CB-662

EVALUAR LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS A TRAVÉS DE LA DINÁMICA DE SISTEMAS[14]

Maria T. Sanz[a] – Miguel Arevalillo-Herráez[a] – David Arnau[a] – José A. González-Calero[b]
m.teresa.sanz@uv.es – miguel.arevalillo@uv.es – david.arnau@uv.es – jose.gonzalezcalero@uclm.es
[a]Universitat de València (España), [b]Universidad de Castilla la Mancha (España)

Núcleo temático: La Resolución de Problemas en Matemáticas.
Modalidad: CB.
Nivel educativo: Educación Primaria.
Palabras clave: Dinámica de Sistemas, Sistemas Tutoriales Inteligente, Resolución de Problemas, Educación Primaria.

Resumen

La Dinámica de Sistemas es una metodología multidisciplinar, desarrollada en el Massachussets Institute of Technology, que permite crear modelos dinámicos de sistemas complejos. Los resultados obtenidos mediante esta metodología en determinadas áreas de las Ciencias Sociales avalan su aplicabilidad al campo educativo. En concreto, este trabajo considera la construcción de un modelo de aprendizaje para la resolución de problemas aritméticos en Educación Primaria y su integración en un sistema tutorial inteligente (STI). El trabajo se enmarca en el campo de Learning Analytics en la medida que se instrumentaliza el STI para la obtención de una elevada cantidad de información acerca de las resoluciones de los alumnos. El modelo toma en consideración tanto variables derivadas de las actuaciones de los estudiantes como otro tipo de variables ligadas con las tareas (p.ej., dificultad teórica del problema) o características previas del resolutor (p.ej., nivel de comprensión lectora). La construcción del modelo se basa en un estudio con un estudio con 64 estudiantes de 4º de Educación Primaria sobre una colección de 16 problemas. La validación del modelo (r=0.6815) se basa en una colección de 10 problemas completados por la misma muestra de estudiantes.

Antecedentes y objetivos

Los problemas verbales aritmético-algebraicos forman parte de la enseñanza de las matemáticas desde el inicio de la primaria a la finalización de la secundaria. Según Cerdán (2008), estos problemas son “un texto, que presenta la descripción cuantitativa de una situación o un fenómeno por medio de varias cantidades interrelacionadas [...] el propósito

[14] Este trabajo ha contado con el apoyo de los proyectos concedidos por el Ministerio de Educación de España (EDU2015-69731-R (MINECO / FEDER)), el Ministerio de Economía y Competitividad de España (TIN2014-5964-C2-1-P) y la Conselleria d'Educació, Investigació, Cultura i Esport (GVPROMETEO2016-143)

ISBN 978-84-945722-3-4

del problema, expresado en el propio texto, es la determinación de una o varias de las cantidades desconocidas" (Cerdán, 2008, p. 27). Un ejemplo de este tipo de problemas sería: 'Matilde ha comprado en unos grandes almacenes un libro y un videojuego. El libro costaba 17 euros y el videojuego 69. Si ha vuelto a casa con 103 €, ¿cuánto dinero llevaba al salir de casa?'.

La complejidad de los procesos de enseñanza aprendizaje de la resolución de problemas aritmético-algebraicos se refleja tanto en la dificultad de los estudiantes para afrontar estas tareas, como en la dificultad de los profesores para identificar cuáles son las carencias de los estudiantes (Lampert, 2003) y organizar secuencias de enseñanza adaptadas (Shulman, 1987). Las dificultades de los profesores son consecuencia en muchos casos de la mera imposibilidad de recordar o relacionar la gran cantidad de información que se pone en juego (p.e., el profesor difícilmente puede recordar la actuación, meses atrás, de un estudiante concreto en problemas similares a los que está resolviendo). En otros casos ponen de manifiesto la dificultad de algunos profesores para identificar todas las vías de resolución posibles de un problema (Arnau, Arevalillo-Herráez y González-Calero, 2014).

En este sentido los entornos de aprendizaje computerizados, y en especial los sistemas tutoriales inteligentes (en adelante STI), podrían ayudar a superar este tipo de dificultades y facilitar el aprendizaje (Huang, Craig, Xie, Graesser y Hu, 2016). En principio un STI debería estar formado por cuatro módulos: el modelo del dominio, el modelo de estudiante, el modelo didáctico, y el modelo de comunicación (Woolf, 2008). Sin embargo, los programas que habitualmente se orientan hacia la enseñanza de la resolución aritmética de problemas han centrado su desarrollo en el modelo de comunicación. Así, por ejemplo, entornos como *Schemes for Problem Analysis* (Hershkovitz y Nesher, 1996) o *HERON* (Reusser, 1993) ofrecían la posibilidad de representar las relaciones entre cantidades mediante diagramas de árbol para facilitar el planteamiento y resolución de los problemas. Menos atención se ha ofrecido desde la educación matemática a la investigación en el desarrollo del resto de componentes para el diseño de STI.

