# PANEL: RESOLUCION DE PROBLEMAS

COORDINADOR: LUIS RICO ROMERO.
PANELISTAS: PEDRO GOMEZ GUZMAN.
PAULO ABRANTES.
LUIS PUIG ESPINOSA.

•Puntos desarrollados en el panel:
- Aprendizaje de las Matemáticas mediante Resolución de Problemas. (Prof. Gómez)
- Resolución de Problemas como elemento del Currículo de Matemáticas. (Prof. Abrantes)
- Investigación sobre Resolución de Problemas en Educación Matemática. (Prof. Puig)

**Primera Sesión:**
Presentación de los Panelistas por el Coordinador.
Visión general del Campo de trabajo: Resolución de Problemas.
Intervención de los Profesores invitados.

Durante los días intermedios entrega por escrito de cuestiones; clasificación de las cuestiones planteadas y distribución entre los panelistas para su contestación.

**Segunda sesión:**
Respuestas a las cuestiones planteadas.
Cuestiones prioritarias en el campo de la Resolución de Problemas.
Debate final y conclusiones.

•Desarrollo de la Primera Sesión
1. Presentación: Educación Matemática y Resolución de Problemas. L. Rico
2. Sistemas Formales, informalmente. Las Matemáticas como herramienta formativa para la Resolución de Problemas. P. Gómez
3. Resolução de problemas e Educação Matemática - alguns aspectos da experiência portuguesa. P. Abrantes
4. Dos o tres cosas que sé de investigación en resolución de problemas. L. Puig

•Cuestiones planteadas a los panelistas.
•Desarrollo de la Segunda Sesión.
•Cierre del Panel.

## EDUCACION MATEMATICA Y RESOLUCION DE PROBLEMAS

Luis Rico Romero
Universidad de Granada. España.

### ¿Resolver o plantear problemas?

La experiencia escolar que recordamos la mayoría de nosotros sobre matemáticas está mucho más relacionada con dificultades, incomprensión, fracaso y rechazo que con actitudes positivas. Si la asignatura de matemáticas tiene alguna imagen generalizada está mucho más asociada con el desencanto y la frustración que con la satisfacción y el éxito de los alumnos. El tópico nos dice que las matemáticas han estado, tradicionalmente, asociadas con el fracaso escolar y, por ello, han constituido un gran problema dentro de la enseñanza obligatoria. Hablar por tanto de Resolución de Problemas como una parte de la Educación Matemática puede resultar para muchos un contrasentido; la enseñanza de las matemáticas parece resolver muy pocos problemas a la mayoría de los escolares, bien al contrario les crea muchos otros.

**¿Qué problemas plantea la Educación Matemática?**

Resulta casi una reiteración reconocer que la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas constituyen una fuente de dificultad. Transmitir a los escolares en periodo de formación obligatoria, entre los 6 y los 16 años, algo más que unos rudimentos de cultura matemática y, sobre todo, conseguir que los interioricen, los integren en su red de conocimientos y los utilicen en la práctica, constituye todo un programa educativo que aún mantiene una fuerte componente utópica.

La Educación Matemática tiene aún varios problemas serios que resolver. En primer lugar, y en el ámbito de una sociedad democrática que debe ofertar una igualdad de oportunidades a todos sus ciudadanos y que, por tanto, debe dotar a cada uno de ellos de unas herramientas intelectuales comunes y de unas referencias culturales compartidas, aún están por determinar cuáles son los componentes básicos de una formación matemática que dé satisfacción a esos requerimientos. Gran parte de nuestros programas están elaborados sobre la base de una tradición centenaria, muchos de los temas y cuestiones que lo constituyen han probado su utilidad para un tipo de sociedad cuyos rasgos principales se han modificado profundamente en los últimos años. Las nuevas tecnologías no consiguen incorporarse a nuestros programas de matemáticas, y el hecho real es que, después del fracaso de las llamadas "matemáticas modernas", existe un miedo considerable a modificar los cuestionarios tradicionales e introducir algún tipo de cambio en profundidad. Los programas actuales de matemáticas preparan a nuestros hijos para que piensen y trabajen en un medio social que está desapareciendo rápidamente y que, seguramente, no existirá cuando ellos sean adultos.

En segundo término, aún seguimos pensando que las mentes de nuestros alumnos son recipientes vacíos que debemos llenar con el máximo de información. Nuestra concepción de cómo los alumnos adquieren conocimiento y qué tipo de estrategia conviene seguir para facilitar esa adquisición, están superados desde hace décadas por los avances de la psicología cognitiva. Ofrecer como única alternativa la memorización de hechos y definiciones y la habilidad en la ejecución de destrezas y procedimientos supone ignorar las posibilidades que presenta la construcción del propio conocimiento y la integración significativa de nuevos elementos en la red conceptual de los alumnos.

En tercer lugar, resulta cuando menos contradictorio que, siendo las matemáticas uno de los fundamentos del desarrollo actual técnico y científico, uno de los instrumentos intelectuales que permiten el dominio y control del hombre sobre la naturaleza y el medio, sea sin embargo uno de los elementos culturales más difíciles de transmitir y dominar. El sistema escolar tiene uno de sus lastres más fuertes en su incapacidad para lograr que las matemáticas constituyan una parte considerable del bagaje cultural del ciudadano de a pie. Para poder superar el actual estado de cosas en este terreno hay que proceder a una profunda revisión tanto de los contenidos que transmitimos como de la contribución que se hace a la adquisición de conocimiento por parte de los alumnos.

**La Resolución de Problemas: una estrategia didáctica.**

Son varios los intentos y las líneas de trabajo, reflexión e investigación que se han desarrollado para promover una enseñanza y aprendizaje de las matemáticas más adecuados con las necesidades actuales. Entre las contribuciones más relevantes se encuentra la que conocemos como Didáctica basada en la Resolución de Problemas o Currículo fundamentado en la Resolución de Problemas. Gran parte de la investigación en Didáctica de la Matemática que se ha realizado en la década de los 80 se ha hecho bajo este enfoque y algunas de las contribuciones a la mejora del currículo de matemáticas han tenido en cuenta esos estudios y sus resultados.

En sentido amplio (Lester 1983) por problema se entiende "una tarea para la cual, el individuo o grupo que se enfrenta a ella necesita o quiere encontrar una solución; no hay un procedimiento fácilmente accesible que garantice o determine completamente la solución; y el individuo o grupo debe realizar intentos para encontrar la solución". En este sentido general, la resolución de problemas debe constituir uno de los objetivos claves del sistema escolar: habilitar a los alumnos a enfrentarse con tareas no previstas y encontrar algún tipo de respuesta adecuado. También constituye un objetivo para la enseñanza de las matemáticas ya que gran parte de su justificación la reciben de su aplicación y utilidad en la vida. Al plantear situaciones nuevas e imprevistas el alumno se ve obligado a reorganizar sus conocimientos y a buscar entre ellos nuevas relaciones. La estrategia didáctica basada en la Resolución de Problemas obliga a superar planteamientos rutinarios y desfasados. Esto implica una concepción diferente de lo que es el aprendizaje. Un problema tiene que poderse relacionar con los conceptos y procedimientos de que dispone el sujeto. El problema tiene que asimilarse a la experiencia del alumno y expresarse en términos conocidos. Dicho en otros términos, cada niño debe obtener su propia representación del problema sobre la base de los conceptos y procedimientos de los que ya dispone. De este modo cada niño elaborará un esquema a partir de sus conocimientos y experiencias previas que le permitirá reorganizar la información disponible hasta alcanzar una respuesta a la cuestión planteada. Los estudiantes deben descubrir por sí mismos cómo resolver un problema; de esta forma aprenden de modo distinto a cuando se les dice cómo hay que proceder para obtener la solución. Los alumnos construyen su propio conocimiento, no son meros recipientes pasivos, que reciben información seleccionada por otro.

La visión del aprendizaje que se desprende de una estrategia didáctica basada en la Resolución de Problemas es la del aprendizaje significativo, fundado sobre una base constructivista.

La Resolución de Problemas acerca las matemáticas a las situaciones cotidianas y pone de manifiesto el tipo de control intelectual que podemos realizar sobre cada situación. Esto es lo que sucede cuando elaboramos un modelo de una situación empleando símbolos y relaciones lógicas, numéricas, geométricas o algebraicas, y, a partir de esa modelización, obtenemos implicaciones de carácter práctico mejorando nuestro conocimiento e información sobre la situación en cuestión. El modelo nos permite responder con precisión y fiabilidad controladas a aquellas cuestiones relevantes que podemos plantearnos en torno a la situación, cuestiones que no son otra cosa que problemas planteados por la situación en estudio.

**La Resolución de Problemas: núcleo de las matemáticas.**

El interés didáctico de la Resolución de Problemas toma su verdadera dimensión cuando consideramos la actividad del matemático profesional. La creación matemática, su verdadero trabajo, consiste en el planteamiento y resolución de cuestiones relevantes dentro de un sistema formal dado. La elaboración de axiomas, la búsqueda de las condiciones previas necesarias, la concreción en las definiciones, las relaciones e implicaciones, no son más que la red de conceptos y procedimientos necesarios que hay que establecer y considerar para dar respuesta a una cuestión importante, es decir, para resolver un problema. Si, en general, se puede afirmar que toda disciplina es un cuerpo más o menos organizado de conocimientos que sirven para dar respuesta a determinadas cuestiones, no cabe duda que las matemáticas satisfacen esta condición. La Resolución de Problemas es una de las finalidades de la matemática y el proceso de resolución de problemas concretos representa la forma real en que los matemáticos trabajan cuando realizan sus tareas específicas.

