CB-642

Un estudio de las propiedades del gráfico de funciones reales de variable real por medio de registros de representación semiótica

Nancy Saravia Molina – Katia Vigo Ingar
nsaraviam@pucp.edu.pe – kvigo@pucp.pe
Pontificia Universidad Católica del Perú

Núcleo temático: Investigación en Educación Matemática
Modalidad: CB
Nivel educativo: Terciario o Bachillerato (16 a 18 años)
Palabras clave: función real de variable real, límite de funciones, registros de representación semiótica.

Resumen

El objetivo de nuestro artículo es analizar cómo los estudiantes de ingeniería del primer año de estudios de nivel universitario movilizan los Registros de Representación Semiótica: algebraico-gráfico al reconocer las propiedades fundamentales del gráfico de funciones reales de variable real. Nuestra investigación es de tipo cualitativa, puesto que los estudios cualitativos están más interesados por el proceso, que simplemente por los resultados o productos. Hemos analizado dos secuencias de actividades propuestas en clase, las cuales se aplicaron después de haber brindado las propiedades de las funciones así como la noción de límite. Afirmamos que los estudiantes tienen dificultad cuando se enfrentan con funciones seccionadas o por tramos, les cuesta entender que el límite se aplica a puntos que no necesariamente pertenecen al dominio, no comprenden que significa la imagen de un punto cuando se trata de aplicar la noción de límite y dado el gráfico de una función con asíntotas verticales y horizontales les resulta fácil pasar del registro gráfico al algebraico, mostrando dificultad para pasar del registro algebraico al gráfico.

Palabras clave: Función real de variable real, Límite de funciones, Registros de Representación Semiótica.

Introducción

En el trabajo realizado por Silvia Aquere titulado ¨Una propuesta didáctica para la enseñanza del límite¨ se menciona que el aprendizaje de la matemática implica aprender y utilizar el “lenguaje matemático”. Coincidimos con ella que es esencial para realizar actividades que los alumnos puedan movilizarse entre varios registros en el curso de una misma acción, o bien elegir un registro en vez de otro. Según Duval (2016) existe la necesidad de cambiar de sistema de representación ya que la formación de conceptos implica una coordinación de sistemas de representaciones, esta se logra articulando entre diferentes registros. Entendemos

ISBN 978-84-945722-3-4

por representaciones, diferentes notaciones, ya sean gráficas, simbólicas, así como expresiones verbales. Estas representaciones se agrupan en registros. Por ejemplo, el registro gráfico o el registro numérico.

En el concepto de dominio y límite, el registro numérico se ve mediante tablas de valores, para ver la imagen de la función en algunos puntos y la posibilidad de acercarse a un determinado valor utilizando aproximaciones mayores por un lado y menores por el otro. El registro gráfico mediante utilización de los ejes cartesianos. El registro simbólico cuando es posible definir el límite de una función utilizando la simbología adecuada. Y el registro verbal cuando es posible definir el concepto utilizando palabras de nuestro vocabulario.

Como profesoras observamos que una de las mayores dificultades o errores que cometen los estudiantes es la mala interpretación de límite dicho error es consecuencia de no saber determinar el dominio de dicha función, lo cual les lleva a una mala aproximación de los puntos que pueden o no pertenecer al dominio. Para entender los que significa error, citemos a los siguientes autores: Godino, Batanero y Font (2003) citados por Abrate et al, (2006, p.14) "hablamos de error cuando el alumno realiza una práctica (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar". Además, señalan que "si bien el error puede tener procedencias diferentes, generalmente tiende a ser considerado como la presencia de un esquema cognitivo inadecuado en el alumno y no solamente como consecuencia de una falta específica de conocimientos". Para Rico (1995), el error se produce cuando un alumno proporciona una respuesta incorrecta a una cuestión matemática, esta respuesta es errónea, la solución proporcionada es un error en relación a la cuestión planteada.

Es por esto que el objetivo de nuestra investigación es analizar cómo los estudiantes de ingeniería del primer año de estudios de nivel universitario movilizan los Registros de Representación Semiótica: algebraico-gráfico al reconocer las propiedades fundamentales del gráfico de funciones reales de variable real.

