CB-643

INTRODUCCIÓN DEL METODO CONJUNTISTA CANTORIANO EN COLOMBIA

Mónica Andrea Aponte Marín
monica.aponte@correounivalle.edu.co
Universidad del Valle - Colombia

Núcleo temático: VII. Investigación en Educación Matemática.
Modalidad: CB
Nivel educativo: Formación y actualización docente.
Palabras clave: Topología Conjuntista, Métodos Cantorianos, Historia de la Matemática, Formación de Docentes.

Resumen

En este escrito hace parte de los adelantos del proyecto de tesis doctoral titulado "La introducción en Colombia del Método conjuntista cantoriano a través de la topología conjuntista", en el cual se espera dar cuenta dentro de un estudio histórico del surgimiento de la topología de Conjuntos en Colombia; caracterizando los principales resultados históricos que indujeron a la formalización de esta disciplina dentro de la matemática. Para justificar la problemática de investigación se trabaja bajo tres dimensiones a saber: la dimensión matemática, la histórica epistemológica en particular el caso colombiano con el profesor Francisco Vera y la dimensión escolar por medio del análisis de la obra de Vera. En el trabajo se propone responder a la pregunta ¿cómo ha sido la introducción de los métodos conjuntistas cantorianos?, En este sentido se trata de un estudio donde nos proponemos describir, explicar e identificar factores condicionantes en el proceso de institucionalización de la Topología conjuntista en Colombia, en la presentación de este trabajo se abordan algunos aspectos del desarrollo histórico de los métodos conjuntistas desde la década de 1870, haciendo énfasis en el caso colombiano que inicia en la década de 1940 con el matemático Español Francisco Vera.

Primera parte. Dimensión matemática: la génesis y el desarrollo histórico de la Topología de Conjuntos

Trataremos de mostrar brevemente algunos aspectos sobre la génesis de la teoría de conjuntos cantoriana. Cantor no era el único ni el primero en trabajar aspectos relacionados a los conjuntos. Se observa que en la década de 1870 y 1880 ya se tenían varios trabajos sobre álgebra, teoría de números y análisis, en los cuales se destacaron cuestiones conjuntistas, principalmente los trabajos de R. Dedekind, H. Weber, G. Peano, Bois-Reymond, U. Din y

ISBN 978-84-945722-3-4

J. Harnack; sin embargo los trabajos de Cantor tenían un sello particular, pues el matemático buscaba aclaraciones del infinito en acto, en aspectos filosóficos y matemáticos; en este sentido se cuestiona sobre la manera en que se constituye el universo de los conjuntos infinitos, evidenciándose así que el desarrollo histórico de la teoría de conjuntos estuvo fuertemente influenciada por el carácter y los intereses de quien más contribuyó a su desarrollo.

El nombre de "topología" conocido anteriormente con el nombre de análisis situs, que literalmente significa un análisis de posiciones. Desde un punto de vista etimológico, proviene de dos raíces que significan, respectivamente, el habla y el lugar. Los orígenes de esta área están relacionados con la idea de trabajar con un tipo de geometría en la que uno no usa el concepto de distancia. Es Leibniz quien introdujo el término en el siglo XVII, por medio del programa de cálculo de posiciones en una dirección ligeramente diferente de lo que luego sería la topología; y es hasta el siglo XIX que la topología se divide en dos ramas, que se convertirá en la topología general (también conocida como la configuración de topología), por una parte, y la topología combinatoria (topología algebraica más adelante). La topología general parece emerger de las ganas de trabajar sin necesidad de utilizar el concepto de distancia. Sin embargo, nos encontramos con frecuencia que se reconoce la topología general, para designar el estudio de las propiedades que son invariantes bajo homeomorfismos.

