entendería la cuestión aunque no comprendiera bien porqué nos la planteamos, no sería extraño que pensara que todos los poliedros son rígidos (no flexibles) pues los que conoce lo son y *si hubiera alguno que se moviera, ya se lo habría enseñado alguno de sus profesores*.

En cuanto al universitario, enseguida tomaría por simple desconfianza la precaución de preguntar sobre la clase de poliedros que consideramos y sobre el tipo de movimientos a que nos referimos.

Para satisfacer la curiosidad de éstos últimos seré un poco más preciso. Me refiero a poliedros como superficies poliédricas simples en el espacio habitual que topológicamente son esferas, separando por tanto al espacio en dos regiones: la de *dentro* o interior y la de *fuera* o exterior; de los que verifican la habitual relación de la característica de Euler:

$$C + V = A + 2$$

(C indica el número de caras, A el de aristas y V el de vértices.) En cuanto a lo de ser flexibles les diré que me refiero a pares de tales poliedros entre los que se puede establecer una isometría de superficies, sin que ésta provenga por restricción de una isometría global del espacio. Mejor aún, me refiero a familias uniparamétricas contínuas de poliedros isométricos.

Por tanto se trata de saber si pueden encontrarse en el espacio dos poliedros distintos con igual número de caras que, introduciendo falsas aristas si es necesario, podemos suponer triángulos, de manera que las caras de uno sean *iguales* a las del otro y, en ambas figuras, estén dispuestas de igual forma.

La respuesta para el caso de poliedros limitando un interior convexo, llamados simplemente poliedros convexos, se conoce desde hace tiempo. A.L. Cauchy ya probó en 1813 que todos ellos son rígidos, quedando quizás desde entonces, la idea de que todos los poliedros son rígidos.

La búsqueda había que hacerla entre los no convexos y hubo que esperar más de siglo y medio, hasta 1978, para que R. Connelly nos mostrara uno.

Para simplificar, podemos quedarnos con el esqueleto del poliedro formado por las aristas y los vértices, pues con ellos tenemos determinado el poliedro completamente. Como cada cara tiene tres aristas y cada arista está en dos caras, resulta que estos elementos cumplen la relación $3\ C = 2\ A$.

Llevando ésta a la fórmula de Euler, resulta que los elementos del esqueleto de un poliedro cumplen con la relación:

$$2A + 3V = 3A + 6,$$

o si se quiere, cumplen la fórmula:

$$A = 3V - 6,$$

que podemos llamar *fórmula de Euler para el esqueleto de un poliedro de triángulos*. El número de aristas queda determinado en estos esqueletos por el número de vértices. Así, si consideramos un esqueleto con V vértices $P_1, \ldots, P_V$, las longitudes de las 3V-6 aristas serán números $l_{i,j}$ $(i<j)$, cuando el vértice P_i esté unido con el P_j.

En una situación *regular*, como ocurre cuando en todos los vértices concurren el mismo número n de aristas, resulta que los elementos cumplen la relación adicional de $2A = nV$, que junto con la de Euler nos dice que ha de verificarse, en este caso:

$$(6 - n)V = 12.$$

Al ser necesariamente natural el número de vértices, resulta que n sólo puede tomar los valores 3, 4 y 5, que corresponden a los esqueletos de los tetraedros (V=4), octaedros (V=8) e icosaedros (V=12) respectivamente.

Para estudiar la posibilidad de encontrar un esqueleto de un poliedro de triángulos flexible, con la geometría universitaria, se considerarán los V vértices como un punto $(P_1, \ldots, P_V)$ del espacio $(\mathbb{R}^3)^V$ y las aristas como 3V-6 ecuaciones:

$$F_{i,j}(P_1, \ldots, P_V) = (l_{i,j})^2$$

en $(\mathbb{R}^3)^V$.

Estas ecuaciones (polinómicas de segundo grado) determinan una variedad algebráica de dimensión mayor o igual que la dimensión del espacio menos el número de ecuaciones, es decir, 6, que corresponde al espacio de todos los esqueletos isométricos (aunque no correspondan a los de poliedros). Como, por otra parte, el grupo de las isometrías afines de $\mathbb{R}^3$ tiene dimensión 6; la acción de este grupo extendida a los puntos de $(\mathbb{R}^3)^V$, determina también una partición en variedades de dimensión 6, correspondiendo cada una de ellas a las familias de esqueletos que pueden deducirse de uno dado mediante un movimiento rígido. En general, estos esqueletos serán rígidos, pues ambas variedades tienen, genéricamente, la misma dimensión y como las variedades determinadas por las ecuaciones contienen a las otras, sus componentes conexas serán iguales cuando coincidan en dimensión. La flexibilidad se produce cuando la variedad determinada por las ecuaciones tiene dimensión estrictamente mayor que 6, lo que será habitualmente consecuencia de la existencia de relaciones entre las ecuaciones que la determinan. Cuando se produzca dependencia lineal entre las diferenciales de las funciones $F_{i,j}(P_1, \ldots, P_V)$ se hablará de *flexibilidad infinitesimal*.