Resolver problemas no consiste únicamente en <u>utilizar</u> las matemáticas conocidas, necesita de una gran dosis de creatividad y reelaboración de hechos, conceptos y relaciones, por ello la resolución de problemas también es, en el sentido más real del término, <u>crear</u> y <u>construir</u> matemáticas. Memorizar y repetir todas las reglas deductivas que operan en un sistema formal fuertemente estructurado constituye a veces una derivación del comportamiento real del matemático. Confundir los procesos de producción y elaboración del conocimiento matemático con sus resultados cristalizados es un error frecuente en nuestra enseñanza, que está en la base de muchos de los rechazos que se producen con nuestra disciplina. Por ello la Resolución de Problemas constituye no sólo una buena estrategia metodólogica sino que supone una forma de aproximación más real al trabajo en matemáticas.

**La Resolución de Problemas: núcleo de la educación.**

Nuestras reflexiones anteriores han ido dirigidas, principalmente, a destacar la importancia real que tiene la Resolución de Problemas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares. Sin embargo estas consideraciones pueden extenderse a gran parte de las restantes materias. La Resolución de Problemas no agota sus posibilidades con las matemáticas; las ciencias experimentales, la geografía, la historia, las artes plásticas, la lengua, la informática, por enumerar sólo las disciplinas más clásicas, tienen igualmente un fuerte componente heurístico. Todas estas materias organizan un determinado tipo de conocimiento, es decir, estructuran conceptos y secuencian procedimientos que permiten responder a determinadas cuestiones, o lo que es igual, permiten resolver determinados problemas. Por ello, la Resolución de Problemas presenta una vía metodológica adecuada que proporciona criterios que permiten contemplar de forma coordinada el desarrollo de todas las disciplinas.

De aquí el interés general que el educador, cualquier educador, manifiesta en la actualidad por conocer los métodos, materiales, recursos, secuencias didácticas y resultados de aprendizaje obtenidos a partir de una aproximación al conocimiento concebido como forma de detectar, plantear y resolver problemas.

Los resultados obtenidos hasta el momento en este campo son extensos y variados. En algunos casos, como en la resolución de

Problemas Aritméticos constituyen una parcela de conocimiento científico organizada con modelos teóricos útiles que permiten interpretar los resultados del aprendizaje y, lo que es más importante, diseñar las secuencias didácticas y metodológicas para lograr un dominio práctico por los alumnos en la resolución de problemas numéricos.

El intercambio de información entre distintos especialistas e investigadores de diversas facetas en Resolución de Problemas, la discusión de ponencias y comunicaciones, permiten obtener una visión global más actualizada de los avances conseguidos, de la viabilidad real de los diferentes proyectos, de los resultados conocidos y de las líneas de trabajo que se abren para el futuro. En este sentido, este Panel sobre Resolución de Problemas en el Primer Congreso Iberoamericano de Educación Matemática creemos que va a aportar líneas de reflexión importantes a los especialistas e investigadores en el tema y más aún, va a ayudarnos a todos los que nos dedicamos a trabajar en Educación Matemática a mejorar nuestra capacidad para resolver ese gran problema que plantea la transmisión y adquisición de conocimiento matemático.

## SISTEMAS FORMALES, INFORMALMENTE. LAS MATEMATICAS COMO HERRAMIENTA FORMATIVA PARA LA RESOLUCION DE PROBLEMAS

Pedro Gómez Guzmán
Universidad de los Andes. Colombia

### Introducción

Cuando se habla de resolver problemas dentro del contexto de las matemáticas, se tiende a pensar en los métodos por medio de los cuales es posible resolver problemas *de* matemáticas. Los problemas de matemáticas son, en general, problemas sencillos en el sentido de que se encuentran bien definidos y se conocen los datos y las condiciones que debe cumplir una solución para ser válida. Sin embargo, por fuera del contexto de las matemáticas y, tanto en su actividad académica, como profesional, el individuo se encuentra, en general, con otro tipo de problemas. Estos son problemas que no están bien definidos y en los cuales es difícil identificar, de manera sistemática, una solución. El estudio de las matemáticas puede aportar al desarrollo de las capacidades necesarias para atacar y resolver este tipo de problemas. El proyecto que se presenta a continuación propone un curso para cumplir con este objetivo.

### Definición del problema

<u>Los aspectos informativo y formativo</u>. El estudio de las matemáticas tiene un aspecto informativo y un aspecto formativo. El aspecto informativo le permite al individuo conocer un conjunto de herramientas por medio de las cuales éste puede resolver los problemas para los cuales estas herramientas fueron diseñadas. El aspecto formativo es más difícil de definir puesto que tiene que ver con el desarrollo de ciertas capacidades por parte del individuo. La mayor parte de los cursos de matemáticas se centran en el aspecto informativo, dejando el aspecto formativo como resultado indirecto de las actividades que tiene que desarrollar el estudiante dentro del curso. No obstante, es posible diseñar e implementar cursos de matemáticas que se centren en el aspecto formativo. Para ello, hay que identificar, en primera instancia,

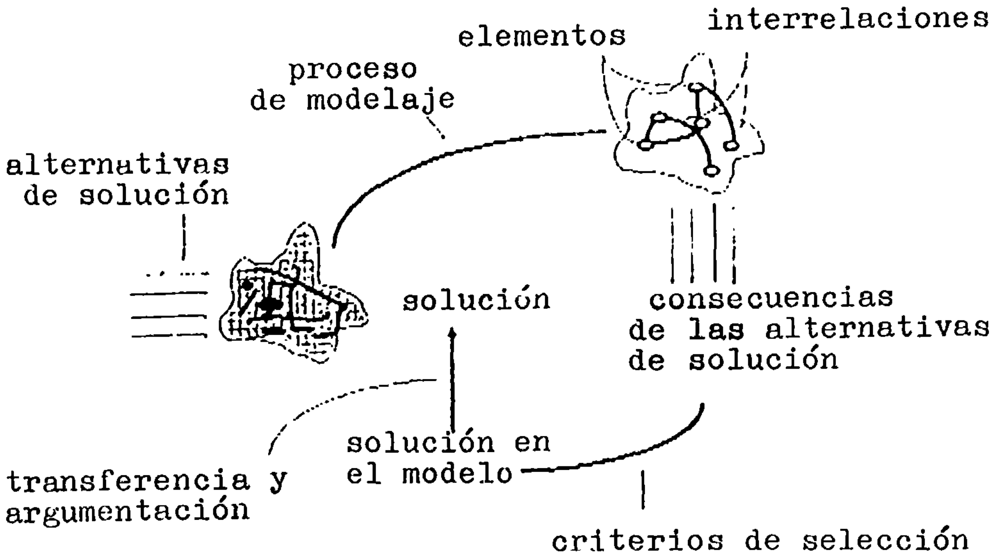
las capacidades que se desean desarrollar en el estudiante. En el caso del presente proyecto, se desean desarrollar en el estudiante las capacidades para el análisis de "problemas complejos" a través de la construcción de modelos. Pero, ¿qué es un problema complejo?.
Los problemas complejos. La mayor parte de los problemas que el estudiante debe resolver durante su periodo de estudios son problemas "sencillos"; esto es, problemas bien definidos en los que los elementos de partida se encuentran dados y en los que se conocen las condiciones que debe cumplir una solución para ser aceptada. Sin embargo, la mayor parte de los problemas que debe atacar el individuo durante su carrera profesional no son de este tipo. Son, por el contrario, "problemas complejos" (Un ejemplo de un "problema complejo" es la elección de una profesión por parte del estudiante que va a comenzar sus estudios universitarios. Se conocen las alternativas de solución y el estudiante puede determinar los criterios de selección de las consecuencias de cada alternativa, puesto que puede definir en qué situación desearía encontrarse durante su vida profesional), que no se encuentran bien definidos y que contienen una gran cantidad de elementos e interrelaciones entre estos elementos junto con múltiples facetas e información innecesaria. Son "problemas complejos" porque resulta evidente que es necesario simplificarlos para poder encontrar una solución (Se podría hablar de problemas "reales" o "prácticos").
Los modelos. Este proceso de "simplificación" del problema complejo requiere de la construcción de un *modelo* del problema dentro del cual sea posible evaluar la *bondad* de diferentes soluciones al mismo. Se hace por lo tanto necesario desarrollar en el estudiante la capacidad de construir y utilizar modelos para la solución de problemas complejos. Sin embargo, la enseñanza tradicional de las matemáticas, al centrarse en la solución de problemas "sencillos", no permite que el estudiante desarrolle eficazmente esta capacidad.

El proyecto *Sistemas formales, informalmente* propone un curso dentro del cual se utilizan algunos aspectos de las matemáticas para desarrollar estas capacidades. El curso se centra alrededor de una herramienta de modelaje que se presenta a continuación.

**El proceso de modelaje.**

El concepto. El concepto de modelaje que se propone desarrollar dentro del curso es sencillo y restringido. Su propósito es el de proponer una herramienta práctica para el análisis de problemas complejos. Esta herramienta supone que se conocen varias alternativas de solución del problema y que se conocen también los criterios de selección que permiten identificar la *bondad* de los resultados posibles de implementar cada una de las alternativas de solución. El problema se centra en el hecho de que, al estar analizando un problema complejo, no es posible conocer *a priori* cuáles son las consecuencias de implementar cada una de las alternativas de solución. Es por ello que se hace necesario producir una *simplificación* del problema, dentro de la cual se pueda analizar cada una de las alternativas de solución. Esta simplificación del problema la llamamos un *modelo*.
El proceso. El modelo contiene únicamente los elementos y las interrelaciones entre estos elementos que son relevantes, tanto al problema en cuestión, como a las alternativas de solución que se desean analizar. Una vez que los elementos y las interrelaciones

se han identificado e implementado dentro del modelo, es posible deducir lógicamente las consecuencias de implementar cada una de las alternativas de solución. En este momento, se puede considerar que el problema se ha resuelto, puesto que basta analizar cada una de las consecuencias de acuerdo a los criterios de selección previamente identificados para determinar la mejor alternativa de solución. El proceso se puede ver en la siguiente gráfica.