El objetivo de nuestra investigación es elaborar un metodología para la construcción de modelos de estudiante que permita al modelo didáctico inferir la actuación de los estudiantes en la resolución aritmética de problemas verbales y sugerir secuencias de problemas adaptadas a las necesidades de los estudiantes. Con este fin asumimos que el rendimiento de

ISBN 978-84-945722-3-4

un estudiante que se enfrenta a un nuevo problema se puede predecir a partir de variables relacionadas con la tarea y con las características de los individuos. En la Figura 1, se presenta el modelo causal predictivo el cual se asemeja al comportamiento de un tutor humano. Partiendo de que un profesor tiene unos conocimientos previos de sus alumnos (subsistema población), les asigna una tarea (subsistema tarea) de acuerdo a su modelo mental de la competencia global del grupo de estudiantes (rendimiento de la población). Este modelo mental le permite predecir el rendimiento de la población en las tareas disponibles, y por tanto regular la dificultad del próximo ejercicio. El rendimiento real en la nueva tarea permite retroalimentar el subsistema población (flecha naranja) y mejorar el modelo de estudiante.

Figura 1. Diagrama causal del modelo de predictivo.

A diferencia de otros trabajos en el uso de inteligencia artificial en educación, en nuestra investigación se trata el aprendizaje como un proceso dinámico, y es por ello que se aborda a través de la Teoría General de Sistemas que propone el uso de metodologías de carácter transdisciplinar que permitan a los investigadores construir modelos matemáticos con los que resolver problemas en el ámbito de los sistemas complejos. Fue Jay W. Forrester (1961) quién desarrolló en los años 50 del siglo pasado la Dinámica de Sistemas en el Massachussets Institute of Technology (MIT) como metodología transdisciplinar con la que construir modelos dinámicos de sistemas complejos y usarlos como herramienta de intervención en los mismos.

Características del sistema tutorial inteligente

El STI escogido en este trabajo es el presentado en Arnau, Arevalillo-Herráez y González-Calero, (2014), llamado Hypergraph Based Problem Solver (HBPS), que es capaz de supervisar la resolución, tanto aritmética como algebraica, de problemas verbales aritmético-

ISBN 978-84-945722-3-4

algebraicos. El sistema tiene las siguientes cuatro características: independencia respecto al método de resolución, independencia respecto al uso de una o más ecuaciones, independencia entre cantidad y su representación e independencia de funcionamiento del STI respecto del problema.

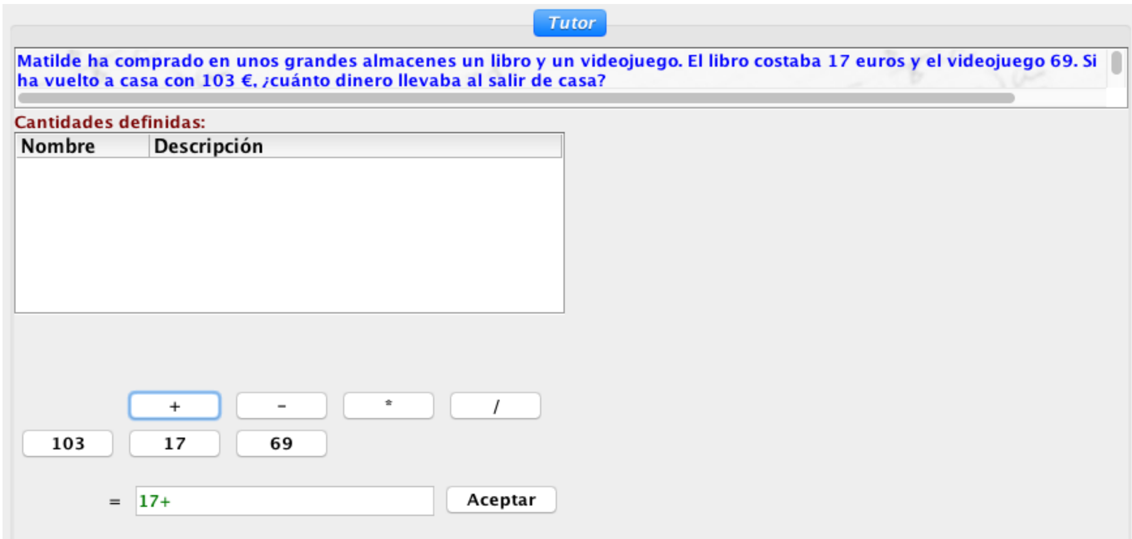

Figura 2. Interfaz del STI.