Podríamos seguir haciendo una teoría de la flexibilidad, pero difícilmente llegaríamos a mostrar un esqueleto flexible y, menos aún, un poliedro flexible.

Planteémonos ahora el problema desde la geometría escolar, donde no caben ni las ecuaciones $F_{i,j}(P_1, \ldots, P_V) = (l_{i,j})^2$, ni $(\mathbb{R}^3)^V$. Para todos es evidente que un tetraedro y cualquiera de sus vértices triedros por separado, es rígido, lo mismo que para que un poliedro pueda tener un vértice poliedro flexible tienen que concurrir en él al menos 4 aristas. Esto es consecuencia de que al analizar las figuras planas hemos *observado* que los triángulos son rígidos mientras que los restantes polígonos son flexibles. Un vértice se moverá si el polígono que une los extremos opuestos de las aristas que concurren en él no es un triángulo (ver fig. 1). Por tanto nuestro esqueleto ha de tener al menos 5 vértices, pues ya hemos excluido los tetraedros. Este caso mínimo corresponde al caso de dos tetraedros unidos por una cara, que también puede verse como un ángulo poliedro de cuatro caras que se ha cerrado mediante dos triángulos (ver fig. 2). Aprovechemos la ocasión para observar que si en uno de los vértices concurren sólo 3 aristas, el esqueleto será flexible o rígido con independencia de ese vértice, pudiendo eliminarlo y obtener otro esqueleto con igual capacidad de flexión, pero con un vértice menos.

En aquellos esqueletos que sólo tienen vértices con más de 3 aristas se ha de cumplir lógicamente, que el doble del número de aristas es mayor o igual que cuatro veces el número de vértices, es decir $2\,A \geq 4\,V$, llevando esta expresión a la fórmula de Euler, se tiene que uno de tales esqueletos ha de cumplir la desigualdad $6\,V - 12 \geq 4\,V$, resultando que V ha de ser al menos 6.

El primer caso se plantea cuando consideramos un esqueleto con 6 vértices, y en todos ellos concurren 4 aristas; tal esqueleto es el de un poliedro formado por 8 triángulos dispuestos de modo que en cada vértice concurren 4 de ellos. Se trata de un octaedro. Estos poliedros pueden verse como la unión por el borde (ver fig. 3) de dos superficies formadas, cada una de ellas, por 4 triángulos concurrentes en un vértice. El borde de cada una de ellas es, precisamente, un cuadrilátero; resultando que son lo que podríamos llamar un *cucurucho* de borde cuadrado. Si en vez de construir estas superficies con triángulos rígidos, tomáramos un material elástico, resulta que *estirando y encogiendo* estos cucuruchos podríamos formar un cuadrado o un disco, eso es lo que nos dice que nuestro poliedro es, topológicamente hablando, equivalente a dos discos que se unen por el borde, es decir, equivalente a una esfera bidimensional.

Cada uno de estos cucuruchos es flexible por separado, lo malo es que si los juntamos dejan de serlo. Esto ocurre porque si unimos, mediante una nueva arista, dos de los vértices no consecutivos del borde, lo que tenemos es el esqueleto de 5 vértices que hemos comentado antes, es decir rígido, por tanto cada cucurucho tiene un único grado de movilidad. Esta movilidad se pierde generalmente, cuando intentamos compatibilizarla con la de otro. Para poder mover todo el esqueleto hemos de conseguir que los dos cucuruchos se muevan al unísono. Eso no es posible, por limitaciones espaciales [B], sin que se corten las caras.

No obstante, pueden construirse esqueletos octaédricos flexibles. No serán los esqueletos de poliedros porque se cortarían las caras entre sí. Baste observar que si tomamos en el espacio un cuadrilátero con lados opuestos iguales dos a dos (será necesariamente el flexionado de un paralelogramo plano), siempre tiene un eje de simetría, la perpendicular común a las dos diagonales (ver fig. 4).

Si a partir de un punto que no esté en ese eje construimos un cucurucho que tiene por borde al cuadrilátero tendremos el esqueleto de medio octaedro flexible; utilizando el eje de simetría obtendremos, en cada movimiento del cucurucho, un punto simétrico del de partida. Desde este último punto podemos construir el cucurucho simétrico que tendrá el mismo borde que el anterior y ocupará constantemente, la posición simétrica del otro; es decir, que ambos esqueletos de cucuruchos flexionan simultáneamente. El resultado es el esqueleto buscado, como el que se muestra en la figura 5.(ver fig. 5)