**La estrategia.**

El proceso de resolución de un problema complejo a través de un modelo requiere del conocimiento de una herramienta y del desarrollo de un conjunto de capacidades por parte del individuo. Estos son los requisitos que el curso debe satisfacer.

*Las herramientas de modelaje.* El curso propone tres herramientas de modelaje. Una herramienta inicial sencilla que introduce las principales características del proceso, pero que contiene restricciones. Una segunda herramienta general que elimina las restricciones de la herramienta inicial. Y una herramienta formal que utiliza los conceptos de sistemas formales.

*La capacidad de abstracción.* El desarrollo de la capacidad de abstracción es central dentro del proceso puesto que es a través de ella que se hace posible identificar los elementos y las interrelaciones relevantes en la construcción del modelo. Esta capacidad de abstracción se desarrolla por medio del estudio de sistemas formales y de las realidades que estos modelan.

*La capacidad de análisis y raciocinio lógico.* Esta capacidad es necesaria en el manejo interno de los sistemas formales; en el análisis, al interior de un modelo, de las consecuencias de la implementación de una alternativa de solución; y en la construcción de argumentos que permitan sustentar la validez de la solución. Esta capacidad se desarrolla a través del manejo de sistemas formales.

**Los objetivos.**

La estrategia que se acaba de presentar permite identificar los principales objetivos del curso. Estos son:

*El modelaje como medio para atacar problemas.* El curso pretende desarrollar en el estudiante la capacidad de atacar problemas dentro de situaciones complejas por medio de la construcción de modelos que identifican los elementos y las interrelaciones relevantes de la situación en cuestión. Esto se logra al hacer trabajar al estudiante dentro de un ambiente de sistemas formales en el que el estudiante analiza "realidades" particulares y construye los sistemas formales que las modelan.
*La argumentación como medio para sustentar tesis.* El curso pretende desarrollar en el estudiante la capacidad de producir argumentos válidos para sustentar tesis por medio de la utilización de modelos que permiten identificar las premisas, el proceso lógico y las conclusiones a las cuales se quiere llegar.
*Aproximación a "otro" tipo de matemáticas.* El curso, al obligar al estudiante a trabajar dentro del ambiente de sistemas formales, lo lleva a descubrir este aspecto de las matemáticas modernas que no es posible presentar frecuentemente en los demás cursos de matemáticas.

Contenido.

El curso contiene los siguientes temas:
Introducción y motivación.-
*Los sistemas sociales y las matemáticas.* Se introducen los conceptos de *sistema social* y de *problema complejo.* Se motiva la necesidad de simplificar los problemas y de desarrollar la capacidad de abstracción.
*La herramienta inicial.* Se presenta una herramienta inicial y restringida de modelaje con la que se introducen los principales conceptos y procedimientos necesarios para la construcción de un modelo. Se motiva la necesidad de desarrollar la capacidad de análisis y raciocinio lógico.
Sistemas formales.-
*El acertijo de MU.* Tema introductorio a los sistemas formales donde se definen los principales conceptos y se desarrolla el manejo técnico de los mismos, dentro de un ambiente de juego.
*Adivine la regla.* Juego en el que, a partir de los conceptos y herramientas utilizados en el *acertijo de MU*, se desarrolla el manejo de notación y se introduce al estudiante a los principales conceptos y técnicas del método científico como herramienta para la resolución de problemas.
*El método axiomático.* Dentro del marco de los sistemas formales, se presenta una parte de la lógica, introduciendo una herramienta gráfica para el análisis de argumentos. Se introducen las dos reglas de deducción lógica tradicionales con el propósito de desarrollar la capacidad de análisis y raciocinio lógico del estudiante.
*Fractales.* Se presentan los fractales como una primera realidad que es posible modelar a través de los sistemas formales. Se introducen los conceptos de lenguaje e interpretación dentro del proceso de modelaje.
*Producir los números.* Se analiza la aritmética como una nueva realidad y se construye un sistema formal que la modela parcialmente.
*Sistemas formales y lenguaje.* Se considera el lenguaje natural como una realidad. Por medio de los sistemas formales, se construye un modelo de gramática generativa.
La herramienta de modelaje.-
*La herramienta general.* Se propone una herramienta general de modelaje para la resolución de problemas complejos que resuelve

las restricciones de la herramienta inicial.
*La formalización de la herramienta.* Se formaliza la herramienta general dentro del marco de los sistemas formales.
*El método de las cajitas.* Se propone un método para el análisis de discursos basado en los conceptos desarrollados en el curso.

**Metodología.**

El curso utiliza las siguientes herramientas metodológicas:
*La discusión en clase.* La mayor parte del curso se desarrolla dentro de un esquema en el que el estudiante debe trabajar en su casa el tema de la siguiente clase. En el salón de clase se produce una discusión sobre el tema.
*Trabajos de investigación.* Cada estudiante debe producir un trabajo de investigación en el cual resuelve un problema complejo y para el cual presenta un trabajo por escrito y hace una exposición.
*Didactigramas.* El curso estará apoyado por programas de computador que se están desarrollando para algunos de los temas del curso.
*Texto.* El curso tiene un libro de texto obligatorio.
*Guía del profesor.* El profesor está apoyado por una guía que presenta los objetivos de cada tema y contiene sugerencias metodológicas para cada uno de ellos.

## RESOLUÇAO DE PROBLEMAS E EDUCAÇAO MATEMATICA - ALGUNS ASPECTOS DA EXPERIENCIA PORTUGUESA

Paulo Abrantes
Universidade de Lisboa. Portugal.

### As duas últimas décadas

No começo dos anos setenta, uma reforma global do sistema educativo alargava a escolaridade obrigatória de quatro para seis anos, criando as escolas preparatórias (níveis 5-6) e dividindo os estudos secundários em dois cursos: o curso geral (níveis 7-9) e o curso complementar (níveis 10-11, mais tarde 10-12). Ao mesmo tempo, programas de Matemática inspirados nas ideias da *Matemática Moderna* eram generalizados a todos os níveis de ensino, depois de terem sido ensaiados durante alguns anos apenas em turmas experimentais dos últimos dois anos do ensino liceal (secundário pré-universitário). As transformações políticas e sociais ocorridas em Portugal a seguir a Abril de 1974 vieram ainda tornar mais acentuado o desfazamento entre a Matemática escolar e os novos objectivos que se apontavam para a educação de um número crescente de jovens[1]. O insucesso escolar e o desinteresse pela Matemática aumentaram muito. E, no entanto, os programas mantiveram-se praticamente inalterados (apenas com a eliminação de aspectos mais aberrantes) até hoje, quando finalmente têm lugar uma nova reforma e novos programas para todas as disciplinas.

Pelas razões apontadas, não é difícil perceber-se que na década de setenta a resolução de problemas tinha, na Matemática escolar em Portugal, um peso muito reduzido. A principal ênfase era colocada na introdução muito cedo de um formalismo absurdo, em aspectos da teoria de conjuntos, nas estruturas e nas suas propriedades, enquanto a Geometria (apesar de tudo, uma fonte de problemas variados) praticamente desaparecida. Aos olhos dos alunos, a Matemática não deixava de ser uma ciência toda feita e organizada, traduzida num conjunto de termos e regras rígidas que era preciso memorizar para se resolverem determinados tipos de exercícios.

Embora não tenha havido qualquer modificação sensível nos programas -que aportarem sempre aspectos ligados à resolução de problemas entre os seus objectivos gerais mas, na prática, reduziam-na a alguns problemas de aplicação de certos *tópicos*- as recomendações internacionais do início da década[2] não deixaram de ter reflexos. Em 1983, começam a realizar-se as Olimpíadas nacionais de Matemática; em escolas preparatórias e secundárias, organizam-se concursos de problemas e "semanas da Matemática" enquanto os clubes de Matemática se tornam uma realidade visível; embora de uma forma nem sempre muito clara, o uso dos computadores é também um facto novo que contribui para que mais actividades de resolução de problemas ocorram nas escolas; em muitas aulas de Matemática, os professores, mesmo não alterando subitamente a sua maneira de orientar o processo de ensino-aprendizagem, aceitam como positivas e começam a organizar actividades como o "problema da semana".

A orientação voltada para a resolução de problemas de uma nova área de Didáctica da Matemática na formação inicial dos professores, bem como o *estatuto universitário* que a educação matemática finalmente adquire (com a aceitação de estudos pósgraduados nesta *especialidade*, incluindo o doutoramento) e, sobretudo, a criação (em 1986) e o rápido crescimento da Associação de Professores de Matemática e dos seus Encontros e publicações, são factos recentes de enorme significado que em muito contribuiram para os acontecimentos atrás indicados e que exercem igualmente uma influência considerável sobre as perspectivas futuras.