Actualmente, el sistema está compuesto por tres elementos: (1) una interfaz gráfica (Fig. 2) la cual permite la interacción usuario-sistema, (2) un módulo didáctico capaz de controlar la validez del proceso de resolución y ofrecer ayudas a demanda, y (3) una base de datos que almacena información sobre las actuaciones del usuario. Cuando se inicia la resolución de un problema, el sistema muestra el enunciado, un conjunto de botones con los valores de los datos del problema (explícitos o implícitos) y cuatro botones con las operaciones de suma, resta, multiplicación y división. Así, en el problema anteriormente presentado, el estudiante podría iniciar la resolución haciendo la operación 17+69 usando los botones (Figura 2). El sistema evalúa la validez de la operación buscando una relación entre cantidades en las que aparezca 17 (precio de un libro) y 69 (precio de un videojuego). En este caso, el sistema identificaría que se está utilizando (correctamente) la relación dinero total gastado (desconocida) es igual a precio de un libro más precio de un videojuego y asignaría el resultado de la operación a la cantidad desconocida. Este resultado, 86, aparecerá como un nuevo botón para que pueda ser utilizado en el siguiente paso. Si el estudiante siguiera la resolución con la operación 103 - 86. En este caso el sistema supondría un error (Figura 3),

ISBN 978-84-945722-3-4

e informaría al usuario. Si el usuario introduce la operación 103+86, el sistema la detectaría como correcta, asignaría el resultado (193) a la cantidad desconocida que es el resultado del problema y daría por finalizada la resolución

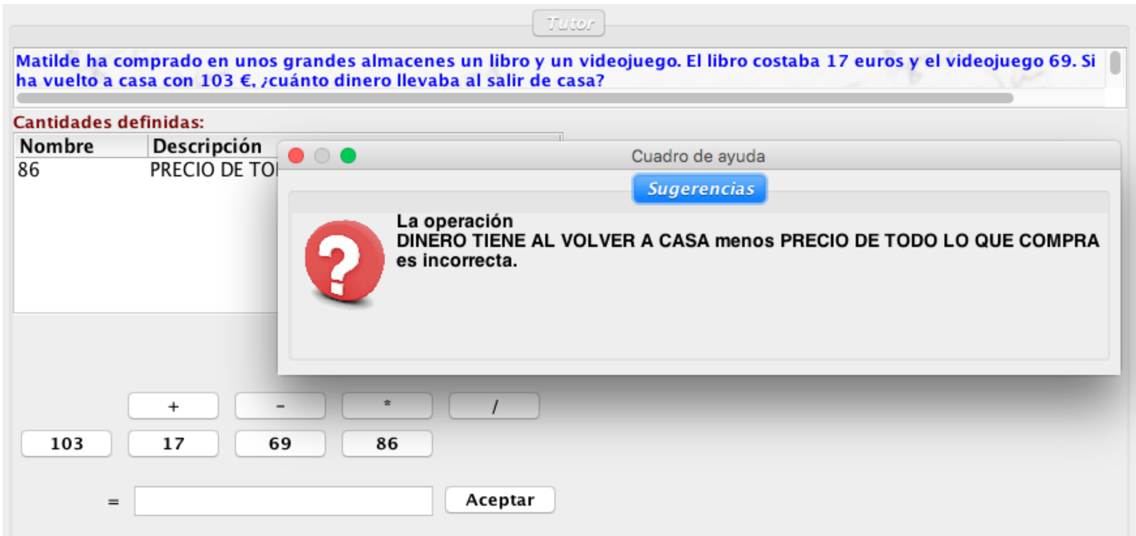

Figura 3. Detección de operación errónea durante la resolución del problema

Material y métodos

La muestra del estudio está compuesta por 64 estudiantes de tres grupos naturales de cuarto de primaria. La intervención se realizó a lo largo de cinco sesiones atendiendo a las variables de investigación de resolución de problemas elegidas. Se han escogido variables cuantitativas fácilmente medibles a través de herramientas específicas adaptables a distintas situaciones experimentales, ya que la intención de este proyecto es la implementación de sistemas que puedan ser usados en situaciones reales de enseñanza. En concreto, para la determinación de las características del sujeto nos basamos en: (a) su coeficiente de inteligencia medido a partir de la resolución de problemas de razonamiento lógico (en adelante *I*), (b) su nivel de comprensión lectora (en adelante *R*) y (c) su destreza matemática previa como resolutor (en adelante P_{i-1}).