Tomando el punto con un poco de cuidado, ninguna de las aristas de uno y otro cucurucho, corta a las del otro. Pero eso no importa mucho, si se cortaran algunas de ellas, basta con flexionar un poco la estructura para que dejen de hacerlo. Para construir uno de estos esqueletos, partamos de la situación plana, tomando en un rectángulo dos puntos simétricos respecto al centro, sin que estén sobre las diagonales, y con varillas rígidas (articuladas en los vértices) construyamos un esqueleto plano como el de la figura 6. Solamente dos puntos, P y Q aparecen como intersección de varillas y en ellos hay que cruzar una sobre otra alternadamente. Las aristas que concurren en estos puntos son las que cortan otras caras del hipotético poliedro, impidiendo su realización. La idea fundamental de R. Connelly fué inventarse una especie de *huecos* en las aristas de esta estructura, con el fin de que pudiesen moverse las aristas sin que tuvieran que cruzarse. El resultado fué un poliedro flexible de 18 vértices, que puede verse en [BH] y en [R1]; en este último artículo se pueden encontrar los desarrollos de dos poliedros, uno de 10 vértices debido al autor y otro con 9 debido a K. Steffen. Se han descrito otros poliedros flexibles, como el ideado por P. Deligne, con 11 vértices y que se muestra en el Video de J. Brette y P. Huet [BH]; éste también se basa en el esqueleto de Bricard, cuando el rectángulo es un cuadrado. Ninguno de ellos se ha obtenido mediante la geometría algebraica que enseñamos en la Universidad.

Ver Fig. 6

Pero si en la Universidad se enseña poca Geometría porque lo que se hace bajo ese nombre no lo consideramos como tal, las perspectivas de futuro son más negras aún. Las directrices que se están debatiendo en el Consejo de Universidades relegan a la Geometría y a la Topología a un plano inferior, en beneficio fundamental del Algebra y del Análisis Matemático. Al menos esto ocurre con las materias troncales, donde aparecen como materias sin entidad propia, fusionadas principalmente con el Algebra. La razón es que nuestras autoridades educativas siguen empecinadas en considerar solamente la visión "burbakista" de la Geometría y de la Topología, donde el componente espacial, visual o intuitivo brilla por su ausencia.

No podrán decirnos nuestras autoridades que no lo sabían y que las deficiencias geométricas de las directrices propias de los Títulos son debidas a su propia ignorancia. Los volúmenes publicados con las sugerencias realizadas desde todos los colectivos sociales están repletos de propuestas en las que la Geometría juega un papel más importante que el dado por los Decretos a esta materia. Pero no hay más ciego que el que no quiere ver, ni más sordo que el que no quiere oir.

No he querido entrar aquí en el papel que juega una parte esencial de la Geometría, como es la Geometría Diferencial, donde se aunan la Geometría métrica, la Topología, el Análisis Matemático y el Algebra; quienes estén interesados en esta materia pueden leer mis opiniones [R2] en el número 17 de la revista *Epsilon* que acaba de publicar la sociedad organizadora de este Congreso.

Nota del autor: Mientras este texto estaba siendo revisado para su publicación, el Consejo de Ministros ha aprobado, entre otros, el Decreto de Directrices Propias del título de Licenciado en Matemáticas. La Geometría continúa tan desconsiderada como en el proyecto.