## Tendências actuais e futuras

A resoluçao de problemas e os novos programas. Versões quase definitivas dos novos programas de Matemática estão prontas para uma fase de ensaio em turmas experimentais do primeiro ano de cada ciclo de estudos ($1^{o}$,$5^{o}$,$7^{o}$ e $10^{o}$ anos). Aspectos contraditórios marcaram a fase de elaboração destes programas: eles foram postos à discussão de uma maneira mais aberta do que era habitual mas, como sempre, foram concebidos e redigidos de acordo com uma metodologia de desenvolvimento curricular que não foi, ela própria, sujeita a discussão.

Em todos os níveis de ensino, a resolução de problemas terá avançado um pouco. O progresso é mais nítido no $1^{o}$ ciclo do Ensino Básico (níveis 1-4), em cujo programa os *Problemas* (no duplo sentido de situações "de exploração e descoberta" e "de aplicação") surgem no centro de um esquema que inclui as unidades "Números e operações", "Grandezas e medidas" e "Espaço e Forma". O programa afirma que "a resolução de situações problemáticas... deverá constituir a actividade fundamental... e estar presente no desenvolvimento de todos os tópicos".

Nos restantes níveis do Ensino Básico e no Secundário, a resolução de problemas surge como um objectivo geral ao nível das capacidades mas, quanto aos *conhecimentos*, os programas apontam listas muito extensas e pormenorizadas de objectivos comportamentais em termos de tópicos específicos, deixando aos problemas um espaço que parece reduzir-se a actividades de aplicação em algumas unidades e a uma metodologia a usar quando possível. Claramente (são os próprios autores que o têm afirmado) estes programas não sugerem um ensino baseado ou mesmo centrado na resolução de problemas.

A resoluçao de problemas, os alunos e os professores. Há evidência de uma grande adesão dos alunos -sobretudo dos mais novos- à actividade de resolução de problemas propostas pelas Olimpíadas, por concursos de âmbito local ou por actividades realizadas na sala de aula. No entanto, não é raro que algumas destas realizações envolvam aspectos contraditórios: não tendo as actividades de resolução de problemas uma influência muito grande na maneira como a disciplina de Matemática é orientada no dia-a-dia na sala de aula, os problemas são muitas vezes encarados pelos alunos como um "extra" e pelos professores como uma simples questão de *motivação externa*. Além disso, provas como as Olimpíadas (incluindo problemas difíceis e normalmente fechados para serem resolvidos individualmente e num tempo limitado) atraem os alunos com um talento especial mas afastam (sobretudo depois dos primeiros rotundos fracassos) aqueles que se consideram fracos ou não se sentem confiantes em Matemática. Embora não eliminando estes factores, parecem mais produtivas (para um maior número de alunos) iniciativas que podem ser *controladas* dentro da escola como é, por exemplo, o caso de um concurso bastante aberto que um clube de Matemática de uma escola secundária lançou a partir dos problemas surgidos numa coluna semanal de um jornal diário de grande tiragem[3].

A questão essencial que precisa de ser atacada tem a ver com concepções dominantes (entre os alunos e os professores) sobre a verdadeira natureza da Matemática e sobre o papel que ela desempenha enquanto disciplina escolar. A visão de uma ciência acabada (dominada por uns quantos especialistas) e de uma disciplina do tipo "certo-ou-errado" que consiste num certo número de termos, regras e tipos de exercícios mais ou menos complicados, gera atitudes que tendem a encarar os problemas como um *apêndice* interessante mas não como uma *coisa essencial* em Matemática. As consequências são várias: a resolução de problemas é vista como um meio (entre outros) de ensinar/aprender Matemática que só pode usar-se com alguns alunos e que não pode *contar muito* numa avaliação baseada em testes e exames escritos; a própria noção do que é um problema em Matemática restringe-se a situações pouco abertas de aplicação de conhecimentos prévios ou a questões que requerem talentos especiais de descoberta.

A actual situação tenderá, no entanto, a evoluir. No PROFMAT-89 (Encontro nacional de professores de Matemática, realizado em Outubro passado), o grupo da resolução de problemas foi, entre nove grupos temáticos, o mais participado ao ter sido escolhido por cerca de 80 dos 500 participantes. Das 40 comunicações orais apresentadas, perto de um terço referia-se explicitamente à resolução de problemas que apareceu numa proporção ainda mais elevada entre as 17 sessões práticas realizadas no Encontro. Este *primeiro lugar*, entre os temas do Encontro, confirma um lugar idêntico se fizermos um balanço aos artigos publicados na revista *Educação e Matemática* desde 1987[4]. Embora muitas destas comunicações e artigos se refiram a actividades extra-curriculares, a programas de formação de professores ou a iniciativas mais ou menos pontuais, o seu rápido aumento de ano para ano, em quantidade e qualidade, poderá prenunciar mudanças significativas no papel que os professores atribuem à resolução de problemas.

<u>A resoluçao de problemas, a investigaçao e a inovaçao</u>. Um número considerável de teses de mestrado e doutoramento em educação matemática (que començaram a ser produzidas em Portugal a partir dos anos 80) lidam, de um modo directo ou indirecto, com a resolução de problemas. Estão neste caso teses já concluídas ou em preparação sobre programas de formação ou sobre atitudes e

concepções dos professores, bem como sobre a utilização educativa de computadores (através de meios como a Folha de Cálculo ou a linguagem LOGO) e das calculadoras.

Ao mesmo tempo, experiências de inovação curricular tendem também a colocar a resolução de problemas no centro de interesses. Um caso mais nítido é o de um Projecto iniciado em 1988 e dirigido ao 3° ciclo do Ensino Básico (níveis 7-9) que tem desenvolvido em turmas experimentais um currículo claramente centrado nos processos matemáticos envolvidos na exploração de situações problemáticas[5]. Experiências como esta parecem, no entanto, reclamar uma perspectiva muito aberta e abrangente do que é um problema em Matemática e do que é a resolução de problemas no currículo desta disciplina. De facto, os problemas surgem como situações abertas que é preciso explorar, muitas vezes associadas a métodos como o trabalho prático e o trabalho de projecto, e convidando os alunos a uma actividade prolongada que inclui muita discussão e trabalho em pequenos grupos.

**Em resumo...**

O interesse pela resolução de problemas como aspecto central do processo de aprendizagem em Matemática terá sido nos últimos anos, em Portugal, um traço claro da actividade dos investigadores na nova área da educação matemática, de muitos daqueles que dedicam à formação inicial dos professores e mesmo de um número crescente de professores mais empenhados na renovação educativa.. Este panorama terá favorecido um rápido crescimento de iniciativas de diversos tipos em torno da resolução de problemas mas a prática tem confirmado que a influência de um tal movimento na forma de conceber os currículos e programas de Matemática e na maneira como a disciplina é ensinada no dia-a-dia, na maioria das aulas, é um processo lento que requer um trabalho prolongado e em várias frentes -em particular no domínio das concepções e atitudes dos professores relativamente à Matemática e à aprendizagem.

Mas a evolução registada nos últimos anos nessas várias frentes (na investigação, na formação de professores, nas experiências de inovação curricular, no papel do movimento associativo dos professores de Matemática, etc.) contém um grande número de elementos susceptíveis de nos deixar optimistas quanto ao que se passará nos anos 90.

**Notas:**

[1] Uma análise mais pormenorizada encontra-se no texto "La Enseñanza de la Matemática en Portugal" (intervenção de Paulo Abrantes no simposium internacional - Sevilla 1986) publicado em *Epsilon*, n° extraordinario, 1989.

[2] *An Agenda for Action* (NCTM, 1980); *Mathematics Counts* (relatório Cockroft, 1982); etc.

[3] O diário *Público* inclui semanalmente a secção *Desafios*, com propostas e discussão de problemas, da autoria de Eduardo Veloso e José Paulo Viana que são ambos membros responsáveis da Associação de Professores de Matemática.

[4] *Educaçao e Matemática* é a revista da Associação de Professores de Matemática, publicada trimestralmente a partir de Janeiro de 1987.

[5] Trata-se do Projecto MAT789. Ver, por exemplo, "Inovação curricular em Matemática no 3° ciclo do Ensino Básico" (I-CIBEM, Sevilla, 1990).

# DOS O TRES COSAS QUE SE DE INVESTIGACION EN RESOLUCION DE PROBLEMAS

Luis Puig Espinosa
Universidad de Valencia. España.

De todos es conocido que la pasada década se inició bajo múltiples invocaciones a la resolución de problemas como centro de la enseñanza de las matemáticas. Las asociaciones de profesores, en particular el NCTM de Estados Unidos (NCTM, 1980), se convirtieron en portaestandartes de tales llamamientos, que también aparecieron en lugar destacado en los informes encargados o realizados por organismos oficiales y en las recomendaciones o programas para la reforma de los currículos que se siguieron de ellos. El informe Cockcroft en Inglaterra (Cockcroft, 1982) o los diversos documentos producidos en el curso del proceso de reforma, en particular el Diseño Curricular Base (MEC, 1989) son la parte que en España es más popular o que está más presente.

Todas estas proclamas, dirigidas a la mejora de la enseñanza de las matemáticas o a cambios curriculares, se acompañaron con la constatación de la necesidad de que se diera un impulso especial a la investigación en resolución de problemas.

Efectivamente, ahora que ya nos encontramos en una nueva década, se puede constatar que tales llamamientos han tenido un resultado notable: la consideración de la resolución de problemas como una componente esencial de lo que hay que hacer en las clases de matemáticas en los sistemas escolares se ha convertido en un lugar común, algo que siempre se da por supuesto, algo cuya evidencia no se discute. También es un hecho que durante la pasada década han florecido, en los libros de texto o en materiales para ser usados en clase, problemas e ideas sobre cómo resolver problemas e, incluso, hay ejemplos de desarrollos curriculares que se presentan como meras colecciones de problemas. Y no es menos cierto que se han desarrollado un buen número de investigaciones que caen bajo la etiqueta genérica de resolución de problemas. No es mi intención intentar aquí un resumen o un panorama general de lo que ha resultado de ello, sino sólo señalar algunos aspectos problemáticos o que me llaman la atención.