Marco Teórico

Según Duval (2016), el papel de las representaciones semióticas no se reduce a designar objetos o a ser consideradas como objetos sino, cualesquiera que sean las representaciones semióticas utilizadas, estas se pueden cambiar por otras representaciones semióticas sin el

ISBN 978-84-945722-3-4

apoyo de datos nuevos u observaciones empíricas. Pero eso depende del sistema semiótico dentro del cual se producen las representaciones semióticas.

Además, debemos tener en cuenta las diferencias entre los sistemas de representación semiótica usados para analizar los procesos de pensamiento complejos y específicos que están por debajo de la actividad matemática. “Lo que interesa para comprender los procesos de pensamiento involucrados en cualquier actividad matemática es enfocarse en el nivel de los sistemas de representación semiótica y no en la representación particular producida” (Duval, 2016, p. 72).

Para el investigador, existen cuatro tipos muy diferentes de sistemas semióticos, los que denomina de registros de representación: Lengua materna, registro algebraico, registro gráfico y registro numérico. Un sistema semiótico es un registro solo si permite tres actividades cognitivas, fundamentales.

La formación de una representación semiótica es basada en la aplicación de reglas de conformidad y en la selección de algunas características del contenido involucrado. Por ejemplo, describir el dominio de una función.

El tratamiento de una representación es la transformación de representaciones que ocurren dentro del mismo registro. El tratamiento es, entonces, una transformación interna en un registro; por ejemplo, la definición de límite de una función real representada en el registro algebraico $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ por medio de tratamientos es equivalente a $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } a - \delta < x < a + \delta \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$.

Duval (2016) resalta el hecho de que los tratamientos que se realizan dependen especialmente de las posibilidades de transformación semiótica que son específicos para el registro utilizado.

La conversión de una representación es una transformación de esta representación en una representación de otro registro; por ejemplo, pasar la representación de función par del registro algebraico para el registro gráfico, conforme muestra la Figura 4.

ISBN 978-84-945722-3-4

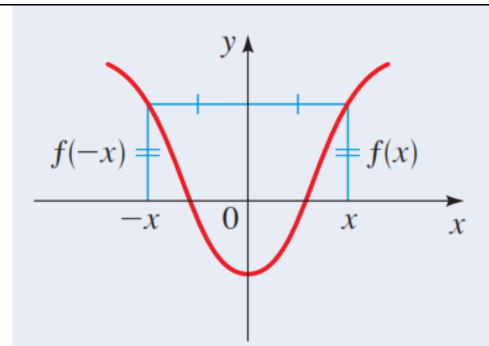
$f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = f(-x),\ \forall x \in D.$	
	Fuente: Stewart J., Redlin L. y Watson S.(2012, p.185)

Figura 4. Conversión entre representaciones

Según Duval (2016), la conversión es más compleja que el tratamiento dado que cualquier cambio de registro requiere que se reconozca al mismo objeto representado cuando entre dos representaciones, sus contenidos generalmente no tienen nada en común. “La conversión requiere implícitamente siempre que se deban usar juntos, de manera interactiva, dos registros o incluso tres” (Duval, 2016, p. 75). Asimismo, para el investigador disponer de varios registros de representación no es suficiente para garantizar la comprensión. Una segunda condición se hace necesario y es la coordinación de representaciones formuladas en diferentes registros.

En el aprendizaje de límite, por ejemplo, es evidente que una práctica muy específica, en el aula, es de usar simultáneamente dos registros. Hablamos en lenguaje natural mientras que se escriben expresiones simbólicas como si “las explicaciones verbales pudieran volver transparente cualquier tratamiento simbólico” (Duval, 2016, p.76). Por ejemplo, al definir el límite de una función utilizamos el siguiente discurso escrito: para todo $\varepsilon > 0$, podemos encontrar un $\delta > 0$ tal que si x está dentro del intervalo abierto $(a-\delta, a+\delta)$ y $x \neq a$, entonces $f(x)$ está dentro del intervalo $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.

Por medio de los varios tipos de conversiones, más que por medio de tratamientos, tocamos la complejidad cognitiva de la comprensión en el aprendizaje de las matemáticas, en particular, en el aprendizaje del límite, y en los procesos de pensamiento específicos requeridos por la actividad matemática.