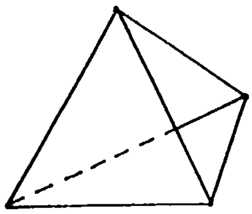


FIGURA 1

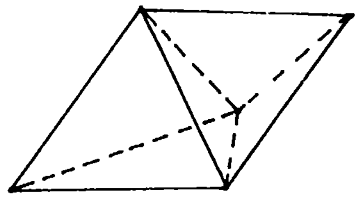


FIGURA 2

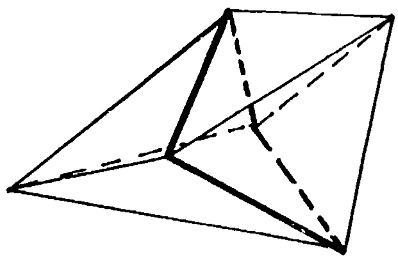


FIGURA 3

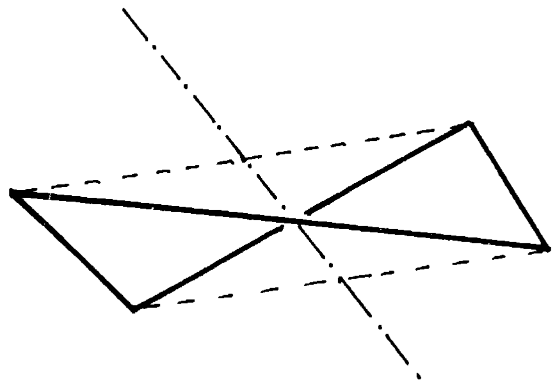


FIGURA 4

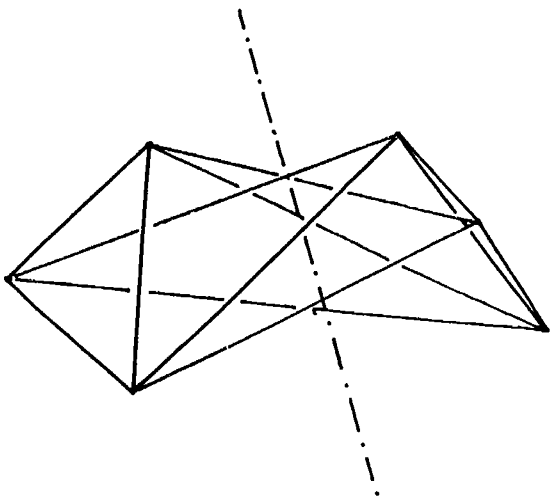


FIGURA 5

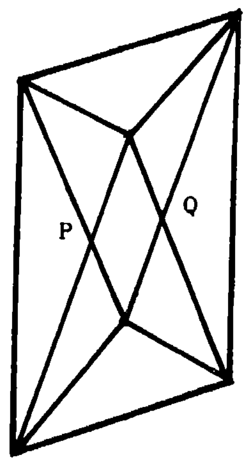


FIGURA 6

REFERENCIAS:

[APR] C. Alsina, R. Pérez y C. Ruiz.- *Simetría Dinámica*. Col. Matemáticas: Cultura y Aprendizaje, vol. 13. Ed. Síntesis. Madrid, 1989.

[B] R. Bricard.- Mémoire sur la théorie de l'octaèdre articulé. *J. Math. Pures Appl.* (5), 3, 1987, 113-148.

[BH] J. Brette y P. Huet.- *Poliédres flexibles*. I.R.E.M. de la Univ. Paris VII (1979).

[C] R. Connelly.- A Flexible Sphere. *Math. Inteligencer*, 1, 1979, 130-131.

[K] F. Klein.- *Consideraciones comparativas sobre las investigaciones geométricas modernas*. Programa publicado con ocasión de su entrada en la Facultad de Filosofía y en el Senado de la Universidad de Erlange en 1872.

[R1] C. Ruiz.- Poliedros flexibles. *SUMA*, 1, 1988, 25-30.

[R2] C. Ruiz.- Geometría diferencial en la formación del Matemático. *Epsilon*, 17, 1990, 63-71.

GEOMETRIA

DISEÑO DE LA EVALUACIÓN

Josep Mª Fortuny, 1990.

A. PRUEBA DE DIAGNOSTICO Y RENDIMIENTO CONCEPTUAL Y PROCESUAL

B. DESARROLLO DE UN PROYECTO DE INVESTIGACION

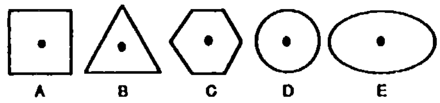
C. GUIA DE OBSERVACION Y AUTOREFLEXION

(A, B, C). RESULTADO

A_1

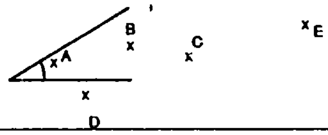
Estructura conceptual

Un perro corre por un camino que siempre está a 5 metros de un palo. ¿Cual de los siguientes dibujos indica el camino?:



1

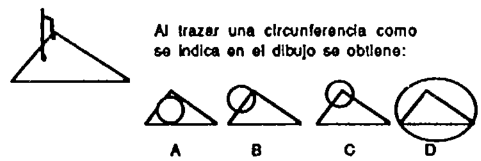
Indicar los puntos que pertenecen al ángulo



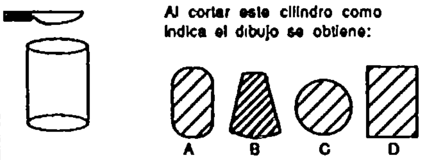
2

A_2

Desarrollo de procesos y algoritmos



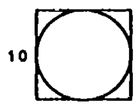
3



4

A_3

Interconexion de procesos y conceptos en situaciones problemáticas



¿Cuanto mide el radio de esta circunferencia?

5

Hay que mover una butaca muy pesada,y el único movimiento posible es hacerlo rotar 90° sobre una de sus esquinas. ¿Será posible moverla de modo que quede exactamente detrás de donde estaba antes, y mirando en la misma dirección?

6

A_4

Nivel de pensamiento y razonamiento

Determinar la figura misteriosa con las siguientes condiciones:

1	Tiene exactamente 6 segmentos	5	No hay ningún par de segmentos paralelos
2	Es una figura cerrada	6	Las intersecciones de pares de segmentos forman ángulos de 60°
3	Todos los segmentos son de la misma longitud	7	Tres de los segmentos forman un triángulo equilátero
4	Todas las intersecciones de pares de segmentos forman ángulos congruentes	8	Los seis segmentos forman 4 triángulos congruentes

7

Comprobar y demostrar la veracidad o falsedad de la siguiente situación:
"Si un poliedro tiene un punto que divide por la mitad a todo segmento (de extremos sobre su superficie) que le atraviesa, entonces sus caras son paralelas dos a dos".