Gran parte del trabajo del siglo XIX se asocia con la idea de fundar el análisis sobre bases sólidas, definiendo estrictamente los conceptos claves del campo matemático, desde el principio del siglo XIX los matemáticos tienen preguntas sobre la estructura topológica de subconjuntos de R. En su demostración del teorema del valor intermedio, Bolzano (1817) utiliza un proceso de anidación de intervalos que se aproxima al método para demostrar el teorema de Bolzano-Weierstrass. En el lenguaje corriente, este teorema establece que todo subconjunto compacto R^n tiene un punto de acumulación. La demostración de Bolzano se basa realmente en intervalos repetidos de subdivisión.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

En el curso de análisis, Cauchy (1821) establece el siguiente resultado si una serie de funciones continuas converge la vecindad de un punto x_0, entonces el límite es una función continua en el mismo. La idea de lugar en un entorno del punto, muestra los tipos de conjuntos de trabajo que se tienen en cuenta. La teoría de las series de Fourier es otro ejemplo proporcionando preguntas similares. En 1829 Dirichlet proporciona la primera prueba rigurosa de la convergencia de una serie de Fourier. Pero también plantea la cuestión sobre cómo la convergencia de una serie está relacionada con el número de puntos de discontinuidad y el número de extremos que tiene la función. Por lo tanto, se busca conocer qué tipos de puntos, establece garantizar la convergencia de la serie. La pregunta para especificar la estructura topológica de estos conjuntos vuelve a estar presente. Estos tres ejemplos ilustran el concepto de convergencia, integrado con la teoría de funciones, que aparece como una fuente de cuestionar la naturaleza topológica del conjunto y de sus subconjuntos.

Por otra parte, Weierstrass se considera un icono del movimiento de austeridad en desarrollo desde principios del siglo XIX. Él utiliza en sus conferencias sobre la teoría de funciones, manifestaciones en las que lo que se considera hoy en día como teoremas de la topología elemental. Por ejemplo, la prueba de la existencia de un límite superior e inferior para un subconjunto acotado de R coincide con el teorema de intervalos anidados y la existencia de un punto de acumulación. También define, en su estudio de series de potencias, conceptos de la topología de R^n como conjunto acotado, punto externo, un conjunto frontera. Estos conceptos se introducen para permitir la demostración de resultados en serie, y para establecer el teorema de que se convertirá en el teorema de Bolzano-Weierstrass. Podemos puntualizar esta primera dimensión matemática afirmando que los conceptos de la topología son, por tanto, una herramienta para pruebas rigurosas de resultados de Weierstrass.

Segunda parte. Dimensión histórico- epistemológica: Francisco Vera y su exilio en Colombia

De acuerdo con los planteamientos de Sánchez y Alvis (2009), en la década de 1940 se encuentran los primeros intentos por dar a conocer la teoría de conjuntos y la lógica matemática en Colombia. Estos intentos se encuentran en el libro de Francisco Vera titulado

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Introducción a la teoría de conjuntos, recopilación de las notas de un curso dictado en Bogotá entre septiembre y octubre de 1942, de acuerdo con Arboleda (2015) Vera informa que elaboró este libro a partir de las notas del curso que dictó sobre estas materias en Bogotá por encargo de la Sociedad Colombiana de Ingenieros. Él recuerda que alcanzó a publicar las dos primeras lecciones durante su estadía en Colombia, pero que tuvo que suspenderlas por “las dificultades tipográficas con que tropecé, unidas a mi desplazamiento a la Argentina”; es importante resaltar que no solo con este libro quiso dar a conocer la teoría de conjuntos en Colombia, Vera también oriento conferencias divulgativas con referencia al estado del arte de la matemática conjuntista, y fue el promotor de la instauración y profesionalización de las matemáticas con la creación de la universidad de los Andes en 1949. El otro intento por dar a conocer la teoría de conjuntos esta en dos artículos de divulgación de la teoría de conjuntos publicados por Waldemar Bellon en la revista *Universidad Nacional de Colombia. Revista Trimestral de Cultura Moderna* en 1945.