Metodología de Investigación y Sujetos de Investigación

La investigación cualitativa según Creswell (2010), es una investigación interpretativa, con el investigador típicamente envuelto en una experiencia sustentada e intensiva con los

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

participantes. Asimismo, en este tipo de investigación, los investigadores se interesan más por el proceso de que simplemente por los resultados o productos, los investigadores tienden a analizar sus datos de forma inductiva, es decir, no se recolectan los datos o pruebas con el objetivo de confirmar o informar hipótesis construidas previamente. El significado es de importancia vital en el abordaje cualitativo. “los investigadores cualitativos en educación están continuamente cuestionando a los sujetos de investigación, con el objetivo de percibir aquello que ellos experimentan, la manera como ellos interpretan sus experiencias y el modo como ellos mismos estructuran el mundo social en que viven” (Psathas, 1973, citado en Bogdan y Biklen, p. 51, 1994). Consideramos la observación como procedimiento para la recolección de los datos donde definimos los objetivos de estudio; decidimos sobre el grupo de sujetos a observar; registramos las observaciones y analizamos los datos.

Las actividades se desarrollaron con un grupo de 64 alumnos de ingeniería del segundo ciclo de estudios, dichos alumnos resolvieron las actividades en grupos en el salón de clases luego de haberles dado la idea intuitiva de límite y conociendo la definición de dominio, funciones pares e impares, funciones crecientes y decrecientes, dichas actividades fueron desarrolladas a lápiz y papel por un tiempo de 1 hora. Para este artículo hemos considerado dos trabajos de los estudiantes.

Aplicamos dos actividades, la **actividad 1** tiene como objetivo, a partir del gráfico de una función, determinar su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento e indicar si la función es par o impar y hallar las imágenes de determinados puntos, analizar la existencia de límites en estos puntos y límites en el infinito.

Actividad 1: A partir del gráfico de una función f, responda:

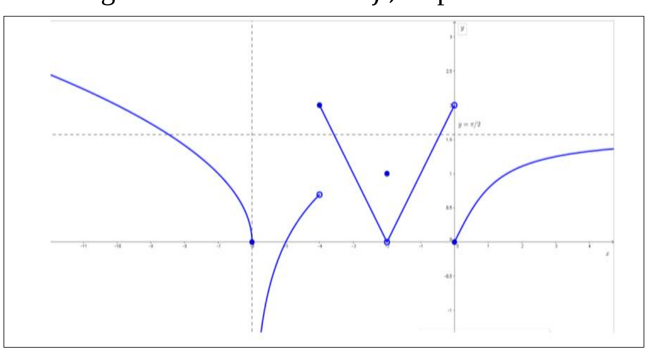


Figura 2. Gráfico de una Función

a) ¿Cuál es el dominio de la función?
b) ¿En qué intervalos la función crece o decrece? Justifique
c) ¿La función es par o impar? Justifique

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

d) Halle $f(-6)$, $f(-4)$, $f(-2)$ y $f(0)$

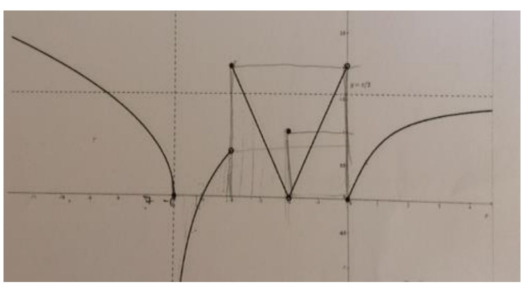
e) Analice la existencia de los siguientes límites y justifique sus respuestas.

$\lim_{x \to -\infty} f(x)$	$\lim_{x \to -6} f(x)$	$\lim_{x \to -4} f(x)$
$\lim_{x \to -2} f(x)$	$\lim_{x \to 0} f(x)$	$\lim_{x \to +\infty} f(x)$

Esperamos que, en esta actividad, el estudiante reconozca el dominio de la función diferenciando si los puntos que aparecen en la gráfica tienen o no una pre imagen, indicando de esta manera si el punto está definido o no. El conocimiento que moviliza el estudiante respecto a la noción de función par es que su gráfica es simétrica respecto del eje y , y si es impar su gráfica es simétrica respecto del origen, con dicho conocimiento movilizado esperamos que el estudiante pueda realizar la conversión de la representación de la función par o impar del registro gráfico para el registro algebraico y coordinar dichos registros. Al reconocer el dominio de la función esperamos que el estudiante no presente dificultad al momento de analizar los límites ya sea por derecha del punto (para valores mayores) o por izquierda de punto (para valores menores).