8

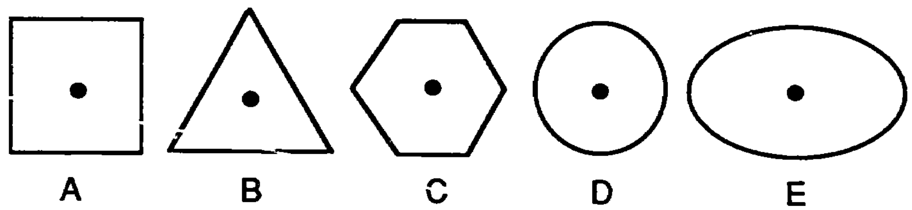
RESULTADO DE LA EVALUACION: A (A, A, A, A)

M O D E L O S

A_1

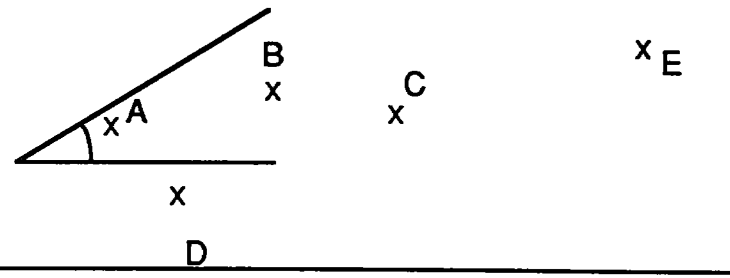
Estructura conceptual

Un perro corre por un camino que siempre está a 5 metros de un palo. ¿Cual de los siguientes dibujos indica el camino?:



1

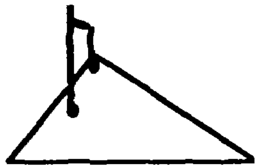
Indicar los puntos que pertenecen al ángulo



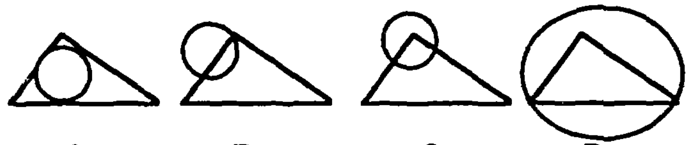
2

A_2

Desarrollo de procesos y algoritmos

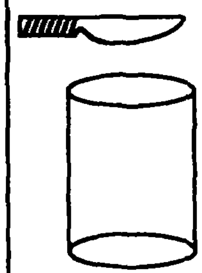


Al trazar una circunferencia como se indica en el dibujo se obtiene:

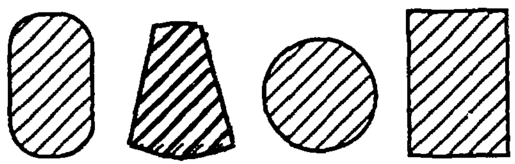


A B C D

3



Al cortar este cilindro como indica el dibujo se obtiene:

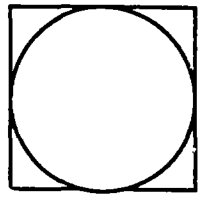


A B C D

4

A_3

Interconexion de procesos y conceptos en situaciones problemáticas

10 

¿Cuanto mide el radio de esta circunferencia?

5

Hay que mover una butaca muy pesada,y el único movimiento posible es hacerlo rotar 90º sobre una de sus esquinas. ¿Será posible moverla de modo que quede exactamente detrás de donde estaba antes, y mirando en la misma dirección?

6

A_4

Nivel de pensamiento y razonamiento

Determinar la figura misteriosa con las siguientes condiciones:

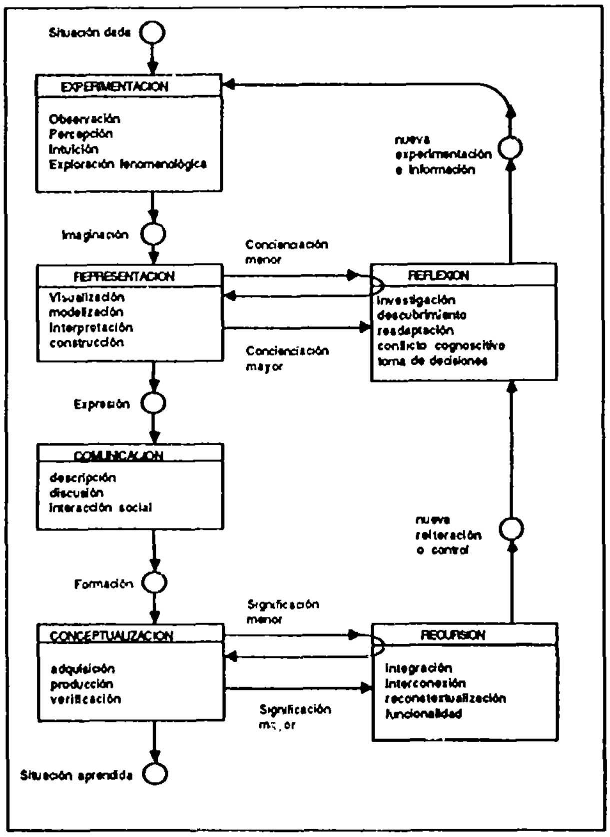
1	Tiene exactamente 6 segmentos	5	No hay ningún par de segmentos paralelos
2	Es una figura cerrada	6	Las intersecciones de pares de segmentos forman ángulos de 60º
3	Todos los segmentos son de la misma longitud	7	Tres de los segmentos forman un triángulo equilátero
4	Todas las intersecciones de pares de segmentos forman ángulos congruentes	8	Los seis segmentos forman 4 triángulos congruentes