Tercera parte. Dimensión escolar: La presentación de la Teoría de conjuntos de Francisco Vera en comparación con los inicios de la topología conjuntista

En la presentación del capítulo 1, del texto de Introducción a la teoría de conjuntos de Vera, se observa un acercamiento intuitivo a las nociones conjuntistas cantorianas, él establece la definición de conjunto a partir de la definición cantoriana quien la implanta como *“conexión determinada de diversos objetos de nuestra intuición (…), de nuestra mente llamados elementos del conjunto, en una totalidad”, Vera hace un llamado especial al peligro de la palabra totalidad que está presente en la definición, por ser inconstituible, y a partir de este llamado de atención de las limitaciones de la misma para presentar el conjunto como una “(…) pluralidad definida o determinada, y diremos que un conjunto está determinado cuando, cualesquiera que sean los elementos pertenecer o no pertenecer al conjunto, y para cada par de elementos no exista más que el dilema de estar formado o no estar formado por los elementos distintos”* (Vera, p. 11) en este sentido se observa una presentación intuitiva de la definición conjuntista.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Posterior a esta definición define los conceptos de correspondencia, orden, número ordinal, número cardinal, correspondencia entre ordinales y cardinales, principio de Schröder, conjuntos finitos y conjuntos infinitos, función, exponenciación, etc. Podemos ver que todas estas definiciones presentadas por Vera, carecen en muchas ocasiones de un formalismo matemático, se realizan algunas re-contextualizaciones históricas en lo concerniente a su fundamentación pero la presentación de las mismas sigue siendo netamente intuitiva, como podemos ilustrar a continuación en la construcción de la aritmética realizada por Vera (P.26-27): *"en posesión del número natural, con dos de ellos se construye el racional, con infinitos números racionales se crea el real, con dos números reales se forma el complejo, y con todos ellos la Aritmética*".

En este sentido, se puede pensar que con este tipo de cursos los estudiantes quizás se acercaron a las nociones de conjunto, funciones, en especial la función biyectiva, que comprenden los principales aspectos desde un enfoque histórico-epistemológico que se presentan en la consolidación de la teoría de conjuntos cantoriana, con todos los problemas y entramados paradójicos que se envuelven en la teoría, además que quizás se pretendía buscar habilidades para conocer la construcción conjuntista de los números naturales y enteros y ver ahí su cardinalidad, también lograr manejar de algún modo la noción matemática de igual, menor o mayor entre cardinalidades de conjuntos infinitos. Y especialmente lograr darse cuenta de nociones tan claves como la relación parte-todo, conjunto universal, la noción de infinito, que siempre se revelan de una forma paradójica o que bien nuestra razón o intuición yerran en algo esencial para comprenderlas.

En el capítulo 2 expone la caracterización del continuo matemático, parte de un concepto fundamental de la teoría de conjuntos que es el de numerabilidad, para la caracterización del continuo deja un poco de lado los elementos intuitivos que viene manejando en capítulo 1 e inicia un lenguaje más formal, hace uso de la prueba de la diagonal empleada por Cantor, este procedimiento le permite a Vera acercarse al problema presentado por Cantor de la existencia de conjuntos con distintas potencias y dar paso a la presentación del continuo físico y el continuo matemático (Vera, p.15).

ISBN 978-84-945722-3-4

Su presentación de la teoría de conjuntos es más orientada a las necesidades de fundamentar el análisis infinitesimal en el continuo real que a relacionar los conjuntos con las estructuras algebraicas. Este enfoque de enseñanza empleado por Vera concuerda con los desarrollos de la topología conjuntista, al menos a lo referente con el problema del continuo, en los inicios de la topología conjuntista se evidencia que la motivación de Cantor para los estudios de la topología conjuntista estaba directamente relacionada con la teoría de cardinales, y en último término con la hipótesis del continuo: “Antes de abordar el problema de la numerabilidad del conjunto de los números reales, demostraremos este hecho sorprendente: *el conjunto de todos los números reales tiene la misma potencia que el de los comprendidos entre 0 y 1*.” (Vera, p. 44), en este capítulo 2, Francisco Vera intenta ilustrar uno de los conceptos y problemáticas fundamentales para la génesis de la topología conjuntista como lo es el problema del continuo.