Empezaré por un hecho que puede resultar paradójico después de lo dicho. Un índice de la pujanza de un área de investigación es, sin duda, su presencia en congresos y panoramas generales o resúmenes de resultados de investigaciones, pues bien, en la lista de grupos de trabajo para el próximo ICME, que se celebrará en 1992 en Québec, Canadá, no figura ninguno dedicado a la resolución de problemas. Tampoco aparece la resolución de problemas como capítulo en el libro *Mathematics and Cognition* (Nesher y Kilpatrick, 1990), que presenta una síntesis de las investigaciones realizadas durante los últimos diez años en el grupo internacional hoy por hoy de más prestigio, el International Group for the Psychology of Mathematics Education, más conocido por las siglas PME. En este último caso puede encontrarse una explicación de esta ausencia de la resolución de problemas como área específica en los criterios con que se agrupan los informes de investigación en los congresos que el grupo organiza. En efecto, al comienzo de las actas del congreso de PME que se celebró este año en México (Booker, Cobb y Navarro de Mendicuti, 1990), el comité de programa narra el proceso de agrupar los informes que se presentaron y cómo decidieron usar como grandes grupos *Aprendizaje de las matemáticas, Enseñanza de las matemáticas, Interacción social y Análisis didácticos*, subdivididos ulteriormente algunos de ellos en función de las partes de las matemáticas escolares, y señalan explícitamente que no usaron la categoría tradicional de resolución de problemas porque "investigaciones recientes han demostrado que la cognición matemática se da en una situación y la conceptualización específica del dominio representa un papel crucial en el éxito al resolver problemas de matemáticas". Consecuentemente, las investigaciones sobre resolución de problemas se asociaron a los contenidos matemáticos de los problemas cuya resolución era objeto de investigación. Conque de esta declaración se podría seguir que queda excluído que pueda tratarse o investigarse la resolución de problemas en general, independientemente del contenido matemático concreto de los problemas en cuestión. La consecuencia que yo quiero poner de relieve es, sin embargo, distinta, ya que, por el contrario, pienso que hay rasgos de la resolución de problemas matemáticos que pueden tratarse e investigarse independientemente del contenido concreto y, de hecho, en la tradición de Polya, se han desarrollado un buen número de investigaciones en ese sentido. Lo que sucede, a mi entender, es que los objetivos con que se investiga la resolución de problemas de matemáticas en los sistemas escolares no son siempre los mismos, como no lo son las funciones que los problemas están llamados a cumplir en los currículos de matemáticas, ni las teorías con que se examinan.

Así, en el libro que presenta la síntesis de la investigación de PME citado antes, Balacheff (1990) plantea, entre las perspectivas futuras para la investigación, estas dos preguntas, que tienen que ver con los problemas:

- ¿Cómo vamos a caracterizar la clase de problemas relacionada especialmente con un item de conocimiento matemático?
- Entre las características de una clase de problemas matemáticos, ¿cuáles determinan los procesos cognitivos de los estudiantes y por tanto la naturaleza del conocimiento que construyen?

Estas preguntas de investigación se derivan al menos de una cierta concepción constructivista del aprendizaje, por un lado: del presupuesto de que el significado de los conceptos matemáticos reside no tanto en su definición como en la clase de problemas que permite que uno pueda resolver -y, por tanto, de la idea asociada de campos conceptuales como lo que ha de ser objeto de investigación y, también de enseñanza-, y de la idea, ya expresada antes, de la dependencia de los procesos cognitivos de los que aprenden del dominio concreto que están aprendiendo.

Preguntas similares pueden encontrarse en el programa de investigación para el álgebra que Wagner y Kieran (1989) han planteado como resultado de un proyecto de establecimiento de programas de investigación para la educación matemática organizado por el NCTM recientemente:

- ¿Qué es un problema verbal algebraico? ¿Hay problemas verbales que son intrínsecamente más algebraicos que aritméticos? ¿Cuándo un método de resolver problemas verbales es más algebraico que aritmético?
- Hay tipos particulares de problemas verbales que estimulan el desarrollo del razonamiento algebraico?
- ¿Qué está involucrado en el proceso de traducir problemas verbales a notación algebraica?

En todas estas preguntas, el objetivo de la investigación gira en torno a los conceptos, campos conceptuales o estructuras conceptuales, presentes en las matemáticas escolares, y la función que se le asigna a los problemas en la enseñanza es básicamente proporcionarles el campo semántico a partir del cual el que aprende puede dotarlos de sentido.

Hay una larga tradición de estudios desde esta óptica, ya clásicos y que han consolidado resultados y estilos de investigar, sobre todo en el dominio de la aritmética. En mi libro con Fernando Cerdán *Problemas aritméticos escolares* (Puig y Cerdán, 1989) he presentado una síntesis de lo que sé que se sabe en este terreno. Lo que se ha investigado sobre problemas aditivos y los resultados obtenidos permiten tomar este área de investigación, que está, en cierto sentido terminada, como paradigma. En efecto, se tiene una manera de clasificar los problemas, en función de su componente semántica, que da cuenta de las dificultades que tienen los niños; se han catalogado los modos de resolver que éstos utilizan efectivamente, y se han organizado por niveles los conocimientos pragmáticos de los lenguajes implicados en el proceso de su resolución -el lenguaje vernáculo y el lenguaje aritmético- que, si se poseen, explican los problemas que pueden resolverse y las maneras de hacerlo. Estos resultados permiten pues describir, explicar e, incluso, predecir lo que sucede al resolver esta clase de problemas. Para los problemas multiplicativos, sólo hay esbozos y primeros intentos puntuales, aún no conjuntados, de descripciones y explicaciones similares; un programa de investigación en este dominio puede formularse siguiendo los pasos de lo hecho para los aditivos, a condición de tener en cuenta la mayor complejidad de éstos, que se deriva de la naturaleza de las operaciones implicadas y de su situación temporal en el currículo de matemáticas (hay magnitudes, hay otros tipos de números además de los naturales, hay escalas, regla de tres, proporcionalidad, etc.).

Más allá de los problemas que se resuelven con una sola operación, el dominio de los problemas de varias operaciones combinadas (PAVOC) es un terreno casi inexplorado, que, en los sistemas escolares, se encuentra ligado al tránsito de la aritmética al álgebra. Un modo de encarar la investigación de las características de su proceso de resolución, que no se limite a recopilar lo que hacen los resolutores más o menos competentes en el uso de los lenguajes implicados -ahora también el algebraico-, es intentar determinar previamente la estructura del proceso, con el fin de poder hacer hipótesis que guíen las observaciones ulteriores. Nuestro programa de investigación en este dominio parte del examen de dos métodos de resolución de problemas que en la historia han pretendido ser universales -el método de análisis-síntesis y el modelo cartesiano- y que pueden usarse como herramienta metodológica para el análisis del proceso de traducción de los PAVOC. Por su situación en la historia de las matemáticas y su voluntad explícita, el modelo cartesiano produce un proceso de traducción algebraico; el método de análisis-síntesis, por su parte, cuando se aplica a los PAVOC conduce a un proceso de traducción de naturaleza aritmética.

El NCTM ha publicado recientemente cuatro volúmenes bajo el título genérico de Programa de investigación para la educación matemática. Ya he hecho referencia de pasada al que está dedicado al álgebra y las preguntas que en él aparecen a propósito de los problemas. Pero hay uno que está dedicado específicamente a la resolución de problemas, y que lleva por título *La enseñanza y la evaluación de la resolución de problemas de matemáticas* (Charles y Silver, 1989). El título es significativo de cuál es la preocupación que quiere mostrar el NCTM y la dirección en la que se propugna que se dirijan las investigaciones en el futuro. En efecto, la descripción somera que acabamos de hacer a propósito de los problemas aritméticos muestra que, incluso en dominios ya batidos como el de los problemas aditivos, lo que se ha investigado básicamente es lo que los alumnos hacen o lo que acaban aprendiendo, pero apenas los modos de enseñar. Carpenter (1989), en particular, describe una investigación en curso sobre instrucción en resolución de problemas aditivos, basada directamente en los resultados citados, y cómo es preciso formar a los profesores para ello.

Pero esta escasez de estudios en resolución de problemas (y más aún sobre evaluación de la resolución de problemas), que se señala en Charles y Silver, eds. (1989), no es privativa de lo que se ha investigado cuando los problemas se consideran asociados a contenidos matemáticos concretos -esto es, no es privativo de las investigaciones a las que acabo de aludir en los ejemplos anteriores-.