Análisis de la Actividad 1

Observamos que los estudiantes no presentan problemas con las nociones de función creciente, decreciente y función impar y par es decir coordinan ambos registros puesto que reconocen la representación de un mismo objeto, en dos registros diferentes, conforme se muestra en la figura 3.



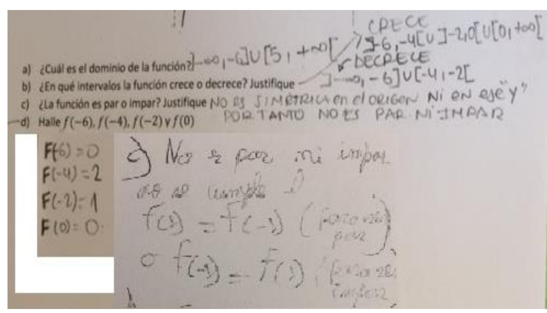


Figura 3. Producción de los estudiantes

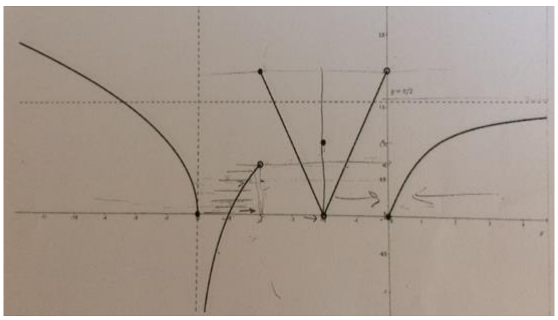
Respecto a estas últimas nociones el estudiante las relaciona con el concepto de simetría respecto al origen y al eje Y, respectivamente. Lo que significa que los estudiantes movilizan sus conocimientos previos sobre algunas propiedades del gráfico de una función y logra convertir dichas nociones del registro gráfico al algebraico, es decir coordina los dos diferentes registros de representación. Sin embargo, comete error la describir el dominio de

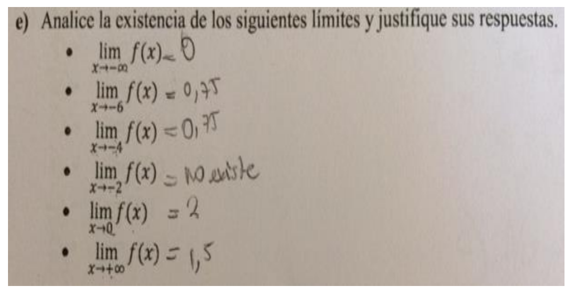
VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

la función, es decir, esta noción no es movilizada por el estudiante permaneciendo en un nivel técnico (Robert, 1998).

Asimismo, los estudiantes movilizan la noción de pre imagen e imagen de una función dado que, como se muestra en la figura 3, realiza trazos con lápiz indicando los puntos, representación gráfica del par ordenado, esto significa que coordina ambos registros, el gráfico y el algebraico, al realizar la conversión de un punto para su respectivo par ordenado a pesar de que dicha representación está dada de la forma f(a)=b.

Respecto al concepto de límite de una función, observamos que los estudiantes presentan dificultades, como se muestra en la figura 4.





e) Analice la existencia de los siguientes límites y justifique sus respuestas.

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$
- $\lim_{x\to-6} f(x) = 0{,}75$
- $\lim_{x\to-4} f(x) = 0{,}75$
- $\lim_{x\to-2} f(x) =$ no existe
- $\lim_{x\to0} f(x) = 2$
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1{,}5$

Figura 4. Producción de los estudiantes

Los estudiantes no movilizan el concepto de límite al momento de identificarlo en el registro gráfico, es decir, el saber no está bien identificado y bien utilizado por el estudiante (Robert, 1998). Este hecho no permite realizar, por parte del estudiante, la conversión de la representación del límite del registro gráfico al algebraico. No coordina dichos registros puesto que, conforme muestra la figura 4, observamos que al comparar las tendencias (marcas con lápiz) hacia un valor, los estudiantes no establecen qué se deduce de la no existencia de imagen. Es decir, no relaciona aproximaciones al límite desde el rango con las del punto en el dominio.

Actividad 2 tiene como objetivo esbozar el gráfico de una función que cumpla con todas las siguientes características.