En la sesión 1 se administró la prueba de PIRLS[15] para alumnos de 4º de Educación Primaria. Esta prueba fue diseñada con un texto narrativo y un texto informativo. A partir de los resultados se obtuvo la variable *R*. En la sesión 2 se midió *I* a través de la subprueba 2 de la prueba breve de inteligencia de Kaufman y Kaufman (1990). Esta prueba evalúa la capacidad

[15] http://evaluacion.educalab.es/timsspirls/

ISBN 978-84-945722-3-4

para resolver problemas de razonamiento a través de estímulos visuales tanto figurativos como abstractos. Durante las sesiones tercera, cuarta y quinta los alumnos resolvieron problemas verbales de manera aritmética con el apoyo del STI. Para determinar la dificultad teórica de estos problemas de varias etapas (D_i) se calcula a través de los resultados empíricos (S_i) obtenidos por Ivars y Fernández, (2016) y Riley, Greeno y Heller, (1983) sobre la dificultad del problema por tipo de estructura para los problemas de una etapa.

Construcción del Modelo y Análisis de Resultados

La Fig. 4 muestra el diagrama de Forrester que es la traducción causal del mapa conceptual (Fig. 1), donde el subíndice *i*, representa la tarea que realizan los estudiantes; S_i, son los datos sobre la tarea utilizados para el cálculo de D_i; y C_i es una variable auxiliar a la que se le ha denominado, capacidad de los alumnos en resolución de problemas aritméticos.

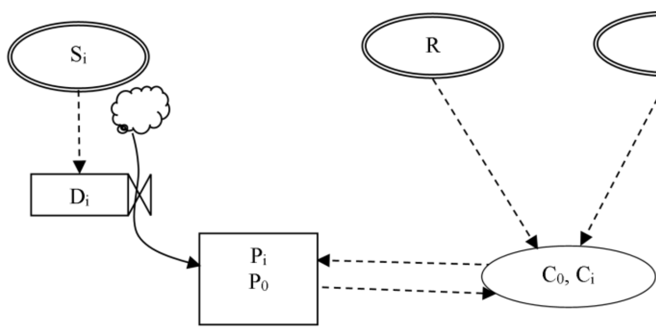

Figura 4. Diagrama de Forrester[16]

El objetivo es encontrar una función que permita predecir el rendimiento de los estudiantes (P_i) a través de la dificultad a priori de la tarea (D_i) y de la capacidad previa como resolutores (C_{i-1}), es decir

$$\left.\begin{array}{r} P_i = f(D_i, C_{i-1}) \\ P_0 = C_0 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

[16]Variables de Nivel: se requiere de un valor inicial, que es una variable de entrada, y los siguientes valores se actualizan. Están representados por un cuadrado, ya que pueden ser comparado con los tanques dónde se almacena un fluido.
Variables de Flujo: se pueden comparar con las llaves de paso que regulan el flujo hacia o desde un tanque de líquido. Están representadas por un icono característico (cuadrado en forma de reloj de arena).
Variable Auxiliar: son las variables intermedias que se utilizan para calcular los flujos, o variables de salida. Están representadas por un círculo o elipse.
Variable de entrada: se trata de variables de entrada cuyo valor tiene que ser asignado por una constante o con una función del tiempo. A partir de ellas se eligen las variables de control o decisión y las variables exógenas o de escenario. Están representadas por un círculo o una elipse de doble línea.
Las fuentes o sumideros están representados por una nube, que representan respectivamente la procedencia o el destino, a través de los flujos, de los niveles cuando no interesa evaluar la procedencia o el destino de los mismos.

ISBN 978-84-945722-3-4

La primera consideración es el cálculo de la variable C_{i-1} (2) como una combinación lineal normalizada de las variables resultado en el problema anterior (P_{i-1}), comprensión lectora (*NR)* y coeficiente de inteligencia (*NI)*,

$$C_{i-1} = \alpha \cdot P_{i-1} + \beta \cdot NR + \gamma \cdot NI \qquad (2)$$

Para la obtención de la función buscada (3) se ha utilizado el programa *Regint* (Caselles, 1998). Los primeros 16 problemas se utilizaron para obtener este ajuste, siendo (3) la función considerada óptima por tres razones: valor del coeficiente de correlación alto (r=0.6857), aleatoriedad de los residuos y la aceptación de la normalidad de los mismos a través de la prueba de Kolmogorov-Smirnov.

$$P_i = \alpha + \beta \cdot C_{i-1} + \frac{1}{1+\gamma \cdot e^{\theta \cdot D_i)}} \qquad (3)$$

Finalmente, la validación (Fig. 5) se realiza utilizando los 10 problemas obtenidos por los estudiantes en la segunda sesión. En este caso el proceso de validación ha sido considerado exitoso debido a tres razones: la superposición gráfica entre datos históricos y calculados es buena, el coeficiente de correlación es aceptable y la aleatoriedad de los residuos ha sido verificada por medio del error máximo relativo.