En el terreno de la investigación que podríamos llamar en "pura resolución de problemas", esto es, la que se hace desde la óptica de que hay algo común a la resolución de cualquier problema de matemáticas, que puede ser determinado, estudiado, enseñado y aprendido, la situación no es muy distinta. En efecto, desde Polya, ese algo común se cifra en el término heurística, e, inicialmente, la consideración de la heurística como lo que permitiría mejorar la habilidad para resolver problemas condujo a investigar si esto era realmente así. Ahora bien, estos estudios primerizos sobre instrucción en resolución de problemas mediante el uso de herramientas heurísticas mostraron pronto que el asunto no queda zanjado con tanta facilidad. Aunque, en ocasiones, se ha podido establecer que alumnos que han recibido instrucción en el uso de herramientas heurísticas resuelven con éxito más problemas que alumnos equivalentes que no la han recibido, también se encuentran reiteradamente ejemplos de alumnos que, pese a disponer de todo un arsenal de herramientas heurísticas a su disposición, fracasan estrepitosamente. Hechos como éste, que eran inexplicables desde los supuestos que inspiraban la instrucción, obligaron a pensar que las herramientas heurísticas son sólo un elemento de lo que hace falta para tener alguna garantía de éxito en la resolución de problemas, y que había que determinar qué otros elementos había que tomar en consideración. Esto conduce a un programa de investigación que ya no puede dirigirse inmediatamente a la instrucción, sino a la descripción y explicación del proceso de resolución de problemas. Esta es la tarea desarrollada durante la década pasada, cuya muestra más completa y significativa es el conjunto de trabajos que se recogen en Schoenfeld (1985). Si este libro se lee atendiendo al discurrir en el tiempo de las investigaciones que describe, cada elemento -cada componente, por usar la terminología de Schoenfeld- puede verse como el resultado de un intento de explicar por qué los elementos anteriores fracasan a la hora de explicar por qué los resolutores no tienen éxito al resolver problemas. Así, cuando, pese a conocer las herramientas heurísticas, no se ha sabido cuál había que usar, cuándo o cómo había que hacerlo, o no se ha evaluado los efectos de su uso para el desarrollo de la resolución, se habla de que es preciso un buen *control* de lo que se hace, un *gestor* del proceso. Cuando, pese a conocer las herramientas heurísticas y gestionar bien lo que se ha estado haciendo, ha faltado un conocimiento de algún hecho, algoritmo o esquema propio del dominio del problema en cuestión, o no se han usado las destrezas que hubieran allanado el camino, se desciende a considerar que ha habido una carencia de *recursos*. Y cuando, pese a disponer de todo lo anterior, la concepción de la naturaleza de las matemáticas o de la tarea de resolver problemas ha hecho que no les cupiera en la cabeza que eso que sabían podía usarse para resolver el problema, lo único que permite ya explicar el fracaso es el *sistema de creencias* de los resolutores.

Lo que se ha obtenido pues de las numerosas investigaciones abiertas como consecuencia del programa de investigación que acabo de esbozar es, básicamente, que el asunto es complejo, ya que, para describir e intentar explicar lo que sucede al resolver problemas, hay que tomar en consideración un gran número de elementos, que, además, son de naturaleza muy diversa.

La instrucción en resolución de problemas, que quiera estar fundada en estos resultados, no puede pues limitarse, como se había soñado inicialmente, a la enseñanza, explícita o implícita, de herramientas heurísticas. Y, además, ha de hacer frente a la dificultad de tener que enseñar tanto algo que puede ser enseñado directamente, como son las destrezas (ser sistemático, utilizar una notación adecuada, etc.), como algo que se configura por el conjunto de las prácticas escolares, como son las creencias de los alumnos sobre la naturaleza de las matemáticas y, en particular, sobre la tarea de resolver problemas de matemáticas en la escuela.

He apuntado dos o tres cosas que sé de la investigación en resolución de problemas, distinguiendo dos perspectivas, la que he llamado "pura resolución de problemas" y la que mira los problemas en función de contenidos matemáticos concretos. No quisiera dejar de indicar, aunque sólo sea de pasada, que la resolución de problemas puede contemplarse -y de hecho se contempla- también desde otras perspectivas, que han dado lugar a trabajos importantes. Es el caso, por ejemplo, de la corriente que propugna la elaboración del currículo de matemáticas sobre la base de la resolución de problemas, que era el objeto de otra de las ponencias de este panel. O, también, la manera como se concibe la resolución de problemas cuando problemas o situaciones problemáticas se toman como contextos para la matematización, tal y como se hace en los currículos desarrollados en Holanda por IOWO y OW & OC (Treffers, 1987 y de Lange, 1987).

Pero además, no quisiera que esta distinción que he hecho se interpretara únicamente como una opción que hay que tomar en el terreno del currículo. Más bien, la pregunta que creo que hay que plantearse como consecuencia de la existencia de estas perspectivas distintas en la investigación en resolución de problemas es cómo se integra lo que se sabe de pura resolución de problemas con lo que se sabe de los problemas en dominios específicos a la hora de organizar la instrucción. Y también, para desarrollar nuevas investigaciones, cómo se integra lo que se sabe de pura resolución de problemas con las preguntas propias de la investigación sobre problemas en dominios específicos. De la investigación cabe esperar, a menudo, más que respuestas nuevas preguntas sobre el dominio que se pretende conocer; quisiera terminar enunciando algunas más que creo que merecen ser consideradas y estudiadas y que pueden dar pie al debate de este panel. Son éstas:

¿Qué se aprende al resolver problemas de matemáticas?

¿Qué quieren los sistemas escolares que se aprenda al resolver problemas de matemáticas?

¿Cuáles son las condiciones que favorecen que se aprenda lo que se quiere que se aprenda?

¿Qué equilibrio hay que buscar, en el currículo y en la práctica en la escuela, entre pura resolución de problemas y problemas para matematización conceptual o ampliación del campo semántico de los conceptos? ¿Cómo se integra lo uno con lo otro? Si sólo se puede enseñar una cosa cada vez, ¿qué aprendizajes se institucionalizan tras resolver problemas?

**Referencias bibliográficas**


Balacheff, N., 1990, Future Perspectives for Research in the Psychology of Mathematics Education, en Nesher y Kilpatrick, eds. (1990), pgs. 135-148.

Booker, G., Cobb, P. y Navarro de Mendicuti, T., 1990, *Proceedings of the Fourteenth PME Conference*, México.

Carpenter, T.P., 1989, Teaching as Problem Solving, en Charles y Silver, ed. (1989), pgs. 187-202.

Charles, R.I. y Silver, E.A., eds., 1989, *The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving. Research Agenda for Mathematics Education. Vol. 3.* (Lawrence Erlbaum Associates / NCTM: Hillsdale, NJ / Reston, VA).

Cockcroft, W.H., ed., 1982, *Mathematics Counts*. (HSMO: London).

de Lange, J., 1987, *Mathematics, Insight and Meaning*. (OW & OC: Utrecht).

MEC, 1989, *Diseño curricular base. Enseñanza Primaria. Enseñanza Secundaria Obligatoria*. (MEC: Madrid).

NCTM, 1980, *An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980s*. (NCTM: Reston, VA).

Nesher, P. y Kilpatrick, J., eds., 1990, *Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. (Cambridge University Press: Cambridge).

Puig, L. y Cerdán, F., 1989, *Problemas aritméticos elementales*. (Síntesis: Madrid).

Schoenfeld, A.H., 1985, *Mathematical Problem Solving*. (Academic Press: Orlando, FL).

Treffers, A., 1987, *Three Dimensions*. (Reidel: Dordrecht).

Wagner, S. y Kieran, C., 1989, An Agenda for Research on the Learning and Teaching of Algebra, en Wagner, S. y Kieran, C., eds. (1989) *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra. Research Agenda for Mathematics Education, Vol. 4.* (Lawrence Erlbaum Associates / NCTM: Hillsdale, NJ / Reston, VA).


## CUESTIONES PLANTEADAS EN EL PANEL DE RESOLUCION DE PROBLEMAS

1. "Los actuales científicos, los resolutores de problemas, ustedes mismos:
   ¿en qué se han apoyado?
   ¿cómo les ha ayudado la didáctica tradicional?
   ¿cómo les ha ayudado esa didáctica de redescubrimiento?"
2. "¿En su vida escolar resolvieron muchos problemas?, ¿cuándo los han empezado a resolver?"
3. "¿Pueden proporcionar algunas listas de enunciados con problemas interesantes o de libros en los que vengan esas listas?"
4. "Comentar, brevemente, la bibliografía sobre el tema"
5. "El aprendizaje mediante problemas nos ha parecido, por los ejemplos, que se reduce al trabajo de los "sistemas expertos" en ciencias de la computación. ¿Dónde se encuentra el valor formativo humano en él?, y más aún ¿en la versión socio-cultural del alumno?" (Pregunta dirigida al Prof. Gómez)
6. "¿Por qué se ha afirmado que "evidentemente la resolución de problemas podría aparecer en la utilización de computadores"?"
7. "¿No parece que la resolución de problemas, tal y como se ha planteado, es un dominio propio de los "sistemas expertos" en ciencias de la computación?. Se han citado tipos de problemas numéricos y algebraicos, pero ¿qué decir del problema puramente

geométrico en cuanto a su aspecto figural?. ¿No están limitando la formación matemática a la elaboración de algoritmos numéricos y/o lógico deductivos?" (Pregunta dirigida al Prof. Puig)
8. "El modelado de la realidad con la construcción de un sistema formal, que supone su método, ¿qué repercusión tiene en la construcción de sistemas axiomáticos en matemáticas?, ¿y en la capacidad de resolución de problemas?, ¿se han comprobado resultados?, ¿es transferible el aprendizaje así desarrollado?" (Pregunta dirigida al Prof. Gómez)
9. "¿Qué papel tienen las formas de representación (interna y externa) en la resolución de problemas?" (Pregunta dirigida al Prof. Puig)
10. "¿Podría detallar, de una forma lo más general posible, qué tipo de actividades se desarrollan en los clubs de matemáticas?" (Pregunta dirigida al Prof. Abrantes)
11. "¿Cómo se compaginan la realización de los juegos referentes a los modelos presentados con los programas normales de la asignatura, horario lectivo normal diario, relación con otras asignaturas, etc?" (Pregunta dirigida al Prof. Gómez)
12. "¿Es posible el desarrollo de unidades didácticas completas del curriculum de matemáticas utilizando únicamente la resolución de problemas?" (Pregunta dirigida al Prof. Puig)
13. "¿Qué contenidos son los que mejor se prestan al desarrollo de unidades didácticas del curriculum de matemáticas mediante resolución de problemas?. Se pide poner algún ejemplo concreto ya trabajado en el aula" (Pregunta dirigida al Prof. Abrantes)
14. "¿Sería posible abandonar los discursos generales e ir un poco más a lo práctico?. Buscamos herramientas de trabajo"
15. "La resolución de problemas activa la clase, ¿por qué esta clase resulta aburrida?"
16. "¿Se puede entender un panel de resolución de problemas sin resolver ninguno?"