$Dom(f) = IR$	f impar en $IR - \{-4,4\}$	$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 5$	$\lim_{x\to-4^+} f(x) = +\infty$
$f(2) = 6$	$\lim_{x\to0} f(x) = 0 = f(0)$	$\lim_{x\to-4^-} f(x) = -\infty$	

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Esperamos que al haber percibido las características o propiedades del gráfico de una función en la actividad 1, los estudiantes puedan, partir de ciertas propiedades y diseñar el gráfico de una función.

Análisis de la Actividad 2

Dado el discurso matemático, observamos que el estudiante en el registro gráfico no moviliza la noción de dominio de una función y de función impar como muestra la figura 5. Sin embargo, respecto a la representación de pre imagen e imagen de una función en el registro gráfico como par ordenado *(2,6)* y como imagen del intervalo $[4, +\infty[$, en este momento, sí moviliza su conocimiento de función y de función impar, dado que grafica el par ordenado *(-2,-6)* y la imagen del intervalo $]-\infty, -4]$, conforme se muestra en la figura 5. Lo que significa, también, que reconoce la representación de función y función par en dos registros distintos: algebraico y gráfico, pero comete errores respecto al concepto de función al representarla en el registro gráfico en todo su dominio, por ejemplo, en los intervalos $]-\infty, -4]\ y\ [4, +\infty[$ ver figura 5.

Respecto al límite de una función, nuevamente, observamos que los estudiantes no movilizan dicho conocimiento quedando este conocimiento el nivel técnico. Presentan dificultades en el proceso de construcción del significado del concepto del límite de una función.

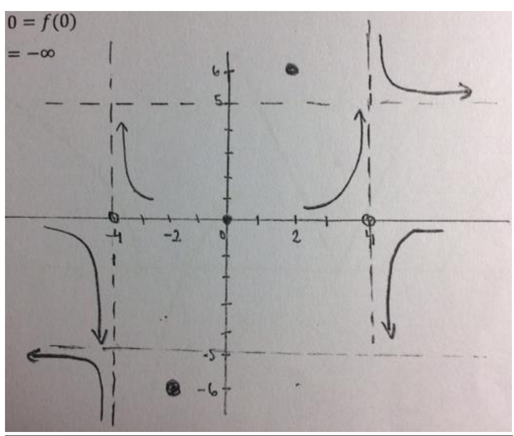


Figura 5. Producción de los estudiantes

Consideraciones Finales

El dominio de la función no siempre está bien identificado ni bien utilizado por el estudiante, asimismo la concepción de *f(x) se aproxima a L cuando x se aproxima al número a, sus imágenes de f(x) se aproxima a L* no tiene significado para el estudiante dado que, por

ISBN 978-84-945722-3-4

ejemplo, les cuesta analizar los límites laterales y límites infinitos. En este sentido afirmamos que la coordinación entre el registro gráfico y simbólico y viceversa no es realizada por el estudiante. Además, presentan mayor dificultad cuando el punto no pertenece al dominio y analizan la existencia del límite en dicho punto. Finalmente, al esbozar el gráfico de la función no tienen en cuenta que lo que grafican no es una función.

Referencias bibliográficas

Abrate, R; Pochulu, M. y Vargas, J. (2006). *Errores y dificultades en matemática. Análisis de causas y sugerencias de trabajo.* 1^{a}ed. Buenos Aires: Universidad Nacional de Villa María.

Aquere, S. Una Propuesta Didáctica para la enseñanza del límite. Disponible en http://www.soarem.org.ar/Documentos/40%20Engler.pdf.

Bogdan R. y Biklen S. (1994). Investigação qualitativa em Educação: fundamentos, métodos e técnicas. In: Investigação qualitativa em educação. Portugal.

Duval R. (2016). Un análisis cognitivo de problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas. En Duval R. y Sáenz-Ludlow A. (Eds.), Comprensión y Aprendizaje en matemáticas: Perspectivas Semióticas Seleccionadas, Capítulo 2, pp. 61-94. Colombia.

Mariotti, M.(2000). Introduction to proof: The mediation of dynamic software environment. Educational Studies in Mathematics, 44, 25-53.

Rico, L. (1995). *Errores en el aprendizaje de la Matemática.* Kilpatrick, J.; Gómez, P.; Rico, L. *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de Problemas. Evaluación. Historia.* Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 69 – 108

Robert, A. (1998). *Outils d´analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée à l´université* publicado em Recherches en didactique des Mathématiques, vol. 18, nº 2, p. 139-190.

ISBN 978-84-945722-3-4