7

Comprobar y demostrar la veracidad o falsedad de la siguiente situación:
"Si un poliedro tiene un punto que divide por la mitad a todo segmento (de extremos sobre su superficie) que le atraviesa, entonces sus caras son paralelas dos a dos".

8

B_1



TIPOLOGIA Y PROGRAMA DE ACCIONES

B_2

		Aspectos Instructivos		
		LENGUAJE	INTEGRACION	CONTEXTO
Estrategias Generales	DISEÑO			
	LOCALIZACION			
	VISUALIZACION	VOLAR EN 3D		EN UN PANAL DE MIEL

COMPONENTES Y MODELOS

[redacted]

EN UN PANAL DE MIEL

Identificación

Preguntas centrales: ¿CUALES SON LAS RELACIONES GEOMETRICAS QUE LAS ABEJAS UTILIZAN PARA CONSTRUIR LOS PANALES DE MIEL? ¿PORQUE SE DECIDEN POR UN DETERMINADO TIPO DE ARQUITECTURA?

Nivel: 14+

Objetivo DCB (correspondencia Area y Materia). 3

Implementación

Estrategias generales: VISUALIZACION

Instrucción: (Fases del programa de aprendizaje). CONTEXTO, REPRESENTACION, RECURSION

Destrezas (rutinas, habilidades) DISEÑO DE PATRONES. CONSTRUCCIONES GEOMETRICAS CALCULO GEOMETRICO

Valores y actitudes (culturales, sociales). LA GEOMETRIA COMO SISTEMA EXPLICATIVO Y MODELO DE LA NATURALEZA, APRECIACION DE LA BELLEZA GEOMETRICA

Hechos (vocabulario, definiciones, propiedades) RETICULAS ANGULOS 3D PRISMAS AREA/VOLUMEN RAZONES TRIGONOMETRICAS

Estructuras conceptuales (mapas conceptuales) SUPERFICIE DE AREAS MINIMAS, SIMETRIA COMPOSICION DE POLIEDROS, ECONOMIA ESTRUCTURAL

Cambio conceptual (diagnosis ideas previas, conflicto cognoscitivo) IMAGENES ERRONEAS 2D/3D

Desarrollo

Actividades iniciales
- Seguir las instrucciones: A1-A6

Actividades complementarias
- REALIZAR LOS ESTUDIOS E1-E6

Tecnología

Materiales iniciales: TROZO DE PANAL DE MIEL 14 LAPICES DE SECCION HEXAGONAL Y CIRCULAR, GOMAS ELASTICAS. CARTULINA PLATEADA INSTRUMENTOS DE MEDIDA Y DIBUJO

Materiales complementarios:
- examinar la documentación complementaria.
CALCULADORA. 3 MODELOS DE DODECAEDROS ROMBICOS

Valoración

Reflexión:
- Cumplimentar el "cuestionario pedagógico" (individual)
- Discusión (interacción)

Recursión:
- Revisión didáctica del taller (propuesta)
- Validación docente (experiencia)
- Proyección profesional (informe)

VOLAR EN 3D

Identificación

Preguntas centrales: UNA MAÑANA DE PRIMAVERA CON VIENTO SUAVE Y FRESCO ES IDEAL PARA HACER VOLAR COMETAS. ¿COMO PODEMOS CONSTRUIRLOS?

Nivel: 12+

Objetivo DCB (correspondencia Area y Materia).

Implementación

Estrategias generales: VISUALIZACION

Instrucción: (Fases del programa de aprendizaje): LENGUAJE, REPRESENTACION, MODELIZACION

Destrezas (rutinas, habilidades) PERCEPCION ESPACIAL ESTRUCTURAL

Valores y actitudes (culturales, sociales) APRECIACION DE IMAGENES VISUALES

Hechos (vocabulario, definiciones, propiedades). SOLIDOS GEOMETRICOS RETICULAS

Estructuras conceptuales (mapas conceptuales) COMPOSICION. RELACIONES VOLUMENES MEDIDAS INDIRECTAS

Cambio conceptual (diagnosis ideas previas, conflicto cognoscitivo) RECONOCIMIENTO DE FORMAS

Desarrollo

Actividades iniciales
- Seguir las instrucciones: A.1-A.6

Actividades complementarias
- Explorar la documentación complementaria desde un punto de vista didáctico

Tecnología

Materiales iniciales: ILUSTRACIONES GRAFICAS. 10 NUDOS DE ENCAJE EXAGONAL 24 BARRAS DE 30 CM. 4 VELAS DE NILON EN FORMA DE ROMBO CLINOMETRO