## DESARROLLO DE LA SEGUNDA SESION

De las preguntas planteadas se induce la necesidad global de entrar más a fondo en situaciones prácticas y ejemplos concretos, a la experiencia personal de cada uno de los panelistas. Aunque en algunas de las preguntas parece confundirse el esquema de un panel con el de un taller, no cabe duda que hay una apelación a los aspectos prácticos con demanda explícita de listas de enunciados, listas de libros, ejemplos de unidades didácticas diseñadas sobre resolución de problemas, reflexión sobre contenidos adecuados para trabajar en resolución de problemas y la integración de la resolución de problemas en el desarrollo profesional.

Para preparar la Segunda Sesión se acuerda elaborar una lista básica de bibliografía sobre Resolución de Problemas, importante y fácilmente accesible, en el entendimiento de que es un listado de referencia y orientativo, no excluyente y en el que faltan muchos libros importantes.

El listado propuesto fué:

J.D. Bransford y B.S. Stein (1986) "Solución Ideal de Problemas". Labor
P. Gómez (1990) "Matem(b)át(s)ica. Una empresa docente". Bogotá
Grupo Cero (1984) "De 12 a 16. Un proyecto de Curriculum de Matemáticas". Ed. Mestral. Valencia
M. de Guzmán (1986) "Aventuras Matemáticas". Labor
J. Mason, L. Burton y K. Stacey (1988) "Pensar matemáticamente".

Labor
R.E. Mayer (1986) "Pensamiento, resolución de problemas y cognición". Paidos
G. Polya (1945) "Cómo plantear y resolver problemas". Trillas
G. Polya (1962) "Mathematical Discovery". John Wiley and Sons
G. Polya (1966) "Matemáticas y razonamiento plausible". Tecnos
L. Puig y F. Cerdán (1983) "Una bibliografía de Resolución de Problemas". Enseñanza de las Ciencias
L. Puig y F. Cerdán (1988) "Problemas Aritméticos Escolares". Ed. Síntesis
L. Rico (1988) "Didáctica activa para la resolución de problemas". Universidad de Granada

Se hizo también mención a las colecciones y autores más difundidos, dedicados a libros en los que se proponen colecciones de problemas clasificados temáticamente, tales como Martín Gardner, Raymond Smullyan, Brian Bolt, Rodríguez Vidal, Y. Perelman, Franco Agostini, M. Mataix y otros.

La intervención del Prof. P. Gómez estuvo centrada en presentar el proceso de resolución de problemas mediante la construcción de modelos y en base al uso de un sistema experto. Se proporcionaron diversos ejemplos de planteamiento y resolución de problemas para la iniciación al trabajo con sistemas formales, tales como "El Acertijo de MU", "Adivina la regla" y "Fractales". El Prof. Gómez tuvo que diferir la respuesta a muchas de las cuestiones puntuales que se le plantearon debido a la escasez de tiempo.

El Prof. Abrantes dedicó una parte de su intervención a explicar el origen y la evolución de los Clubes de Matemáticas en Portugal, así como las actividades realizadas en estos clubes y la periodicidad de los trabajos desarrollados. Los asistentes solicitaron información concreta sobre una serie de cuestiones relacionadas con los clubes, tales como edad de los alumnos, tipo de actividades, comunicación y difusión, grado de participación y repercusión social.

La segunda parte de la intervención del Prof. Abrantes estuvo dedicada a plantear una secuencia didáctica de actividades sobre resolución de problemas con las que presentar a los alumnos el concepto de función y las destrezas básicas relacionadas con este concepto. Los participantes plantearon, igualmente, numerosas cuestiones relativas al material presentado.

La intervención del Prof. Puig está recogida más extensamente, sobre la base de una autorreflexión desarrollada con posterioridad por él mismo, y que recoge los puntos más esenciales de su intervención.

Intervención del Prof. Puig:

«Durante la sesión de debate del panel hice tres intervenciones que vale la pena señalar: una sobre el papel de las representaciones en el proceso de resolución de problemas, otra sobre la idea de Polya de razonamiento plausible y una tercera sobre qué puede significar "interesante" cuando con ese adjetivo se califica a un problema.

1) Sobre las representaciones hablé contestando directamente a una pregunta formulada por escrito.

Lo que dije fue que en un buen número de trabajos realizados en el campo de la psicología cognitiva se han formulado hipótesis o establecido modelos teóricos que postulan, como uno de los elementos cruciales para entender el proceso de resolución de problemas en dominios específicos -o "semánticamente ricos", por usar una de las expresiones ya clásicas-, cosas que pueden englobarse bajo el nombre genérico de "representaciones internas" o "representaciones mentales" y que, según las teorías, reciben nombres diversos *-scripts, frames o schemata,* p.e.-, que corresponden a conceptos teóricos no equivalentes. Con las variantes propias de cada teoría, lo que se viene a defender es que el resolutor elabora una representación mental de la situación descrita por el enunciado del problema utilizando los *scripts, frames o schemata* correspondientes al dominio conceptual específico que posee y resuelve el problema mediante las acciones correspondientes asociadas a tales *scripts, frames o schemata.* Cuando la situación no es tan favorable, esto es cuando el resolutor no posee los *scripts, frames o schemata* pertinentes o adecuados, la representación inicial es *inestable* y es preciso elaborar una representación *estable*; Lesh, en particular, mantiene que, en la resolución de problemas que él llama "aplicados" -y que yo llamaría "situaciones problemáticas en contextos más o menos del 'mundo real'"-, el núcleo del proceso de resolución consiste precisamente en ese paso de representaciones inestables a representaciones estables.

Esto por lo que respecta al análisis de lo que sucede al resolver problemas. Por lo que atañe a la instrucción en resolución de problemas, en mi libro *Problemas aritméticos elementales* dedico un apartado (el 6.3, pgs. 187-194) a discutir el papel de las representaciones y ayudas visuales en ella, distinguiendo, para ello, entre a) los dibujos, esquemas o figuras que acompañan el texto de un problema; b) las representaciones internas del resolutor, y c) las producciones gráficas de carácter simbólico que el resolutor hace en el curso de la resolución, o que el profesor hace o induce que se hagan. Incluyo también un pequeño comentario sobre los criterios de Fischbein y de Vergnaud para que una representación sea eficaz.

2) Sobre lo que Polya llama razonamiento plausible hablé a raíz de una intervención oral durante el debate.

Lo que dije fue que no conozco ningún trabajo de investigación que haya abordado directamente el asunto y que, aunque creo que es importante, me parece difícil de abordar, al menos tal y como yo lo entiendo. Para mí, si dejamos de lado los momentos en que Polya utiliza razonamiento plausible como sinónimo de razonamiento heurístico, lo interesante del trabajo de Polya es el establecimiento de una serie de patrones de razonamiento -lo que yo llamo "patrones plausibles"- que no son patrones de la lógica usual y que pueden proporcionar la forma lógica de los razonamientos que se realizan al resolver problemas, en lo que podríamos llamar el nivel del proceso de resolución. Estos patrones se caracterizan porque no transmiten verdad de las premisas a la conclusión, sino que transmiten creencia.

Señalé también que un problema que sería interesante que se estudiara es que tales patrones plausibles se corresponden con razonamientos que, desde el punto de vista de la lógica usual, son falacias que han sido "reparadas" al cambiar verdad por creencia. Así el patrón plausible más simple

A -> B
B
--------------------
A es digno de crédito

tiene el mismo aspecto general que la falacia de afirmación del consecuente

```
A -> B
B
------
A
```

Este hecho hace que sea problemático institucionalizar mediante la instrucción un patrón de razonamiento válido y valioso en un dominio, que se parece demasiado a lo que en otro dominio es una falacia.

3) Sobre "interesante" hablé a partir del pie que me dió que una de las preguntas pidiera una lista de "problemas interesantes".

Lo que dije fue que se puede decir de un problema que sea "interesante" por muchos motivos, ya que depende de qué se pretenda como objetivo de instrucción cuando se le plantea a un alumno que lo resuelva. Si se piensa simplemente en que el alumno esté "motivado", el problema ha de ser "interesante" para el alumno. Pero, además, con el problema pueden pretenderse cosas tan dispares como, por un lado, tener un contexto para dotar de significado a algún concepto o estructura conceptual que se está intentando que se aprenda, aumentar el campo semántico de un concepto o estructura conceptual, o, meramente, "aplicar un concepto ya adquirido"; por otro lado, pueden pretenderse objetivos que tengan que ver con lo que he llamado "pura resolución de problemas". El problema será "interesante" si contiene potencialmente materia para que su resolución pueda conducir al objetivo pretendido (o a varios, si se es ambicioso).