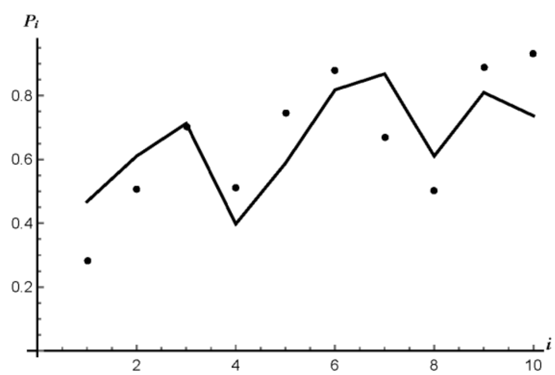

Figura 5. Datos simulados (línea) y datos reales (puntos) para P_i de la población en las tareas 1 a 10 de la primera sesión. r= 0.6815. Test de Kolmogorov-Smirnov's, D(α,10)> 0.1302, para un nivel de significación α≥0.01. Con lo que se acepta la hipótesis de la normalidad de los residuos.

Conclusiones y líneas Futuras

En este trabajo se ha presentado un modelo dinámico matemático en construcción para estimar el rendimiento de una muestra de alumnos de 4º de Educación Primaria en la resolución de problemas verbales aritméticos. Las principales variables del modelo actual

ISBN 978-84-945722-3-4

son la dificultad a priori del problema, la comprensión lectora del alumno, la destreza previa en matemáticas y el rendimiento previo del alumno en problemas aritméticos. El modelo actual tiene un coeficiente de correlación aceptable, pero es necesaria ponerlo a prueba en situaciones distintas para mejorar su diseño.

Actualmente, trabajamos en la incorporación de nuevas variables que permitan una mejor caracterización de los estudiantes, así como la mejora del modelo para validarlo con un solo usuario y por género. Una futura integración del modelo en el STI permitiría determinar secuencias de aprendizaje individualizadas en tiempo real de acuerdo con las características de cada alumno y su trayectoria de aprendizaje.

Referencias bibliográficas

Arnau. D., Arevalillo-Herraez, M., y Gonzalez-Calero, J. A. (2014). Emulating Human Supervision in an Intelligent Tutoring System for Arithmetical Problem Solving. *Learning Technologies, IEEE Transactions on*, *7*(2), 155-164.

Caselles, A. (1998). A tool for discovery by complex function fitting. In *Cybernetics and Systems Research'98*, pp. 787-792. R. Trappl (ed.). Austrian Society for Cybernetic Studies. Vienna.

Cerdán, F. (2008). *Estudios sobre la Familia de Problemas Aritmético-Algebraicos*. València: Servei de Publicacions de la Universitat de València.

Forrester, J.W. (1961). *Industrial Dynamics*. Cambridge, MA: MIT Press.

Huang, X.D., Craig, S.D., Xie, J., Graesser, A., y Hu, X.G. (2016) Intelligent tutoring systems work as a math gap reducer in 6th grade after-school program. *Learning and Individual Diferences*, *47*, 258-265.

Ivars, P. y Fernández, C. (2016). Problemas de estructura multiplicativa: Evolución de niveles de éxito y estrategias en estudiantes de 6 a 12 años. *Educación Matemática, 28*(1), 9-38.

Kaufman, A. S., y Kaufman, N. L. (1990). *K-BIT: Kaufman brief intelligence test*. American Guidance Service.

Lampert, M. (2003). *Teaching problems and the problems of teaching*. Yale University Press.

Hershkovitz, S. y Nesher, P. (1996). The Role of Schemes in Designing Computerized Environments. Educational Studies in Mathematics, 30(4), 339-365.

ISBN 978-84-945722-3-4

Reusser, K. (1993). Tutoring Systems and Pedagogical Theory: Representational Tools for Understanding, Planning, and Reflection in Problem Solving. En S. P. Lajoie y S. J. Derry (Eds.), *Computers as Cognitive Tools*, pp. 143-177. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Riley, M. S., Greeno, J. G., y Heller, J. L. (1983). Development of Children's Problem-Solving Ability in Arithmetic. En H. P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking* (pp. 153-196). New York: Academic Press.

Shulman, L.S. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review*, *57*(1), 1-21.

ISBN 978-84-945722-3-4