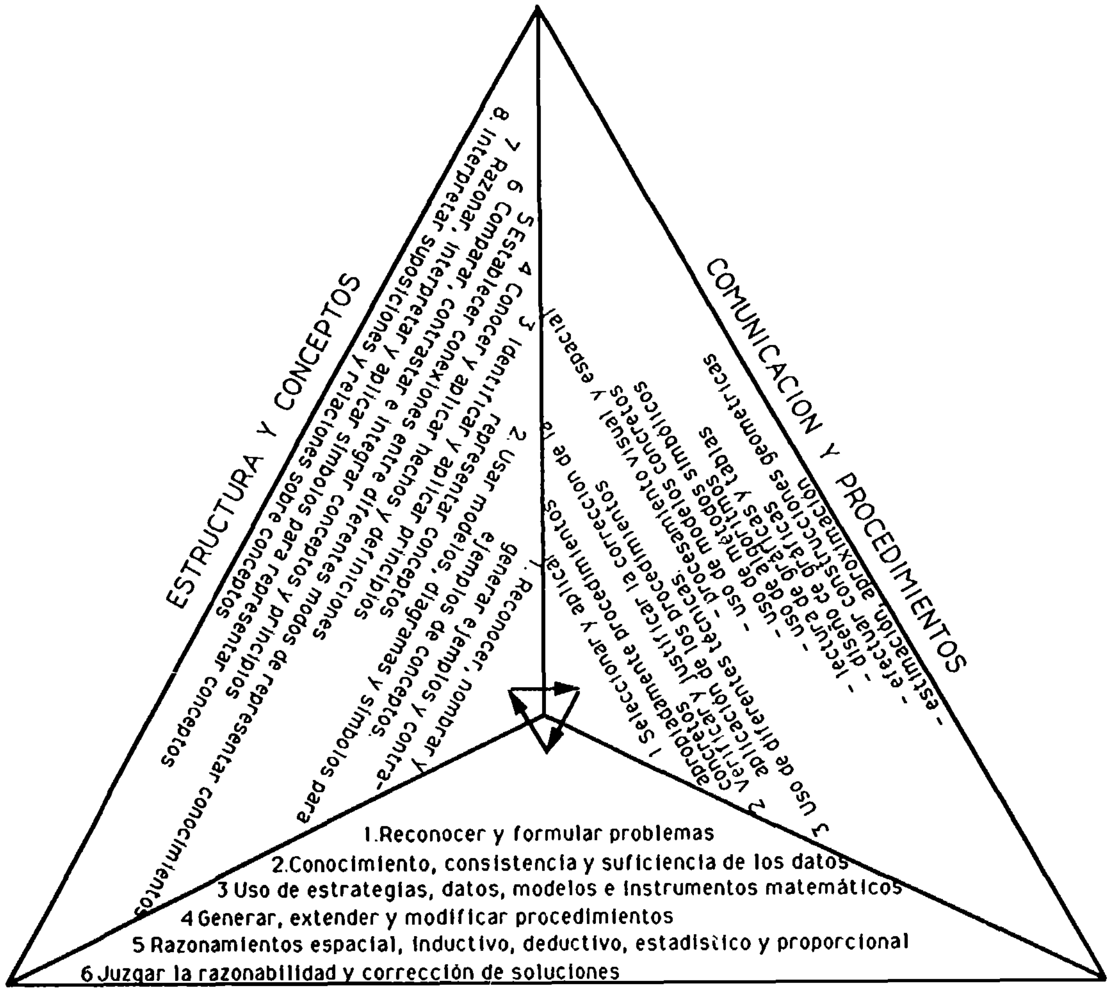
Materiales complementarios:
- examinar la documentación complementaria
TRANSPORTADOR DE CONTACTO. MODELOS DE POLIEDROS

Valoración

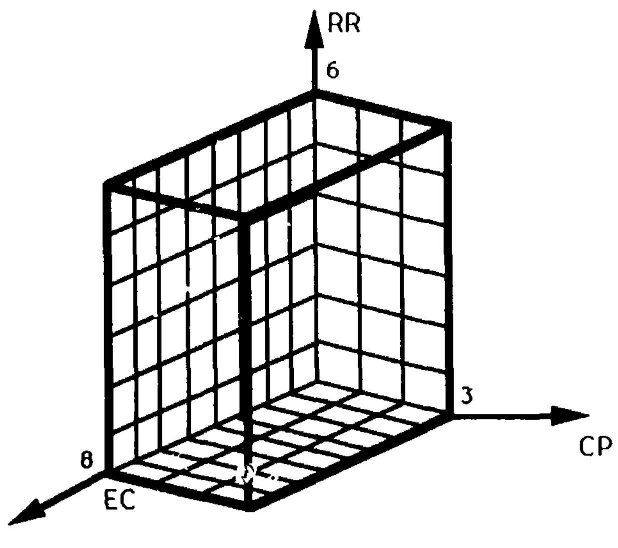
Reflexión:
- Cumplimentar el "cuestionario pedagógico" (individual)
- Discusión (interacción)