Puse como ejemplo el siguiente problema:

"Hallar el número más pequeño tal que, si se le quita la cifra de las unidades y se coloca delante de su cifra de orden superior, se obtiene el número original multiplicado por dos."

Para indicar que el problema era interesante por muchos motivos analicé someramente como lo resolvió Visi, alumna de la EUPEGB de Valencia.

Visi se hizo el plan de examinar sucesivamente si el número tenía dos cifras, tres cifras, etc. Para dos cifras, probó que es imposible que exista un número con esta propiedad. Al intentar probarlo para tres cifras, observó que conociendo la cifra de las unidades podía hallar la de las decenas, conociendo la de las decenas podía hallar la de las centenas, etc., con sólo multiplicar por dos y tener en cuenta lo que se llevara de la anterior duplicación. Esto le hizo cambiar de plan, ya que la observación hecha le permitía tener un procedimiento constructivo para obtener todos los posibles candidatos a solución del problema: basta para ello tomar como cifra de las unidades todos los dígitos uno tras otro, aplicar el procedimiento constructivo hasta que la secuencia se repita y observar si los ciclos obtenidos cumplen la condición del problema y cuál es el mínimo.

Comenzando con el 1, el ciclo es el siguiente:

```
1->2->4->8->6->3->7->4->9
↑                       |
|                       v
0<-5<-2<-6<-3<-1<-5<-7<-8
```

Y, si se comienza con cualquier otro dígito, se obtiene el mismo ciclo. Sin entrar en el detalle de todo lo que hizo después Visi, apunté algunos de los aspectos en los que reside el interés de este problema:

a) El resultado es sorprendente, no banal. Es el número 052631578947368421 -o el número 105263157894736842, si no se admite como solución un número que comience por 0- que tiene ¡dieciocho cifras!

b) El procedimiento de solución encontrado proporciona también otros números que cumplen las condiciones del problema, excepto la de ser mínimo: todas las permutaciones circulares del anterior que comiencen por un número inferior a 5 -que son nueve y coinciden con las que se obtienen por el procedimiento constructivo para cada uno de los nueve dígitos-, y números de 18xn cifras obtenidos pegando n veces una cualquiera de esas permutaciones.

c) El procedimiento de solución encontrado permite resolver también una serie de problemas similares: los que se obtienen cambiando la condición "x2" por "x3", "x4", etc.

d) La solución al caso en que la condición es "es el triple" tiene 28 cifras decimales. Esto puede conducir a plantearse un nuevo problema (cuál es la longitud de la solución mínima) al observar que

"x2" 18 que es 20-2

"x3" 28 que es 30-2

¡Pero la solución al caso "x4" es 102564, un número de sólo seis cifras y no de 40-2!

e) Por otro lado, y fuera ya de lo hecho por Visi, aparece una nueva característica interesante de este problema: hay otras maneras de resolverlo, de estilo digamos "algebraico", que pueden conducir a observar que las soluciones de longitud 18 del problema inicial son permutaciones circulares del período de 1/19, que coinciden con los períodos de múltiplos de 1/19; en concreto, los múltiplos que proporcionan soluciones son nueve: n/19, 1≤n≤9. Y esta última observación, a diferencia de la hecha en d), sí que es válida para toda la serie: los períodos de los nueve primeros múltiplos de $\frac{1}{10n-1}$ son soluciones del caso "xn". Lo que resulta ahora interesante es que así el problema se relaciona con otros resultados y problemas aparentemente sin relación con él, que el resolutor puede conocer ya o plantearse y descubrir en esta ocasión.

f) Pero, además, si se ha establecido la relación indicada en e), el problema de la longitud de la solución mínima, aparecido en d), se transforma en uno nuevo -¿es siempre periódico $\frac{1}{10n-1}$ y cuál es la longitud del período?-, que no es sino un caso particular del problema ¿cuándo es periódico $\frac{1}{n}$ y cuál es la longitud del período?

Los casos examinados antes se ven así bajo una nueva luz, ya que ahora el tercer caso se puede distinguir de los dos primeros, ya que

"x2" período de $\frac{1}{19}$ 18 cifras, que es 19-1,

"x3" período de $\frac{1}{29}$ 28 cifras, que es 29-1,

"x4" período de $\frac{1}{39}$ 6 cifras, que no es 39-1;

pero 19 y 29 son primos y 39 no lo es.

Otras observaciones hacen aparecer como conjetura que la longitud está relacionada con el carácter primo o no primo del denominador en cuestión, pero que el asunto es más complejo. En efecto, para el caso "x5", el período de $\frac{1}{49}$ es

020408163265306122448979591836734693877551 que "sólo" tiene 42 cifras, y 49 no es primo, pero ésa no es la solución de longitud mínima, ya que, si el procedimiento constructivo se comienza por el 7, se obtiene una solución menor, 142857, que es el período de $\frac{7}{49}$. Y para el caso "x6", siendo 59 primo, el período correspondiente,

0169491525423728813559322033898305084745762711864406779661, tiene 58 cifras; pero, para el caso "x8", aunque 79 es primo, el período correspondiente, 0126582278481, sólo tiene 13 cifras.

Se puede decir pues que este problema es "interesante". Creo conveniente señalar, sin embargo, que casi todo lo que el problema tiene de interesante aparece en el proceso de su resolución, y que, por tanto, lo que acostumbro llamar un *estilo heurístico* de resolución es el mejor garante de que aflore lo que el problema tiene de interesante. Como se puede ver en las notas anteriores, una de las características de este estilo, que vale la pena resaltar a este propósito, es que se conciba que la tarea de resolver problemas no termina cuando se encuentra la solución, sino cuando ya no se le puede sacar más provecho al problema -¡o ya está uno harto de tanto provecho!-, y que, para ello, la última fase del proceso es crucial y ha de concebirse como de *revisión-extensión*.»

## CIERRE DEL PANEL. CONCLUSIONES

El cierre del panel estuvo a cargo del Prof. Rico quien, en primer lugar, se felicitó por el acierto de la SAEM Thales y de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas por haber convocado este I Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, que ha permitido el conocimiento personal y el trabajo conjunto de un número considerable de educadores matemáticos que se expresan y trabajan en castellano y portugués. Destacó el hecho de potenciar la comunicación de profesores de Iberoamérica, Portugal y España, sin necesidad de emplear el inglés como lengua de comunicación, en un espacio en el que se han presentado trabajos de calidad y se han planteado y discutido cuestiones de actualidad en el ámbito de la Educación Matemática.

A continuación repasó y resumió las ideas más importantes que habían servido para articular este Panel y que se habían debatido durante su desarrollo.

En primer lugar enfatizó que la Resolución de Problemas es un campo de trabajo amplio en Educación Matemática, que abarca la casi totalidad de ramas de estudio que presentan interés en la actualidad. De ahí la necesidad de delimitar un tema tan extenso a la hora de organizar este Panel.

La elección realizada consistió en fijar tres centros de interés:

1. Aprendizaje
2. Currículo
3. Investigación

y organizar el trabajo y estudio en torno a estos tres centros.

El apartado relativo a Aprendizaje permite contemplar las aportaciones que han realizado las Teorías sobre Cognición humana al campo de la Resolución de Problemas. Especial interés presentan los estudios derivados de la Teoría sobre Procesamiento de la Información y la categorización del conocimiento matemático en un campo conceptual y otro procedimental. Presentar y discutir los principales logros alcanzados por estos estudios en relación con la Resolución de Problemas, los métodos para observar la conducta de los sujetos al abordar las tareas necesarias para enfrentarse con un problema, el control del resolutor sobre su actividad y la valoración de las soluciones obtenidas, han constituido una parte considerable de las reflexiones realizadas en este panel.

El apartado relativo a Currículo ha puesto el énfasis en discutir la planificación de la transición y aprendizaje de conocimientos matemáticos relevantes. Siguiendo la línea que se deriva de la teoría del aprendizaje antes comentada se señalaron como elementos y componentes destacados del conocimiento matemático los Hechos, Conceptos y Estructuras Conceptuales en el campo conceptual y las Destrezas, Razonamiento y Estrategias Generales en el campo procedimental. Destacar qué papel representa la Resolución de Problemas en el dominio y consolidación de los conocimientos señalados es una discusión aún abierta, en la que son interesantes todas las experiencias y estudios realizados. Tipificar las posibles aportaciones que se pueden hacer a la enseñanza de las matemáticas empleando como hilo conductor la Resolución de Problemas ha sido una segunda idea fundamental en el trabajo de este panel. Quizás ha sido aquí donde se ha producido una mayor riqueza en el intercambio de información y donde las preguntas y respuestas han tenido un mayor sentido práctico.

Finalmente, el apartado relativo a Investigación ha permitido hacer un recorrido sobre los diversos marcos teóricos que hoy día interpretan con mayor claridad la evidencia empírica disponible sobre Resolución de Problemas.

Los Diseños de Experimentos y la interpretación de los datos obtenidos y seguidos en experiencias concretas han servido para poner de manifiesto los modos de aproximación sistemática y de estudio sobre la actividad de los alumnos de distintos niveles sobre Resolución de Problemas. Tanto los campos consolidados en Resolución de Problemas Aritméticos, como la reflexión sobre las representaciones del resolutor, como la actividad seguida en Resolución de Problemas complejos, fueron distintas aproximaciones que se plantearon y discutieron a lo largo de las sesiones, que sirvieron de marco para presentar algunas experiencias concretas y hacer una primera valoración e interpretación de las mismas.

Tras un amplio debate de las ideas anteriores concluyó la Segunda y última Sesión de este Panel.