En concordancia al desarrollo histórico de la topología conjuntista, Vera en el 4 capítulo, presenta los conjuntos ordenados y conjuntos bien ordenados, estableciendo la definición de orden a través de la representación por puntos en un eje de abscisas los términos en la sucesión de los números racionales escribiendo debajo de ellos sus correspondientes números ordinales, resultando que una sucesión ordenada de números racionales no tiene el mismo orden que una sucesión de ordinales naturales (p. 98). A partir de esta definición, introduce la noción de conjunto bien ordenado al estilo cantoriano, y establece el orden relativo de los puntos de un conjunto lineal, dando paso a la presentación del teorema de Bolzano-Weierstrass, para la presentación del teorema considera el conjunto de todos los números reales divididos en dos clases A y B, formada la A por todos los números *a* tales que a su izquierda no hay ningún punto o, a lo más un numero finito de puntos, y la B, por los números *b* a cuya izquierda hay infinitos puntos del conjunto; se ve que esta clasificación es una cortadura en el sentido de Dedekind, mostrando así que *todo conjunto infinito acotado tiene al menos un punto de acumulación* (p.99), presentación que concuerda con la noción de punto límite de un conjunto de Weierstrass – Cantor. Es así como en siguiente capítulo expone que: “*para comprender el alcance la da teoría de conjuntos tal como la formo Cantor hay que distinguir entre matemática libre y matemática pura”* (p. 114) así que los resultados no deben

ISBN 978-84-945722-3-4

admitirse directamente en el análisis sino re-demostrarlos por métodos aritméticos cuando hay la necesidad para aplicarlos, esta presentación del capítulo nos ilustra la manera en que Vera abordara ciertos conceptos claves y fundamentales de la topología de los abiertos.

En el último capítulo Vera presenta los problemas de las antinomias de la teoría de conjuntos cantoriana y la salida a estas a través de la axiomatización de Zermelo. Por otra parte se observa que los conceptos de conjunto cerrado y conjunto abierto, no son expuestos de forma explícita por medio de definiciones su obra, y reconocemos de acuerdo al análisis histórico que estos dos conceptos son claves para el desarrollo de la topología conjuntista. Retomando un poco elementos de la génesis de la topología conjuntista podemos inferir que el autor toma métodos cantorianos, para fundamentar el problema del continuo real, para él comprender el continuo real, se trata no solo de percibir sus propiedades mediante técnicas empíricas, sino de caracterizar teóricamente a los reales como campo numérico. En este sentido define las cortaduras de Dedekind sobre R, y pasa luego a estudiar las propiedades algebraicas de las operaciones sobre el campo. También emplea los infinitésimos para introducir a los alumnos en representaciones intuitivas de conceptos básicos del cálculo diferencial.

Se puede inferir entonces que el tipo de cultura sobre los métodos conjuntistas que promovió Vera en Colombia, es una cultura que hace énfasis en los aspectos lógicos y filosóficos de los métodos de Cantor. Según se ilustra en la presentación de sus conceptos en la obra de Introducción a la teoría de conjuntos, pues se evidencia una falta por resolver problemas concretos de las operaciones, favoreciéndose más el pensamiento operacional y técnico. Sustentado en algunos antecedentes históricos para establecer las nociones conjuntistas, iniciando con un acercamiento intuitivo, para dar pasó algunas definiciones más abstractas en capítulos siguientes con la carencia de ejemplificaciones concretas.