Recursión:
- Revisión didáctica del taller (propuesta)
- Validación docente (experiencia)
- Proyección profesional (informe)

EVALUACION DE CAPACIDADES MATEMATICAS



RAZONAMIENTO Y RESOLUCION DE PROBLEMAS



GUIA DE
OBSERVACION Y AUTORREFLEXION

	FICHA/FORMULARIO	ESCALA DE VALORACION
Funcionamiento instructivo	C1p	C1a
Interacción social	C2p	C2a
Actitudes	C3p	C3a
Desarrollo cultural	C4p	C4a
Capacitación laboral	C5p	C5a
	REGISTRO POR EL PROFESOR	CUESTIONARIO PARA EL ALUMNO

[redacted]

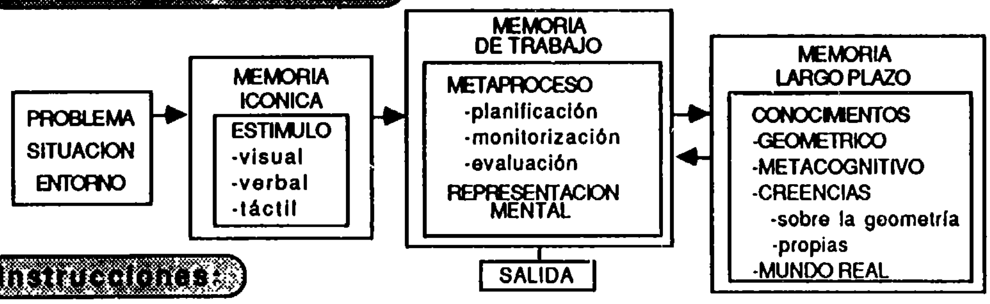
PROPOSITOS Y METODOS DE EVALUACION

PROPOSITO	METODOS	TIPOLOGIA	UNIDAD	USOS
Diagnostico	. Observación . Cuestiones orales sobre explicaciones de procedimiento . Tareas escritas . Test	. rutinas específicas . tipo de procedimiento . concepto . estrategia . tipo de razonamiento	individual	. profesor . alumno
Feedback Instruccion	. Test . Presentación clase . Extensiones en la resolución de problemas . Observación de discursiones de clase . Deberes . Actividades . Trabajos diarios en casa . Trabajos en grupo y proyectos	. integración de conocimientos . actividades que cubren rutinas, conceptos y procesos . aplicación a nuevos contextos . resolución de problemas . razonamiento . experimentación . visualización . escalas		
Puntuación	. Presentaciones orales . Test graduales . Prueba escrita . resolución de problemas . explicaciones . Elaboración proyectos			
Nivel general	. Examenes globales y nacionales			
Evaluación del Programa	. Entrevistas . Analisis de puntuaciones . Observación de discursiones de clase . Evaluación exterior	. expectación y resultados de los alumnos . consistencia y logros del curiculum . revisión y valoración . métodos, clima y resursos de instrucción	. clase . centro	. profesores . administradores . expertos . otros centros de decisión

análisis del proceso cognitivo

IDEAS PREVIAS

esquema constructivista



instrucciones:

cuestionar, interrogar, diagnosticar, discutir, reflexionar,comprobar, conjeturar, modificar, superar obstáculos visuales ...

ADQUISICION DE CONOCIMIENTOS EXPERTOS

acumulación de experiencias

-Casos para empezar (situaciones presentación)
- " de referencia (ejemplos estandars)
- " falsos (contra ejemplos)
- " modelos situaciones
- " para diagnósticos
- " para secuenciar y reorganizar el campo visual (conjeturar y probar)
- " anómalos (ejemplos patológicos y excepciones)

cambio de actitud:

integración experiencia-actividad, modificación de creencias previas, interes, creatividad,...

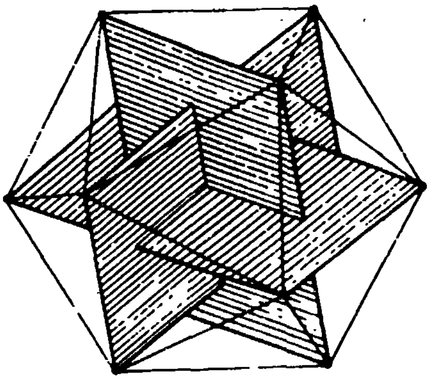
distinción:

conocimientos declarativos, compilativos y procesuales

MODELIZACION DE RAZONAMIENTOS

diseño, ejecución e interacción (S.E.) de programas inteligentes (I.A.) de simulación de aprendizaje (Geometric Supposer, Cabri, 3D,Tutor, 3D-Images...)

estrategia de pensamiento: visual, analítico, analógico, asociación, metáfora, particularización, generalización, abstracción, contradicción, reorganización cognitiva



Areas clave en Ciencia Cognitiva