Consideraciones finales

Partiendo que en el reconocimiento de las exigencias académicas que demanda la conceptualización de un área de conocimiento matemático, los estudios sobre el desarrollo histórico de un concepto permiten comprender y desglosar las dificultades intrínsecas que se esconden tras la apariencia formalizada del concepto en la matemática actual. En este sentido

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

es que empiezan a tomar fuerza e interés las investigaciones sobre el desarrollo de las matemáticas desde distintas épocas. Con este análisis observamos que desde el inicio la introducción de los métodos cantorianos en Colombia, se ofreció desde el enfoque de Francisco Vera, una génesis de conceptos con una serie de cambios significativos en relación con su papel en la realidad histórica del desarrollo de topología conjuntista, en este sentido se considera que la transposición didáctica realizada dentro de esta enseñanza es "enorme" en comparación con el surgimiento de los conceptos en los textos de los conocimientos y lo que se puede haber aprendido.

Podemos inferir que las diferencias sugieren que producimos artificialmente aspectos de formalización, amplificación y generalización de conceptos a enseñar. De hecho, la naturaleza de las nociones que se formalizan demuestra en particular el amplio uso que hacemos del registro simbólico. Esto se utiliza deliberadamente para caracterizar las nociones mientras que el registro de lenguaje natural es más que suficiente para introducir los mismos conceptos, en este sentido se ve como en el texto de Vera se busca unificar y generalizar los conceptos el marco de la recta real, mientras que este aspecto es prácticamente transparente en la producción de conocimientos descritos desde la dimensión matemática e histórica que en ese libro de texto.

En esta etapa de trabajo, nuestra comprensión de lo que está en el corazón de las nociones de topología conjuntista se amplió en al menos dos direcciones. Por un lado, ahora tenemos una visión mucho más amplia, externa a nuestro contexto institucional de las especificidades de los conceptos. Su génesis histórica, su función en los marcos de topología básica y general, su presentación en la obra de Vera, que nos han permitido introducir elementos para los procesos de formalización e institucionalización de los métodos cantorianos en Colombia. También el análisis anterior mostró que los conceptos se definen entre sí deben ser integrados en una redes de mayor conocimiento. Una reflexión que se puede llevar a cabo en la integración en nuestra enseñanza.

Finalmente, la importancia de este tipo de estudios en historia de la matemática contribuye en la práctica educativa, en la medida que proporciona reflexiones hacia la exploración de un desarrollo adecuado del pensamiento matemático, dentro de cursos de educación superior,

ISBN 978-84-945722-3-4

buscado favorecer en cierta medida la adquisición de conceptos matemáticos abstractos de la topología conjuntista que suele generalmente ser en muchas ocasiones, mal interpretados y trabajados en el aula de clase.

Referencias bibliográficas

Albis, V. y Sánchez, C. (2009). *La introducción de la teoría de conjuntos y la matemática moderna en Colombia. Primera parte: El aporte de los extranjeros*. Mathesis III 42, 265 - 293.

Albis, V. y Sánchez, C. (2012). *Historia de la Enseñanza de las Matemáticas en Colombia. De Mutis al siglo XXI.* Quipu 14, 109-157.

Arboleda, L. C. (1980). *Las primeras investigaciones sobre los espacios topológicos. Sociedad Colombiana de Matemáticas*. X Coloquio Colombiano de Matemáticas, Paipa.

Arboleda, L. C. (2015). *Francisco Vera en Colombia. Transición de las matemáticas del ingeniero a las matemáticas profesionales*. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/292147696, febrero 16, 2016.

Moore, G. (2008). *The emergence of open sets, closed sets, and limit points in analysis and topology.*

Vera, F. (1942). *Teoría de Conjuntos.* Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales 5(18), 230-240.

Vera, F. (1943). *Historia de las ideas matemáticas*. Sociedad Colombiana de Ingenieros. Bogotá: Editorial Centro

Vera, F. (1948*) Introducción a la teoría de conjuntos*. Buenos Aires Argentina: Coepla.

ISBN 978-84-945722-3-4